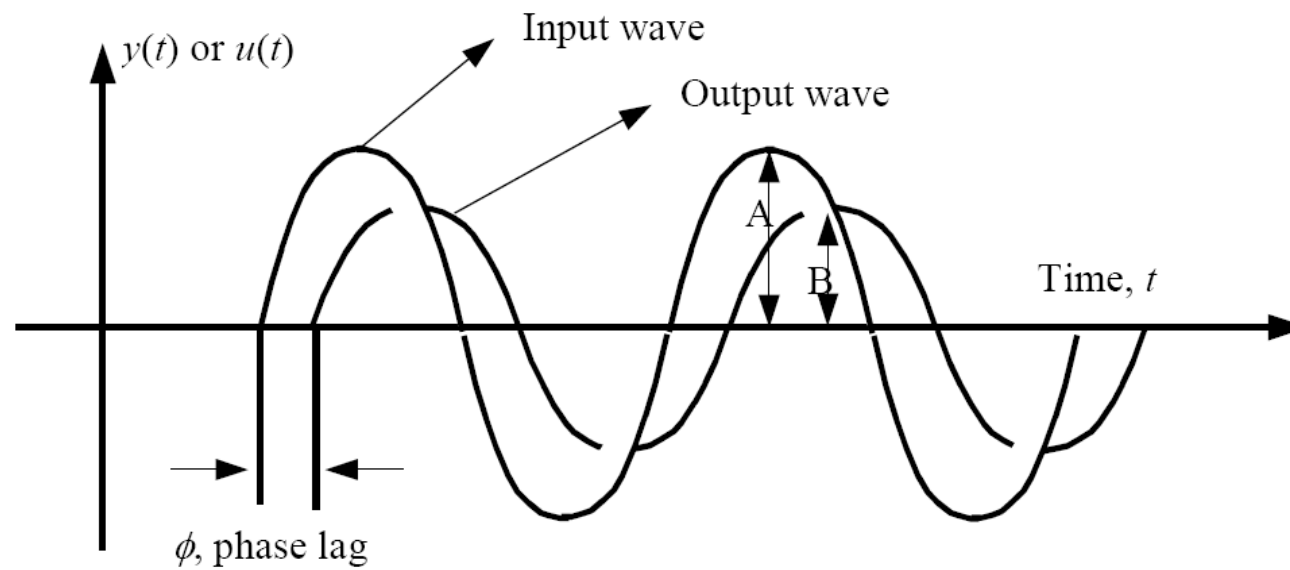
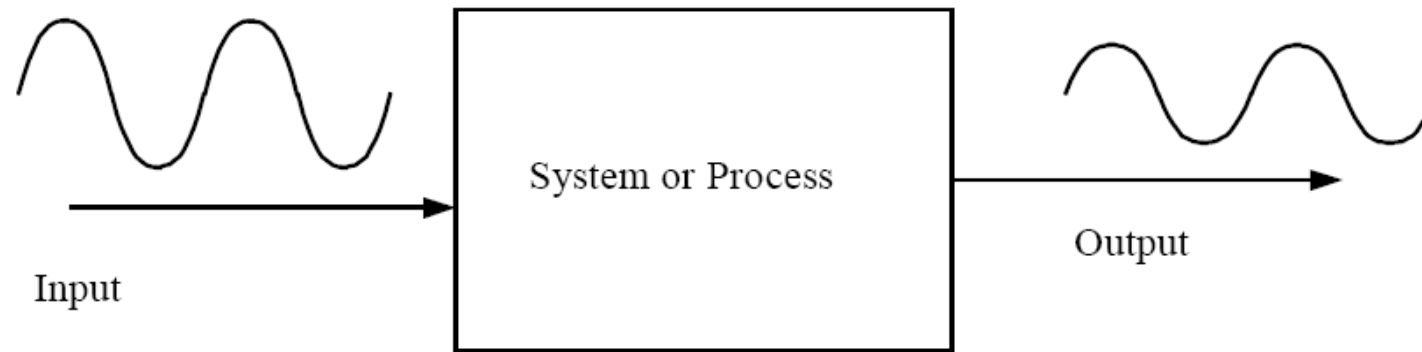

Chapter 10 Frequency Response

Present by : Thawatchai Thongleam
Faculty of Science and Technology
Nakhon Pathom Rajabhat University

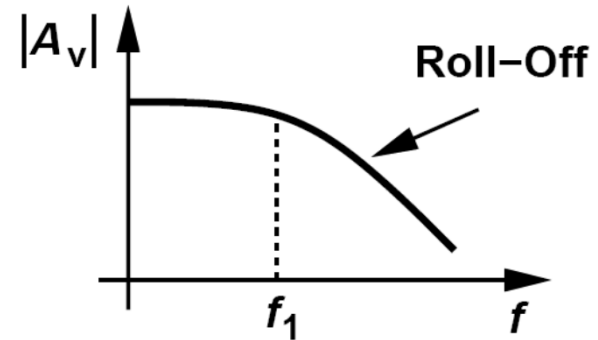
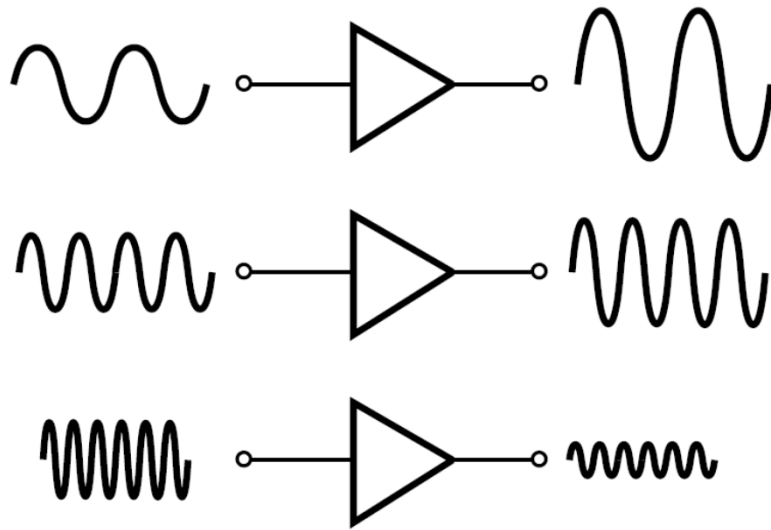
Overview

- 10.1 Logarithm
 - 10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลการตอบสนองทางความถี่
 - 10.3 Bode plots
 - 10.4 Low-Frequency analysis bode plot
 - 10.5 Miller's theorem
 - 10.6 High frequency model of transistor
 - 10.7 Frequency response of transistor
 - 10.8 High frequency model of MOSFET
 - 10.9 Frequency response of MOSFET
-

Introduction



Introduction

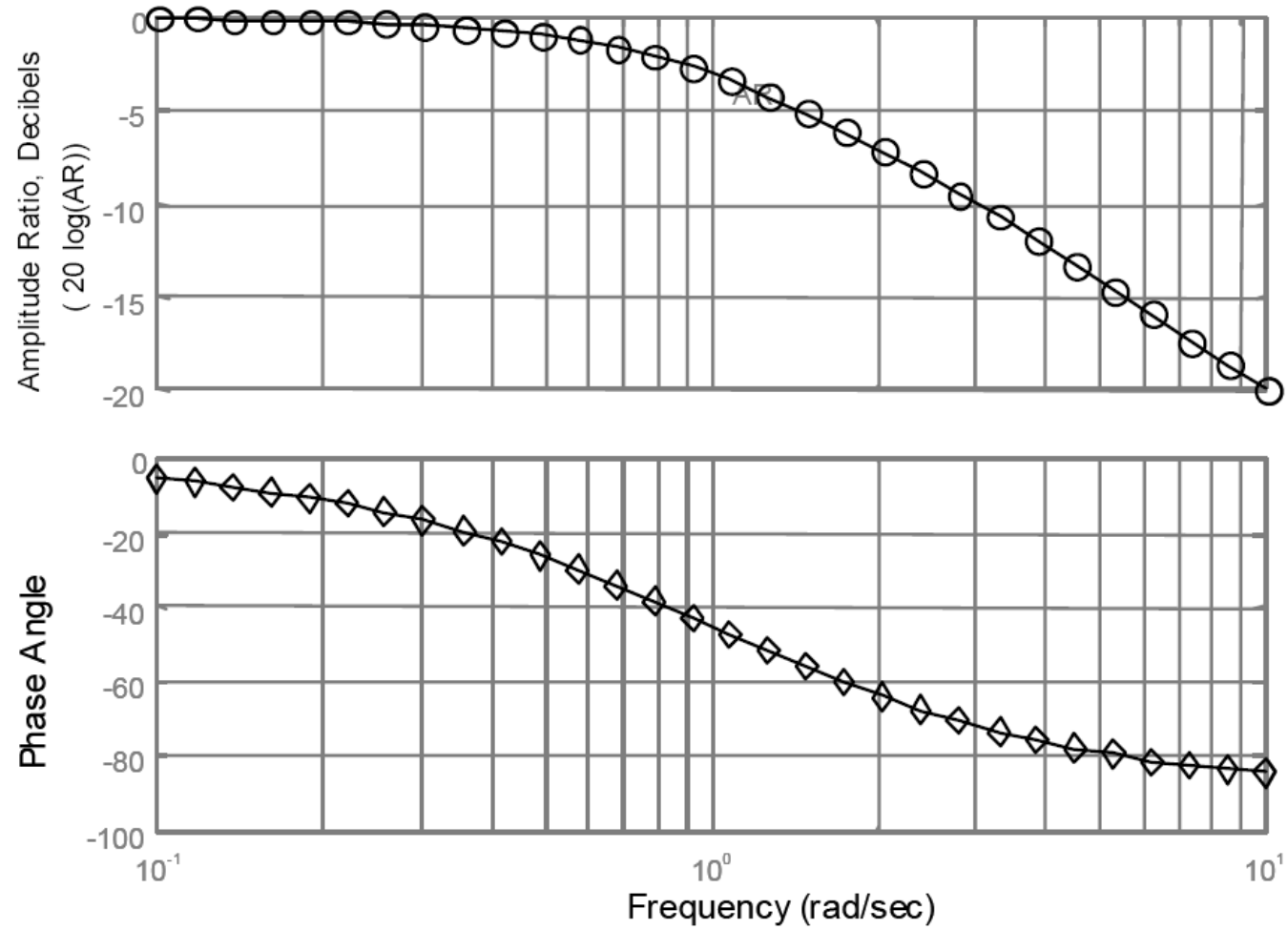


Introduction

E

E

Introduction



10.1. Logarithm

There is no escaping the need to become comfortable with the logarithmic function. The plotting of a variable between wide limits, comparing levels without unwieldy numbers, and identifying levels of particular importance in the design, review, and analysis procedures are all positive features of using the logarithmic function.

As a first step in clarifying the relationship between the variables of a logarithmic function, consider the following mathematical equations:

$$a = b^x, \quad x = \log_b a \quad (11.1)$$

The variables a , b , and x are the same in each equation. If a is determined by taking the base b to the x power, the same x will result if the log of a is taken to the base b . For instance, if $b = 10$ and $x = 2$,

$$a = b^x = (10)^2 = 100$$

but

$$x = \log_b a = \log_{10} 100 = 2$$

In other words, if you were asked to find the power of a number that would result in a particular level such as shown below:

$$10,000 = 10^x$$

the level of x could be determined using logarithms. That is,

$$x = \log_{10} 10,000 = 4$$

For the electrical/electronics industry and in fact for the vast majority of scientific research, the base in the logarithmic equation is limited to 10 and the number $e = 2.71828. . . .$

Logarithms taken to the base 10 are referred to as *common logarithms*, while logarithms taken to the base e are referred to as *natural logarithms*. In summary:

$$\text{Common logarithm: } x = \log_{10} a \quad (11.2)$$

$$\text{Natural logarithm: } y = \log_e a \quad (11.3)$$

The two are related by

$$\log_e a = 2.3 \log_{10} a \quad (11.4)$$

On today's scientific calculators, the common logarithm is typically denoted by the **log** key and the natural logarithm by the **ln** key.

EXAMPLE 11.1

Using the calculator, determine the logarithm of the following numbers to the base indicated.

- (a) $\log_{10} 10^6$.
- (b) $\log_e e^3$.
- (c) $\log_{10} 10^{-2}$.
- (d) $\log_e e^{-1}$.

Solution

- (a) **6** (b) **3** (c) **-2** (d) **-1**
-

The results in Example 11.1 clearly reveal that the logarithm of a number taken to a power is simply the power of the number if the number matches the base of the logarithm. In the next example, the base and the variable x are not related by an integer power of the base.

EXAMPLE 11.2

Using the calculator, determine the logarithm of the following numbers.

- (a) $\log_{10} 64$.
- (b) $\log_e 64$.
- (c) $\log_{10} 1600$.
- (d) $\log_{10} 8000$.

Solution

- (a) **1.806** (b) **4.159** (c) **3.204** (d) **3.903**
-

Note in parts (a) and (b) of Example 11.2 that the logarithms $\log_{10} a$ and $\log_e a$ are indeed related as defined by Eq. (11.4). In addition, note that the logarithm of a number does not increase in the same linear fashion as the number. That is, 8000 is 125 times larger than 64, but the logarithm of 8000 is only about 2.16 times larger

EXAMPLE 11.4

Using a calculator, determine the logarithm of the following numbers:

(a) $\log_{10} 0.5$.

(b) $\log_{10} \frac{4000}{250}$.

(c) $\log_{10} (0.6 \times 30)$.

Solution

(a) **-0.3**

(b) $\log_{10} 4000 - \log_{10} 250 = 3.602 - 2.398 = \mathbf{1.204}$

Check: $\log_{10} \frac{4000}{250} = \log_{10} 16 = \mathbf{1.204}$

(c) $\log_{10} 0.6 + \log_{10} 30 = -0.2218 + 1.477 = \mathbf{1.255}$

Check: $\log_{10} (0.6 \times 30) = \log_{10} 18 = \mathbf{1.255}$

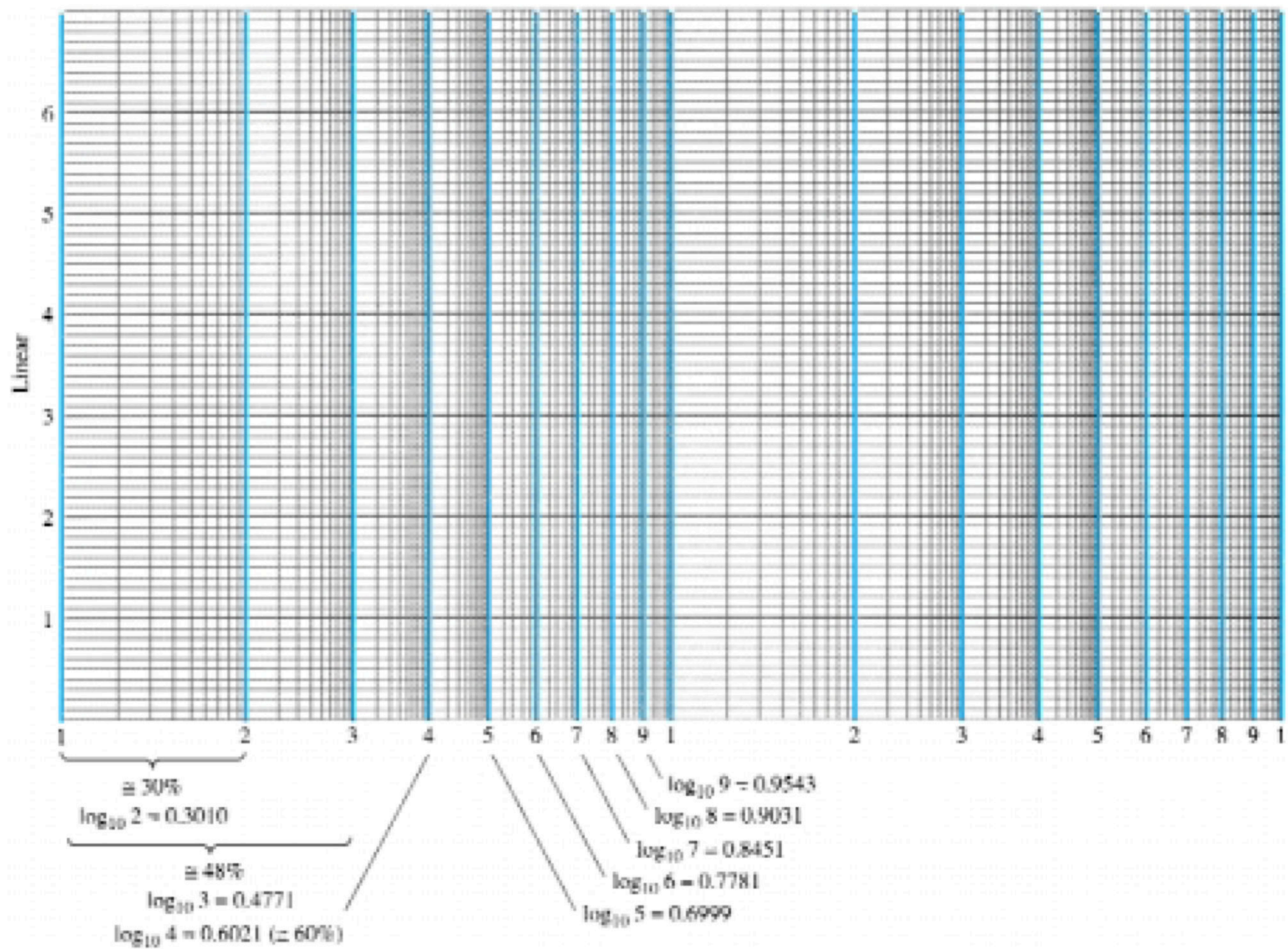


Figure 11.1 Semilog graph paper.

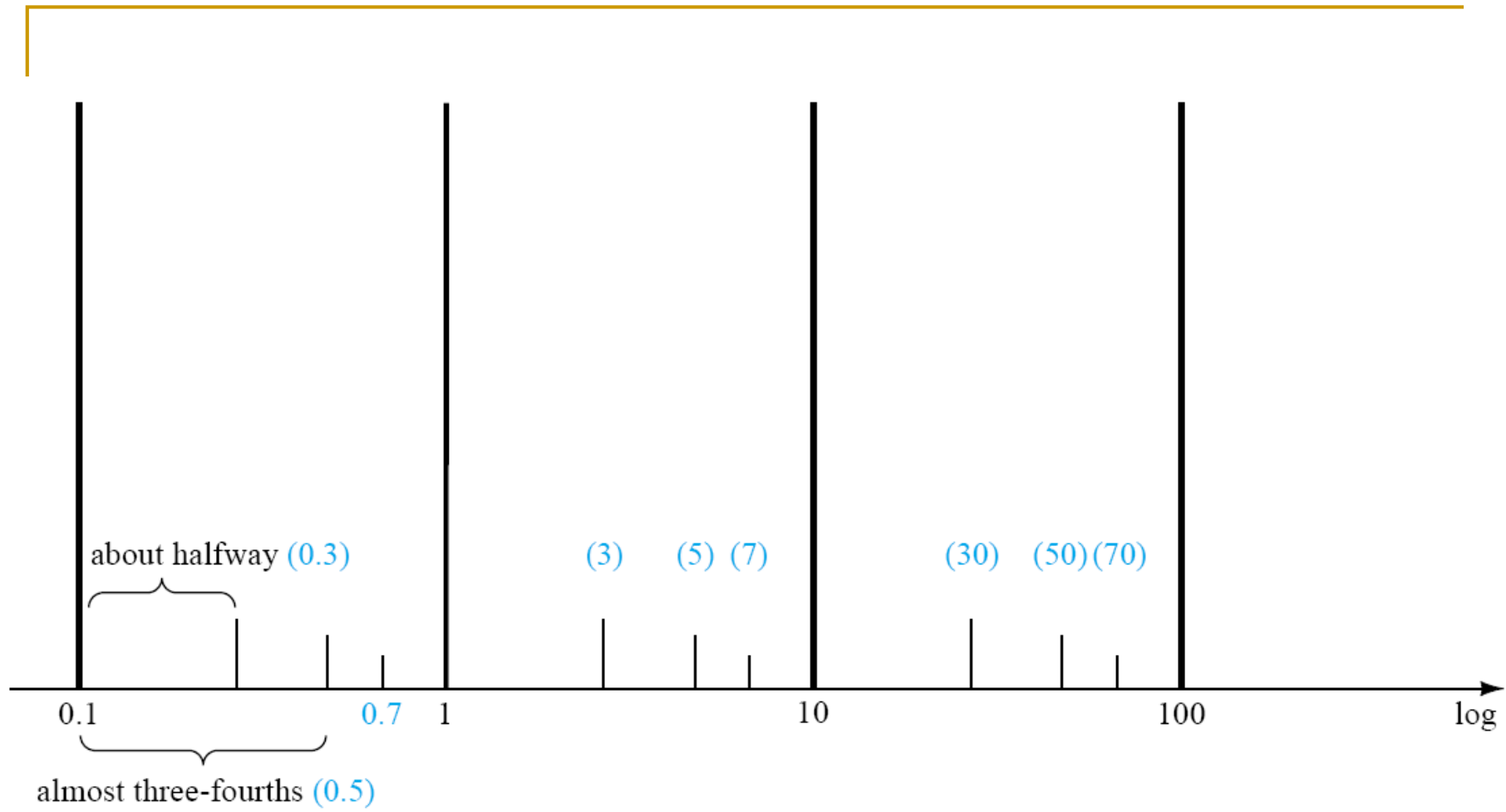


Figure 11.2 Identifying the numerical values of the tic marks on a log scale.

$$G = \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad \text{bel}$$

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad \text{dB}$$

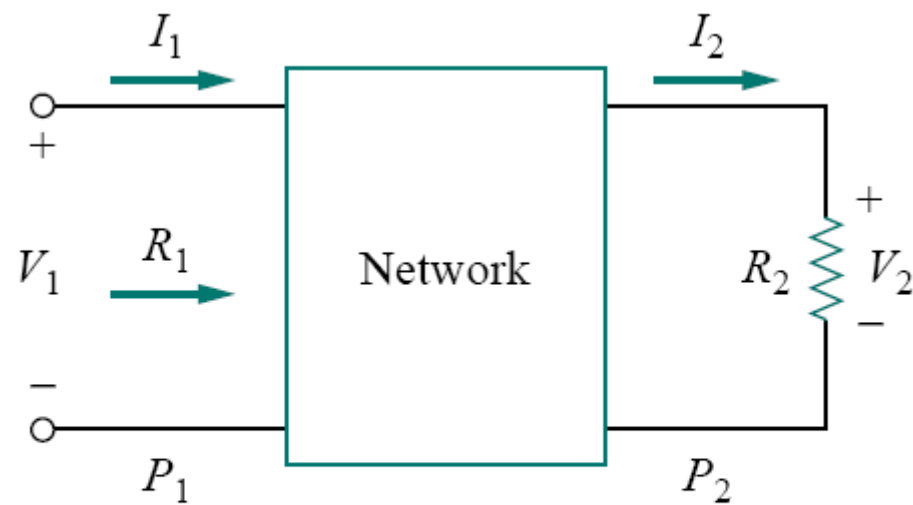


Figure 14.8 Voltage-current relationships for a four-terminal network.

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_i}{V_1^2/R_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2$$

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} \quad \text{dB}$$

Applying the proper logarithmic relationship results in

$$G_v = 20 \log_{10} |A_{v_T}| = 20 \log_{10} |A_{v_1}| + 20 \log_{10} |A_{v_2}| + 20 \log_{10} |A_{v_3}| + \cdots + 20 \log_{10} |A_{v_n}| \quad (\text{dB}) \quad (11.14)$$

In words, the equation states that the decibel gain of a cascaded system is simply the sum of the decibel gains of each stage, that is,

$$G_v = G_{v_1} + G_{v_2} + G_{v_3} + \cdots + G_{v_n} \quad \text{dB} \quad (11.15)$$

In an effort to develop some association between dB levels and voltage gains, Table 11.2 was developed. First note that a gain of 2 results in a dB level of +6 dB while a drop to $\frac{1}{2}$ results in a -6-dB level. A change in V_o/V_i from 1 to 10, 10 to 100, or 100 to 1000 results in the same 20-dB change in level. When $V_o = V_i$, $V_o/V_i = 1$ and the dB level is 0. At a very high gain of 1000, the dB level is 60, while at the much higher gain of 10,000, the dB level is 80 dB, an increase of only 20 dB—a result of the logarithmic relationship. Table 11.2 clearly reveals that voltage gains of 50 dB or higher should immediately be recognized as being quite high.

TABLE 11.2

Voltage Gain, V_o/V_i	dB Level
0.5	-6
0.707	-3
1	0
2	6
10	20
40	32
100	40
1000	60
10,000	80
etc.	

ตัวอย่างที่ 1

Find the magnitude gain corresponding to a decibel gain of 100.

Solution

By Eq. (11.10),

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 100 \text{ dB} \rightarrow \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10$$

so that

$$\frac{P_2}{P_1} = 10^{10} = 10,000,000,000$$

This example clearly demonstrates the range of decibel values to be expected from practical devices. Certainly, a future calculation giving a decibel result in the neighborhood of 100 should be questioned immediately.

ตัวอย่างที่ 2

The input power to a device is 10,000 W at a voltage of 1000 V. The output power is 500 W, while the output impedance is 20 Ω .

- Find the power gain in decibels.
- Find the voltage gain in decibels.
- Explain why parts (a) and (b) agree or disagree.

Solution

$$\begin{aligned} \text{(a) } G_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \frac{P_o}{P_i} = 10 \log_{10} \frac{500 \text{ W}}{10 \text{ kW}} = 10 \log_{10} \frac{1}{20} = -10 \log_{10} 20 \\ &= -10(1.301) = \mathbf{-13.01 \text{ dB}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } G_v &= 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{PR}}{1000} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{(500 \text{ W})(20 \Omega)}}{1000 \text{ V}} \\ &= 20 \log_{10} \frac{100}{1000} = 20 \log_{10} \frac{1}{10} = -20 \log_{10} 10 = \mathbf{-20 \text{ dB}} \end{aligned}$$

$$\text{(c) } R_i = \frac{V_i^2}{P_i} = \frac{(1 \text{ kV})^2}{10 \text{ kW}} = \frac{10^6}{10^4} = \mathbf{100 \Omega} \neq R_o = \mathbf{20 \Omega}$$

ตัวอย่างที่ 3

An amplifier rated at 40-W output is connected to a 10- Ω speaker.

- Calculate the input power required for full power output if the power gain is 25 dB.
- Calculate the input voltage for rated output if the amplifier voltage gain is 40 dB.

Solution

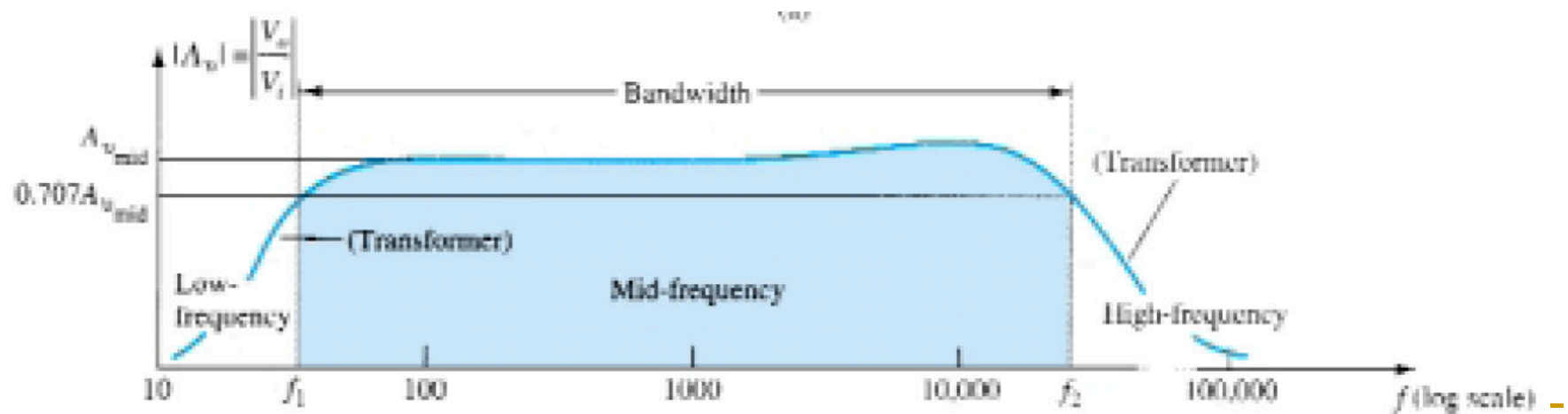
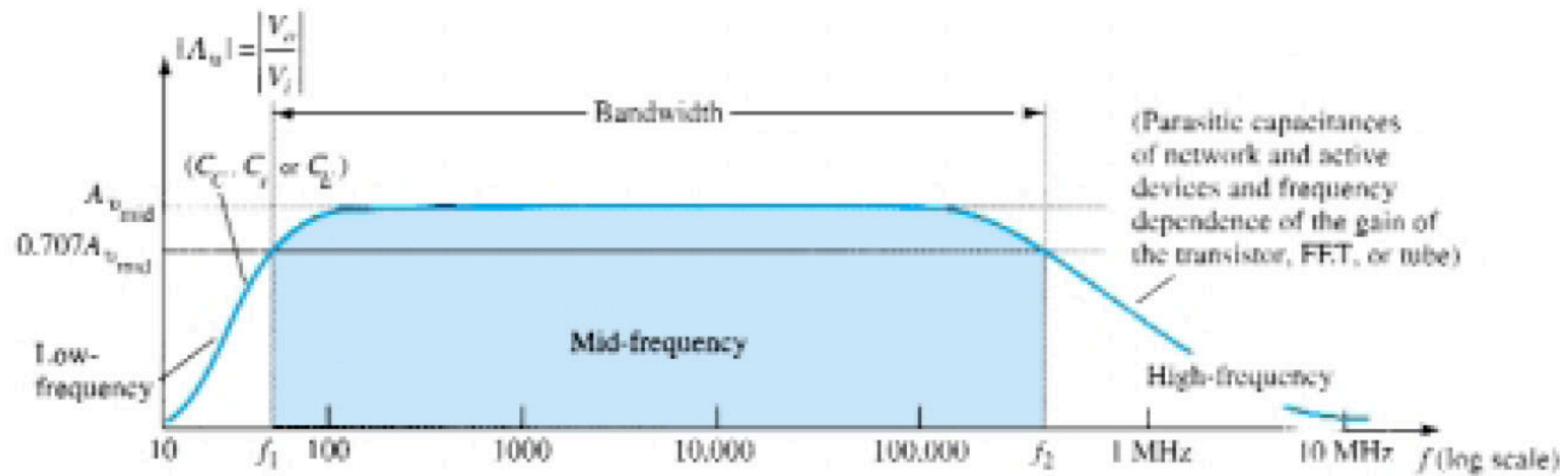
$$\begin{aligned} \text{(a) Eq. (11.10): } 25 &= 10 \log_{10} \frac{40 \text{ W}}{P_i} \Rightarrow P_i = \frac{40 \text{ W}}{\text{antilog}(2.5)} = \frac{40 \text{ W}}{3.16 \times 10^2} \\ &= \frac{40 \text{ W}}{316} \cong \mathbf{126.5 \text{ mW}} \end{aligned}$$

$$\text{(b) } G_v = 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i} \Rightarrow 40 = 20 \log_{10} \frac{V_o}{V_i}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \text{antilog } 2 = 100$$

$$V_o = \sqrt{PR} = \sqrt{(40 \text{ W})(10 \text{ V})} = 20 \text{ V}$$

$$V_i = \frac{V_o}{100} = \frac{20 \text{ V}}{100} = 0.2 \text{ V} = \mathbf{200 \text{ mV}}$$



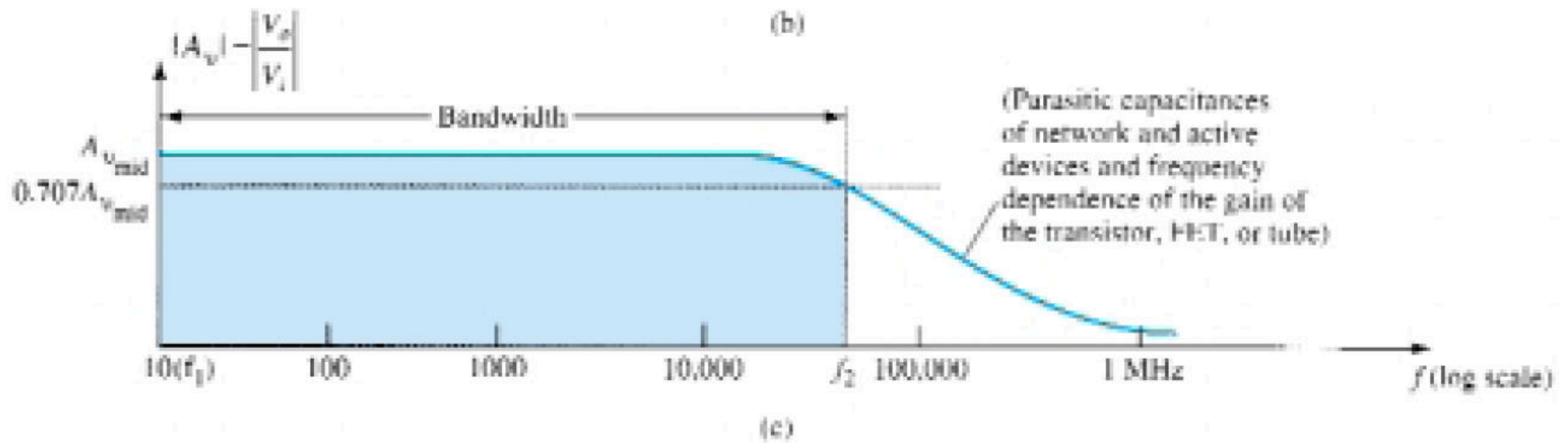


Figure 11.4 Gain versus frequency: (a) RC-coupled amplifiers; (b) transformer-coupled amplifiers; (c) direct-coupled amplifiers.

For each system of Fig. 11.4, there is a band of frequencies in which the magnitude of the gain is either equal or relatively close to the midband value. To fix the frequency boundaries of relatively high gain, $0.707A_{v_{\text{mid}}}$ was chosen to be the gain at the cutoff levels. The corresponding frequencies f_1 and f_2 are generally called the *corner*, *cutoff*, *band*, *break*, or *half-power frequencies*. The multiplier 0.707 was chosen because at this level the output power is half the midband power output, that is, at midfrequencies,

$$P_{o_{\text{mid}}} = \frac{|V_o^2|}{R_o} = \frac{|A_{v_{\text{mid}}}V_i|^2}{R_o}$$

and at the half-power frequencies,

$$P_{o_{\text{HPF}}} = \frac{|0.707A_{v_{\text{mid}}}V_i|^2}{R_o} = 0.5 \frac{|A_{v_{\text{mid}}}V_i|^2}{R_o}$$

and

$$P_{o_{HPF}} = 0.5P_{o_{mid}} \quad (11.16)$$

The bandwidth (or passband) of each system is determined by f_1 and f_2 , that is,

$$\text{bandwidth (BW)} = f_2 - f_1 \quad (11.17)$$

For applications of a communications nature (audio, video), a decibel plot of the voltage gain versus frequency is more useful than that appearing in Fig. 11.4. Before obtaining the logarithmic plot, however, the curve is generally normalized as shown in Fig. 11.5. In this figure, the gain at each frequency is divided by the midband value. Obviously, the midband value is then 1 as indicated. At the half-power frequencies, the resulting level is $0.707 = 1/\sqrt{2}$. A decibel plot can now be obtained by applying Eq. (11.12) in the following manner:

$$\frac{A_v}{A_{v_{mid}}}|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{A_v}{A_{v_{mid}}} \quad (11.18)$$

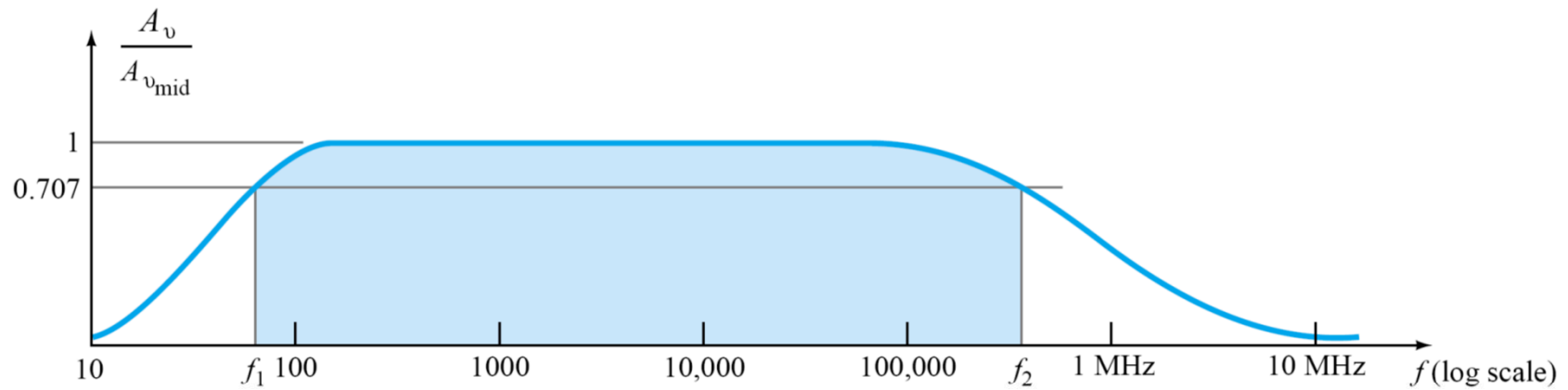


Figure 11.5 Normalized gain versus frequency plot.

At midband frequencies, $20 \log_{10} 1 = 0$, and at the cutoff frequencies, $20 \log_{10} 1/\sqrt{2} = -3$ dB. Both values are clearly indicated in the resulting decibel plot of Fig. 11.6. The smaller the fraction ratio, the more negative the decibel level.

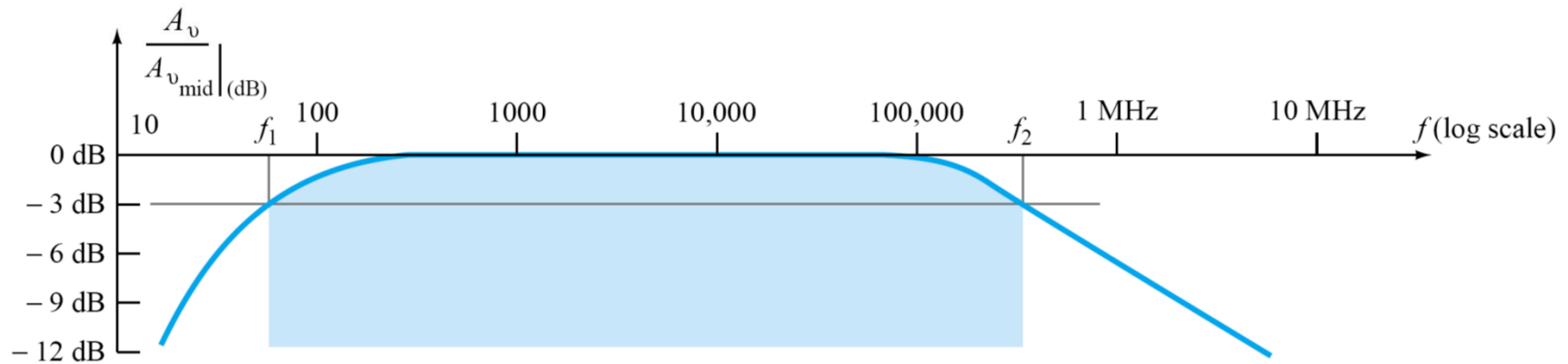
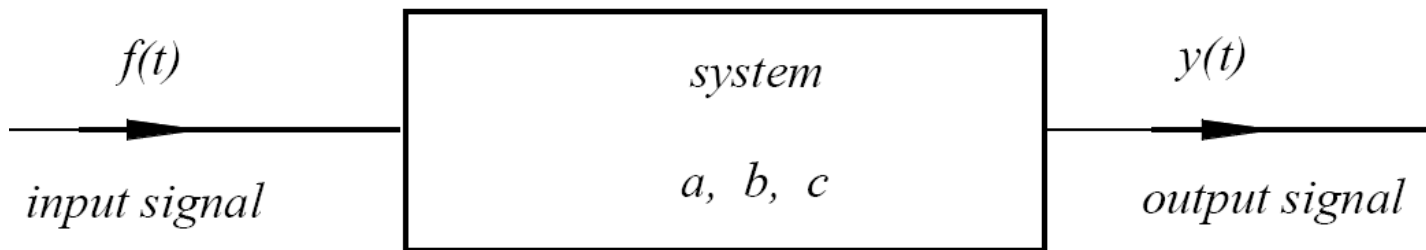


Figure 11.6 Decibel plot of the normalized gain versus frequency plot of Fig. 11.5.

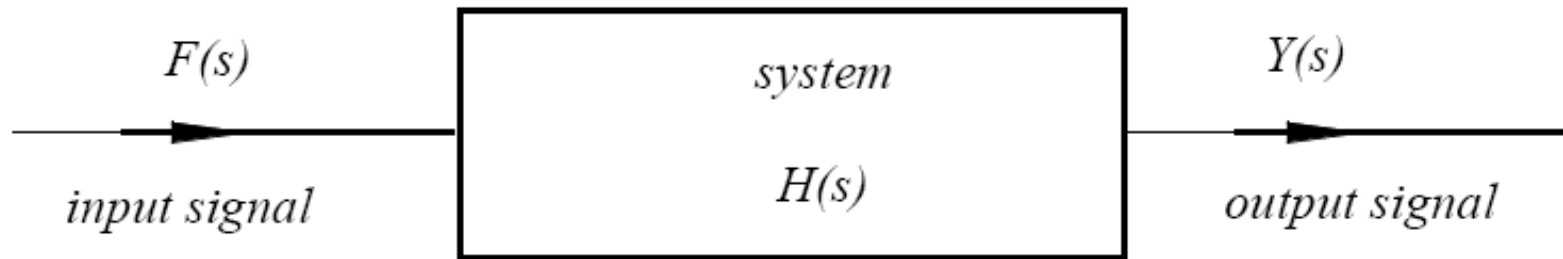
Linear system

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$



10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลการตอบสนองทางความถี่

- s-Domain analysis Poles, Zeros and Bode Plots



$$T(s) = A_o \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{\omega_{pn}}\right)}$$

10.3 Bode Plots

- Bode plot คือ การพล็อตกราฟเซมิล็อกของอัตราขยายมีหน่วยเป็นเดซิเบล และเฟสที่อยู่ในหน่วยดีกรีของฟังก์ชันถ่ายโอนเทียบกับความถี่
- เราสามารถเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$T(s) = T \angle \phi = T e^{j\phi}$$



$$T_{dB} = 20 \log T(s)$$

ตารางที่ 10.3-1 แสดงตารางแปลงค่าขนาดเป็นเดซิเบล

Magnitude, T	$20 \log T$ (dB)	Magnitude, T	$20 \log T$ (dB)
0.001	-60	$\sqrt{2}$	3
0.01	-40	2	6
0.1	-20	10	20
0.5	-6	20	26
$1/\sqrt{2}$	-3	100	40
1.0	0	1,000	60

Gain and phase of transfer function

$$T(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\text{gain} = |T(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|}$$

$$\text{phase} = \angle T(\omega) = \angle Y(\omega) - \angle X(\omega)$$

Ex1 จงหาค่า gain และ phase ของ transfer function

$$T(\omega) = \frac{-10}{1 + (j\omega / 10,000)}$$

sol

$$gain = |T(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega / 10^4)^2}}$$

$$phase = \angle T(\omega) = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega / 10^4)$$

เราสามารถพล็อตกราฟโบเดได้จากสมการ

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \angle \tan^{-1}(\omega/\omega_0) = T \angle \phi$$

ω_0 is called the half-power frequency

อัตราขยายที่อยู่ในหน่วยเดซิเบลมีค่าเท่ากับ

$$T(dB) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$= 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} = -20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

$$T(dB) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} = -20 \log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

ในกรณีที่เรากำลังพิจารณาที่ความถี่ต่ำ $\omega \ll \omega_0$

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong 1$$

ดังนั้น อัตราขยายที่อยู่ในหน่วยเดซิเบลมีค่าประมาณเท่ากับ

$$T(dB) = -20 \log \sqrt{1} = 0dB$$

$$T(dB) = 20\log 1 - 20\log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} = -20\log \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}$$

ในกรณีที่เรากำลังพิจารณาที่ความถี่สูง $\omega \gg \omega_0$

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong (\omega/\omega_0)^2$$

10.3.1 Magnitude plot

สมการฟังก์ชันถ่ายโอนในที่อยู่ในโดเมนของ s สามารถเขียนอยู่ในเทอมของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1} (1 + j\omega/z_1) [1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2] \cdots}{(1 + j\omega/p_1) [1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2] \cdots} \quad (10.11)$$

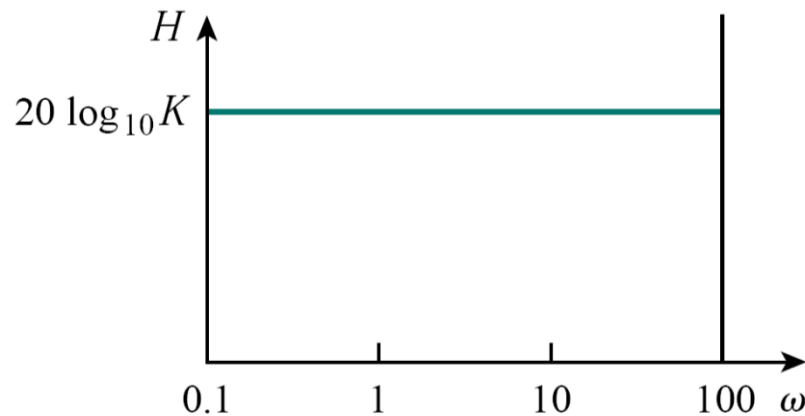
จากสมการที่ 10.11 เราสามารถหาค่าอัตราขยาย, โพล และซีโรได้ ได้ดังนี้

1. K คือ อัตราขยาย
2. ตำแหน่งของโพล $(j\omega)^{-1}$ หรือซีโร $(j\omega)$ อยู่ที่จุดกำเนิด
3. $1/[1 + (j\omega/p_1)]$ คือ รูปแบบทั่วไปของโพล และ $[1 + (j\omega/z_1)]$ คือ รูปแบบทั่วไปของซีโร
4. $1/[1 + (j2\zeta_2\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_k)^2]$ คือสมการกำลังสองของโพล และ $[1 + (j2\zeta_1\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_k)^2]$ คือสมการกำลังสองของซีโร

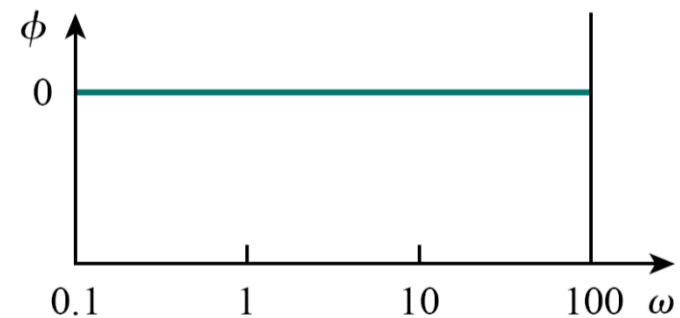
ในการวาดกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนจะเริ่มจากการแยกวาดกราฟตัวประกอบของฟังก์ชันถ่ายโอนแต่ละค่าแล้วนำกราฟแต่ละกราฟมารวมกัน ซึ่งตัวประกอบของฟังก์ชันถ่ายโอนจะประกอบด้วย

1. ค่าคงที่ (constant term)

ในการวาดขนาดและเฟสของอัตราขยาย (K) เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ $20\log K$ และมีค่าเฟสเท่ากับ 0° ในรูปที่ 10.4 แสดงกราฟขนาด และเฟส ซึ่งมีค่าคงที่ทุกความถี่ ถ้าอัตราขยายมีค่าเป็นลบขนาดของอัตราขยายมีค่าเท่ากับ $20\log|K|$ และมีค่าเฟสเท่ากับ $\pm 180^\circ$



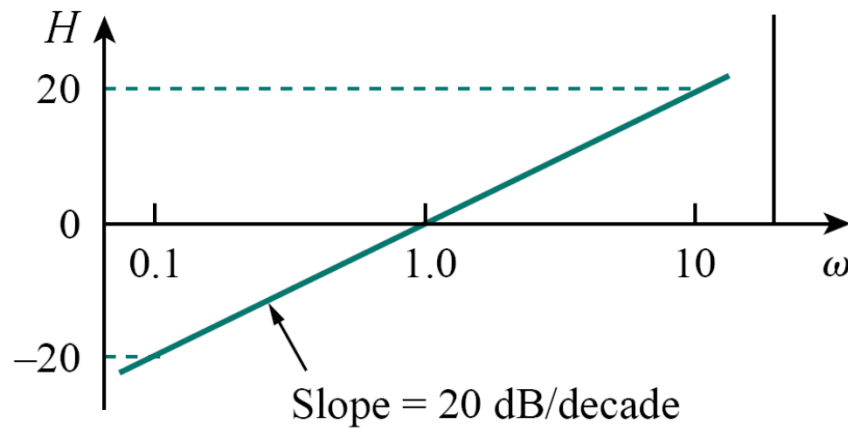
(a)



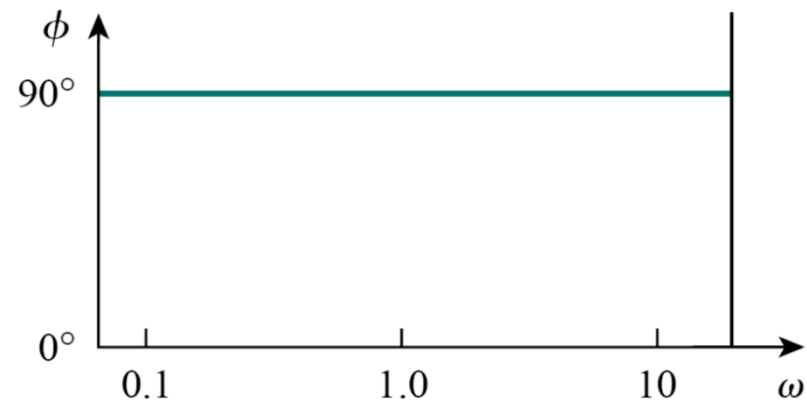
(b)

2. โพลและซีโรที่จุดศูนย์กลาง

ในการวาดขนาดและเฟสของซีโร ($j\omega$) เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ $20\log j\omega$ และมีค่าเฟสเท่ากับ 90° ในรูปที่ 10.5 แสดงกราฟขนาด และเฟส ซึ่งความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ 20dB/decade ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่ การวาดขนาดและเฟสของโพล $(j\omega)^{-1}$ ความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ -20dB/decade ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่เท่ากับ -90° และสำหรับค่าการวาดกราฟ $(j\omega)^N$ เมื่อ N คือจำนวนเต็ม ความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ $20N\text{dB/decade}$ ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่เท่ากับ $90N^\circ$



(a)



(b)

3. สมการโพลและซีโรรูปทั่วไป

ในการวัดขนาดและเฟสของซีโร $[1 + (j\omega/z_1)]$ เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ $20\log[1 + (j\omega/z_1)]$ และมีค่าเฟสเท่ากับ $\tan^{-1}(\omega/z_1)$ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากสมการ 10.12 มีค่าเท่ากับ

$$T_{dB} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{z_1} \right| \quad (10.12)$$

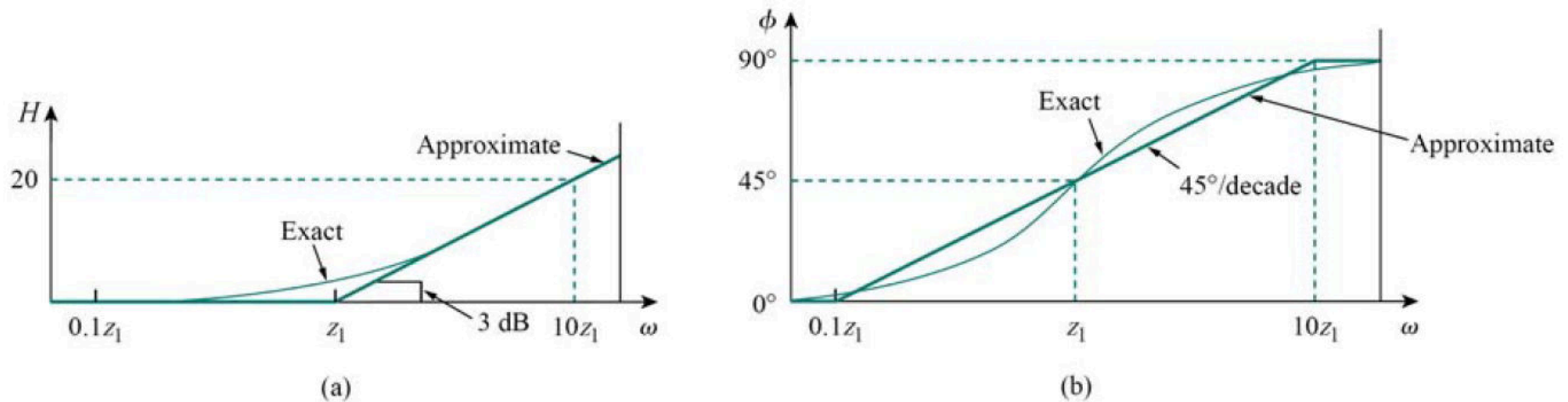
เมื่อ $\omega = 0$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = 20\log 1 = 0$ และ เมื่อ $\omega = \infty$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ

$$T_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{z_1}$$

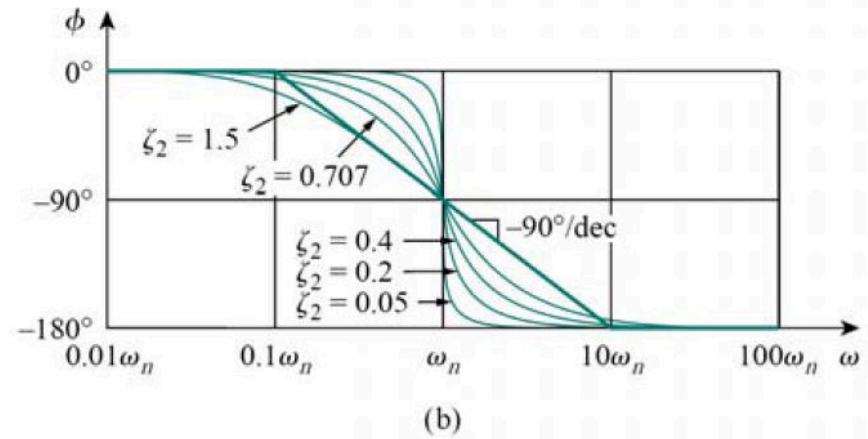
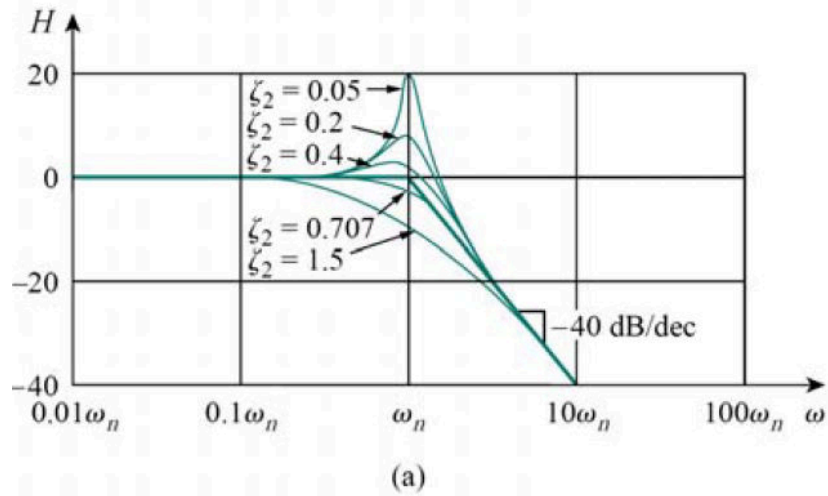
เราสามารถวาดกราฟขนาดของสมการด้วยการประมาณค่าได้ เนื่องจากค่าขณะที่ ω มีค่าน้อยขนาดของสมการมีค่าเท่าศูนย์ และมีลักษณะเป็นเส้นตรงเมื่อ ω มีค่ามาก ๆ ซึ่งความชันของกราฟมีค่าเท่ากับ 20dB/decade กรณีที่ความถี่ $\omega = z_1$ เกิดการเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นอซิลโทรป เราจะเรียกว่าความถี่มุม ในรูปที่ 10.6 (a) แสดงกราฟเส้นตรงของขนาดด้วยการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง ซึ่งค่าประมาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงความจริงมาก และมีค่าเบี่ยงเบนเท่ากับ $20 \log|1 + j| = 20 \log \sqrt{2} = 3\text{dB}$ ค่าเฟสของฟังก์ชันถ่ายโอนแต่ละความถี่มีค่าเท่ากับ

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{z_1} \right) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ 45^\circ, & \omega = z_1 \\ 90^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad (10.13)$$

เนื่องจากกราฟโบเดเป็นการประมาณค่า ดังนั้น เราสามารถประมาณค่า $\phi \approx 0$ เมื่อ $\omega \leq z_1/10$, $\phi \approx 45^\circ$ เมื่อ $\omega = z_1$, และ $\phi \approx 90^\circ$ เมื่อ $\omega \geq 10z_1$ รูปที่ 10.6 (b) แสดงลักษณะของกราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง ซึ่งมีความชันเท่ากับ 45 deg/decade รูปที่ 10.6 แสดงกราฟขนาด และเฟสของโพลของสมการ $1/[1 + (j\omega/p_1)]$ ซึ่งความถี่มุมของสมการคือ $\omega = p_1$ และความชันของกราฟขนาดมีค่าเท่ากับ -20dB/decade และเฟสมีความชันเท่ากับ -45 deg/decade



รูปที่ 10.6 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot



รูปที่ 10.7 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

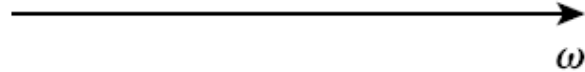
Factor

Magnitude

Phase

K

$$20 \log_{10} K$$



ω

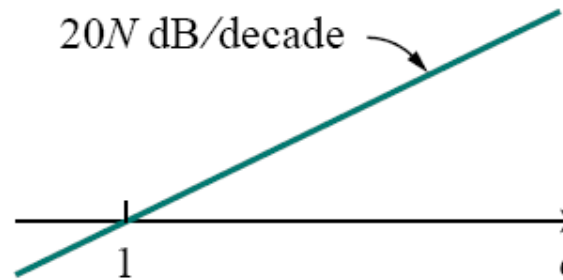
0°



ω

$(j\omega)^N$

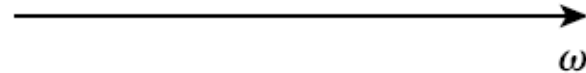
$20N \text{ dB/decade}$



1

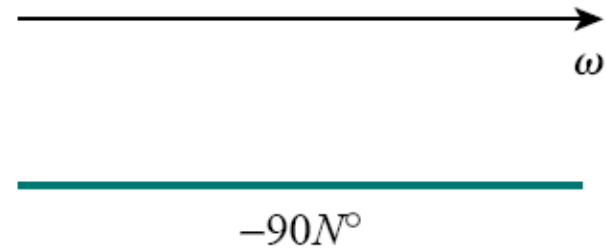
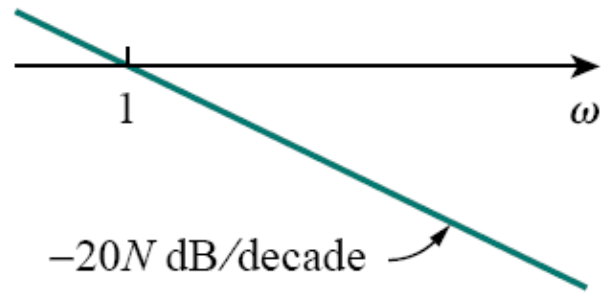
ω

$90N^\circ$

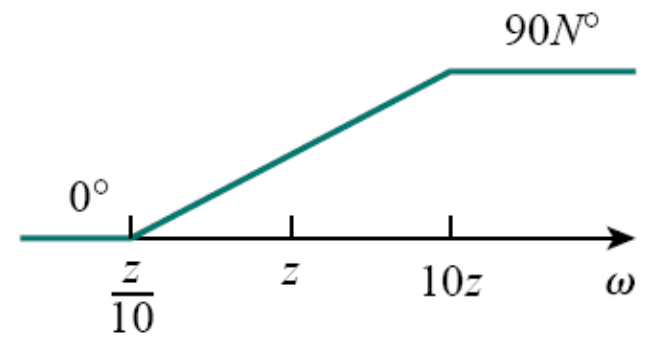
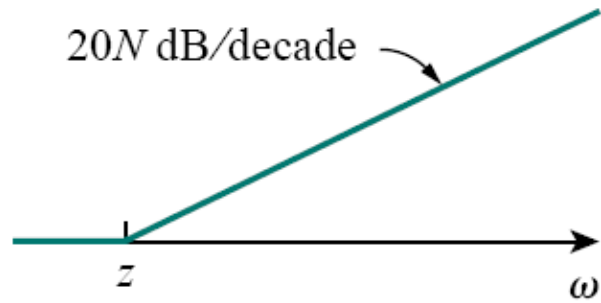


ω

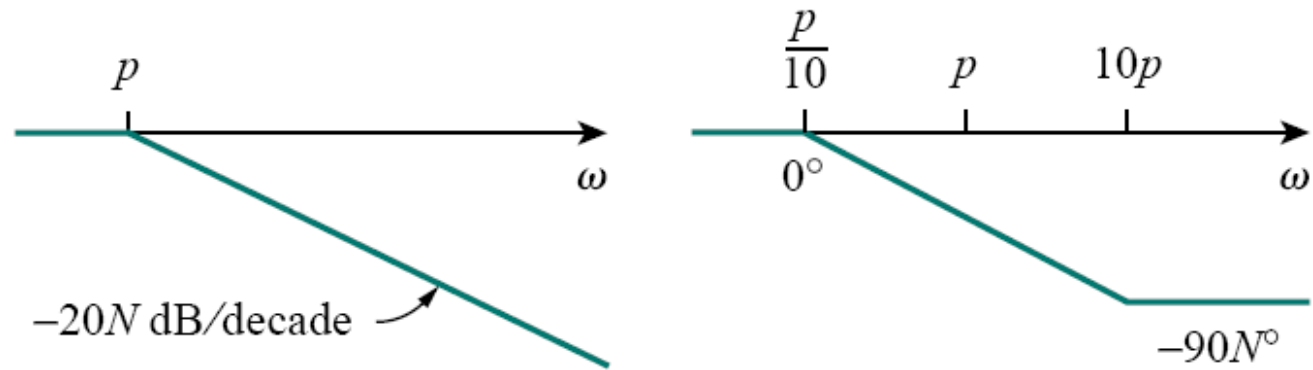
$$\frac{1}{(j\omega)^N}$$



$$\left(1 + \frac{j\omega}{z}\right)^N$$



$$\frac{1}{(1 + j\omega/p)^N}$$

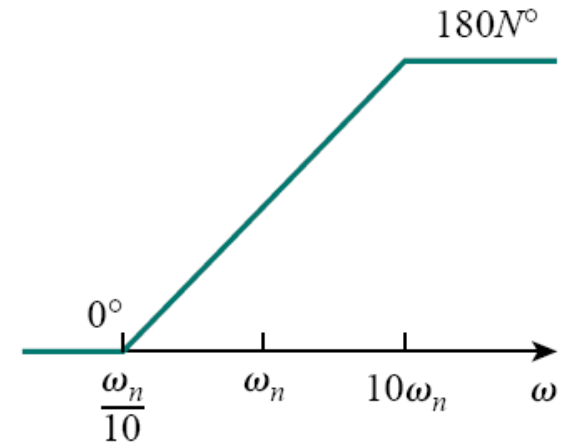
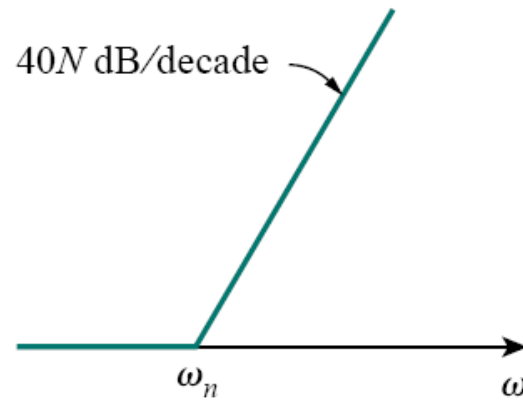


Factor

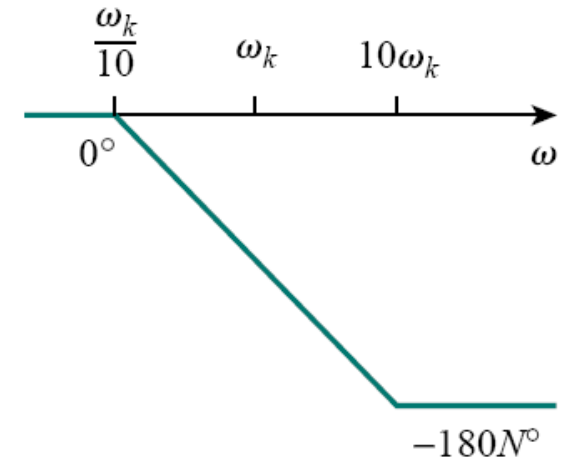
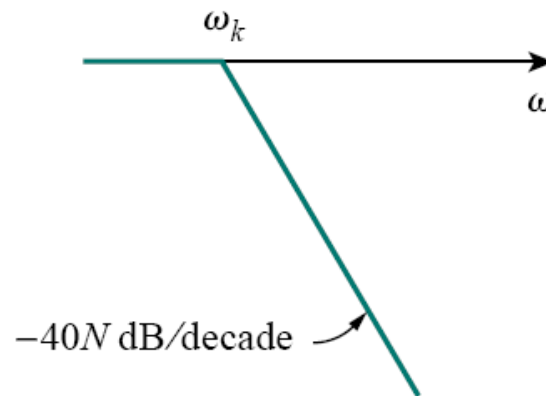
Magnitude

Phase

$$\left[1 + \frac{2j\omega\zeta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^N$$

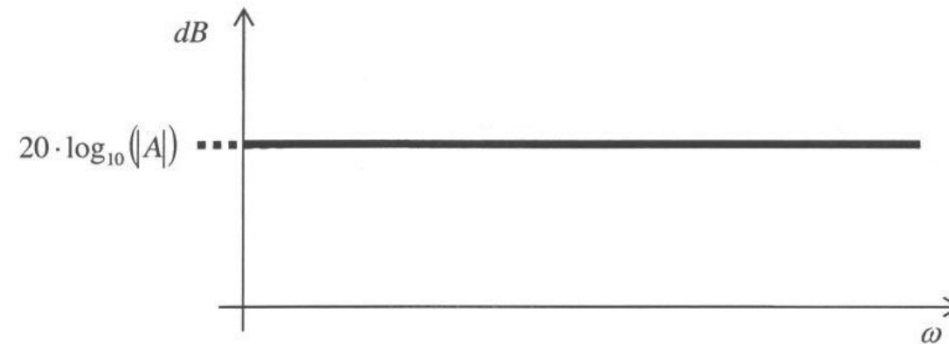


$$\frac{1}{[1 + 2j\omega\zeta/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2]^N}$$



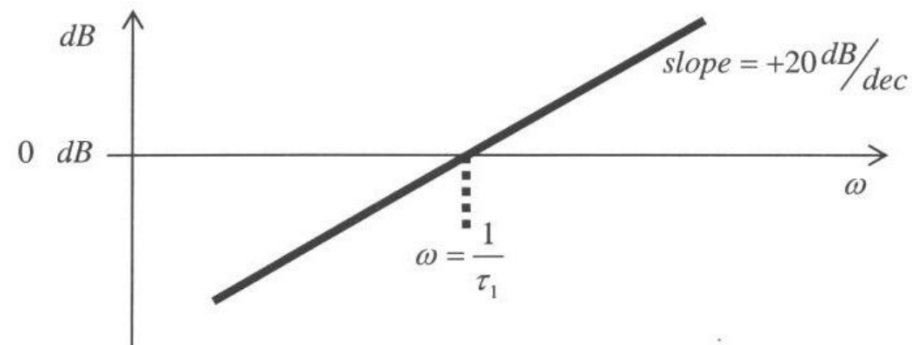
Bode magnitude plots

1. $20 \cdot \log_{10}(|A|)$, where A is a real number



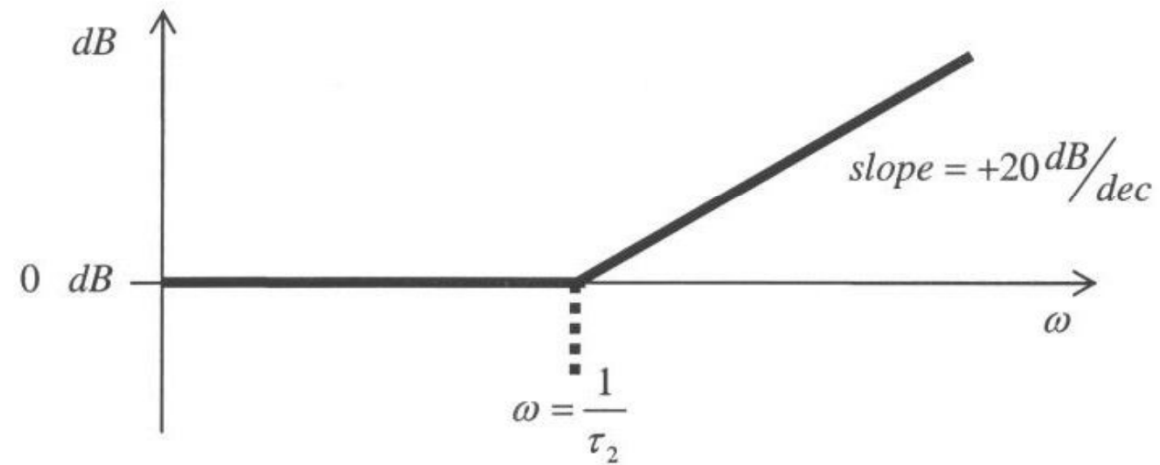
รูปที่ 10.8 Bode plot of magnitude plot

2. $20 \cdot \log_{10}(j \cdot \omega \cdot \tau_1)$, where τ_1 is a real number



รูปที่ 10.9 Bode plot of phase plot

3. $20 \cdot \log_{10}(|(1 \pm j \cdot \omega \cdot \tau_2)|)$, where τ_2 is a real number



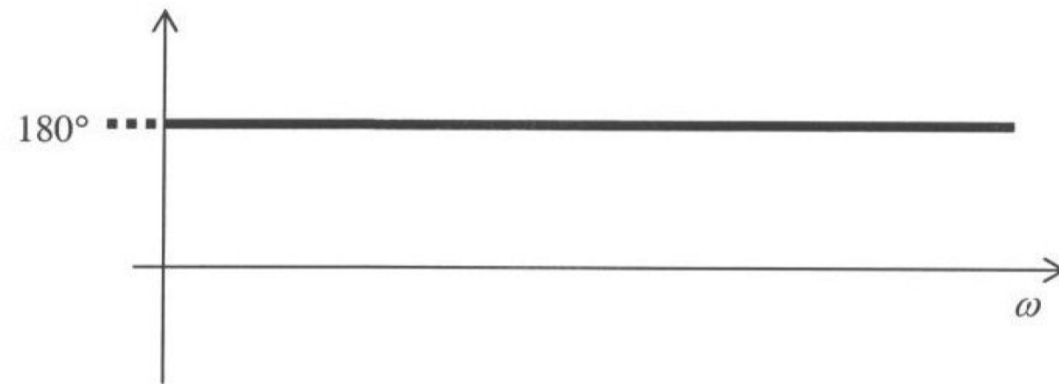
รูปที่ 10.10 Bode plot of magnitude plot

1. $\angle A$, where A is a positive real number



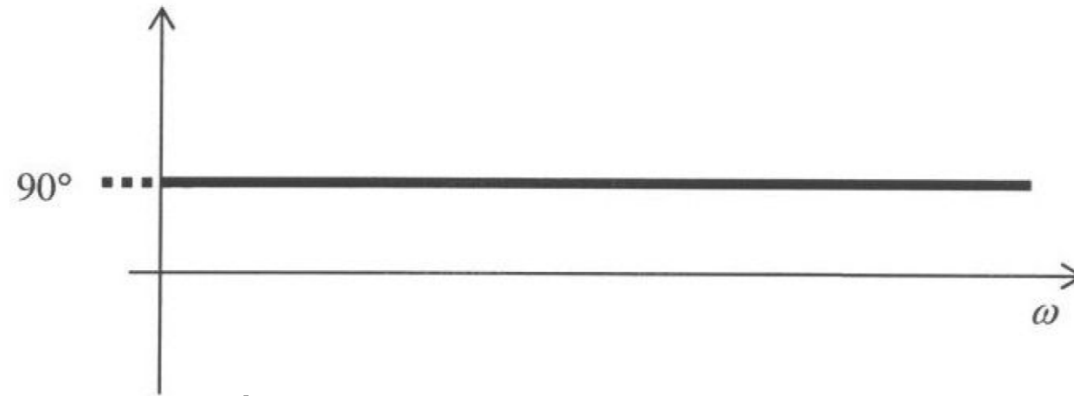
รูปที่ 10.11 Bode plot of phase plot

2. $\angle B$, where B is a negative real number



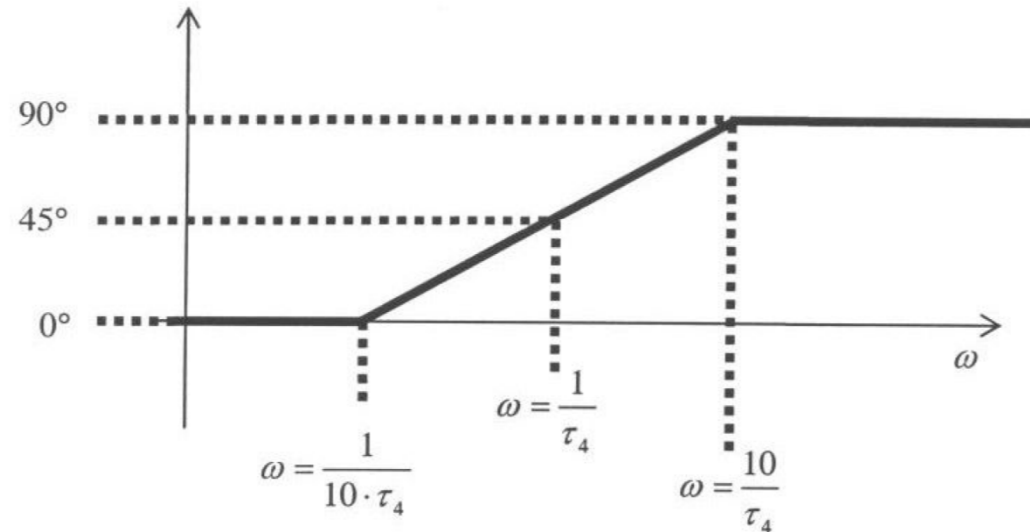
รูปที่ 10.12 Bode plot of phase plot

3. $\angle (j \cdot \omega \cdot \tau_3)$, where τ_3 is a real number



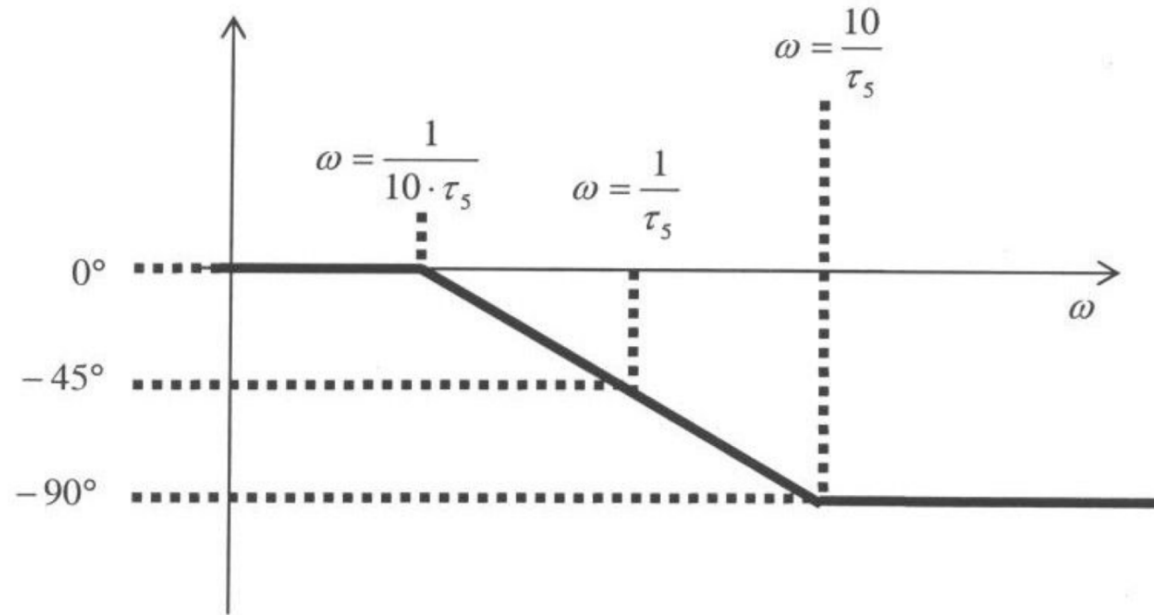
รูปที่ 10.13 Bode plot of phase plot

4. $\angle (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_4)$, where τ_4 is a real number



รูปที่ 10.14 Bode plot of phase plot

5. $\angle (1 - j \cdot \omega \cdot \tau_s)$, where τ_s is a real number



รูปที่ 10.15 Bode plot of phase

สมการโพลและซีโรที่ยกกำลังสอง

ขนาดของสมการ $1/[1 + (j2\zeta_2\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$ ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเท่ากับ

$$T_{dB} = -20 \log \left| 1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| \quad (10.14)$$

เมื่อ $\omega = 0$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = 20 \log 1 = 0$ และ เมื่อ $\omega = \infty$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ

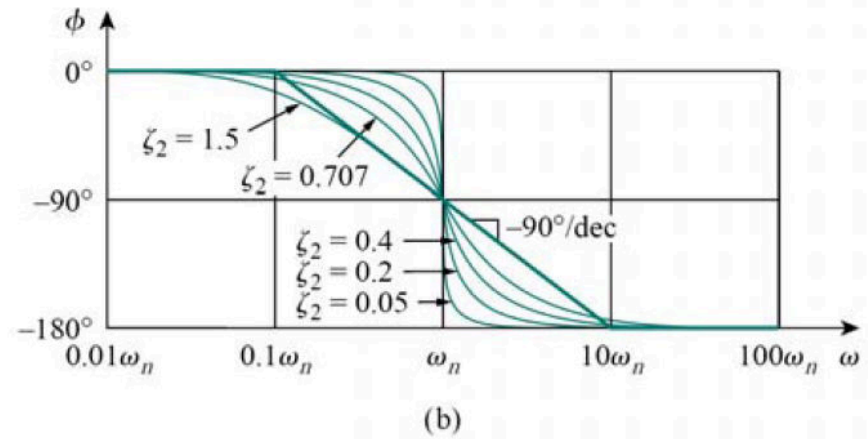
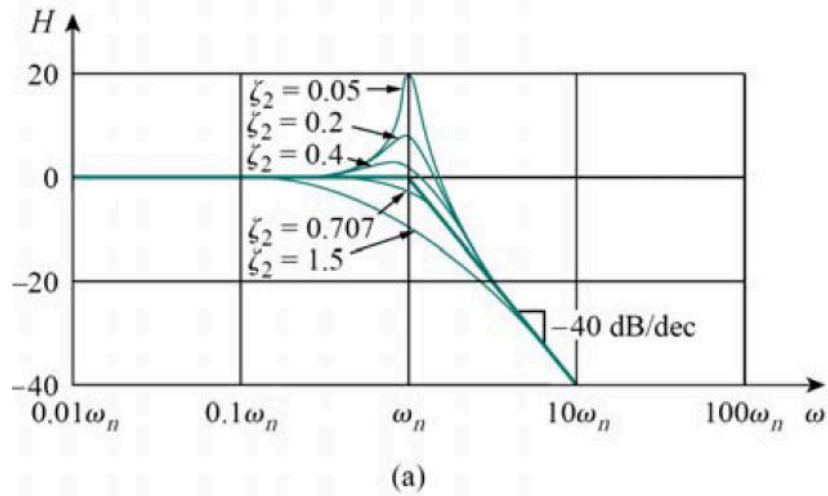
$$T_{dB} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

- กราฟอัตราขยายจะประกอบด้วยเส้นอซีลโทรปสองเส้น คือ
- 1) เมื่อ $\omega < \omega_n$ เส้นที่หนึ่งความชันเท่ากับศูนย์
- 2) เมื่อ $\omega > \omega_n$ ค่าอื่น ๆ ของกราฟมีความชันเท่ากับ -40dB/decade ซึ่ง ω_n คือ ความถี่มุม

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta_2(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

-
- รูปที่ 10.7 (a) แสดงลักษณะของกราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง
 - ค่าของขนาดและเฟสของกราฟที่ได้จากการคำนวณถูกต้องจะขึ้นอยู่กับค่าปัจจัยความหน่วง ζ_2
 - ถ้าออกแบบให้กราฟถูกต้องมากขึ้นค่าพิกในบริเวณใกล้กับความถี่มุมจะถูกเพิ่มขึ้นด้วยการออกแบบค่าปัจจัยความหน่วง ζ_2 ให้เหมาะสม อย่างไรก็ตาม เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาเราจะใช้เส้นกราฟที่จากการประมาณค่า
-

- รูปที่ 10.7 (b) แสดงกราฟเฟสมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 90 deg/decade ซึ่งเริ่มต้นที่ $\omega_n/10$ และสิ้นสุดที่ $10\omega_n$
- ข้อแตกต่างของกราฟอัตราขยายระหว่างเส้นที่ได้จากการคำนวณถูกต้องกับเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าคือค่าความหน่วง
- กราฟเส้นตรงของขนาดและเฟสที่ได้จากการประมาณค่าของสมการ โพลที่ยกกำลังสองคือค่าเดียวกับค่าที่มีสองโพล $[1 + (j\omega/\omega_n)]^2$ อันเนื่องมาจาก เมื่อค่า $\zeta_2 = 1$, $[1 + (j\omega/\omega_n)]^2 = [1 + j2\zeta_2(\omega/\omega_k) + (j\omega/\omega_k)^2]$
- กราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าของสมการ โพลที่ยกกำลังสองสามารถวาดเหมือนกับค่าที่มีสองโพลคือค่าวิกฤต



รูปที่ 10.7 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

-
- กราฟขนาดของสมการซีโรยกกำลังสอง $[1 + j2\zeta_1(\omega/\omega_k) + (j\omega/\omega_k)^2]$ เป็นค่าตรงข้ามกับในรูปที่ 10.7 เพราะกราฟขนาดมีความชัน 40 dB/decade และกราฟเฟสมีความชันเท่ากับ 90 deg/decade
-

ตัวอย่างที่ 10.2 จงพรีอตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{5.82 \times 10^6}{8.1 \times 10^5 + s(4 \times 10^{-5})} \quad (10.16)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.16 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{7.185}{1 + (j\omega/4.938 \times 10^{11})} \quad (10.17)$$

ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

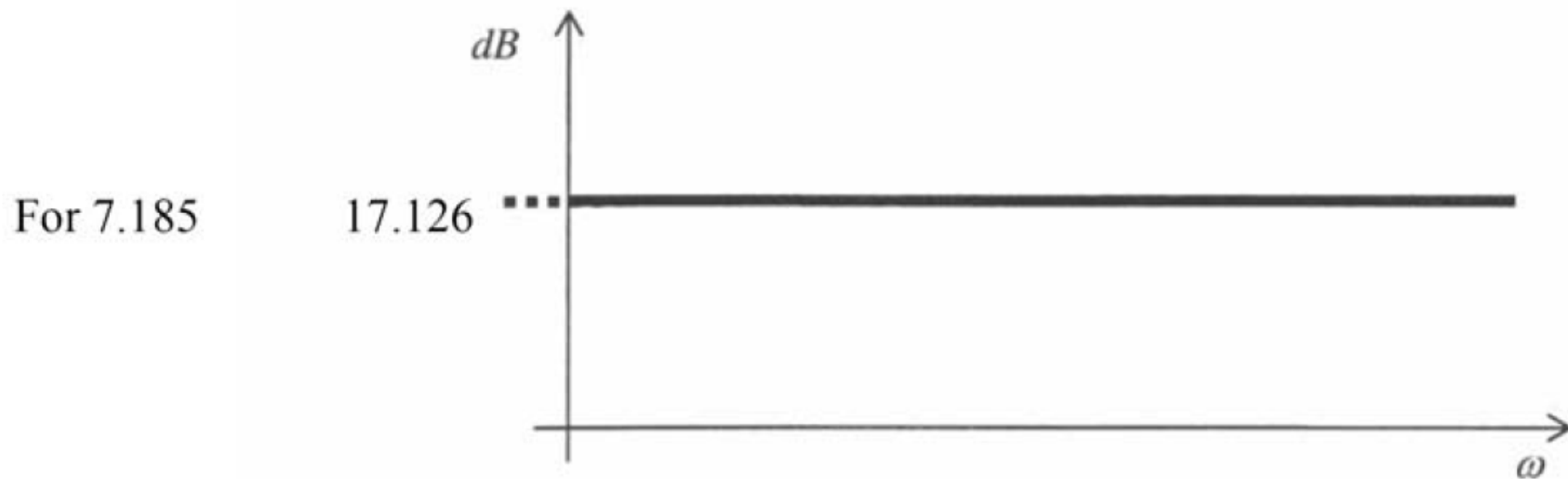
$$T_{dB} = 20 \log 7.185 - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{4.938 \times 10^{11}} \right| \quad (10.18)$$

และ

$$\phi = 0^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{4.938 \times 10^{11}} \quad (10.19)$$

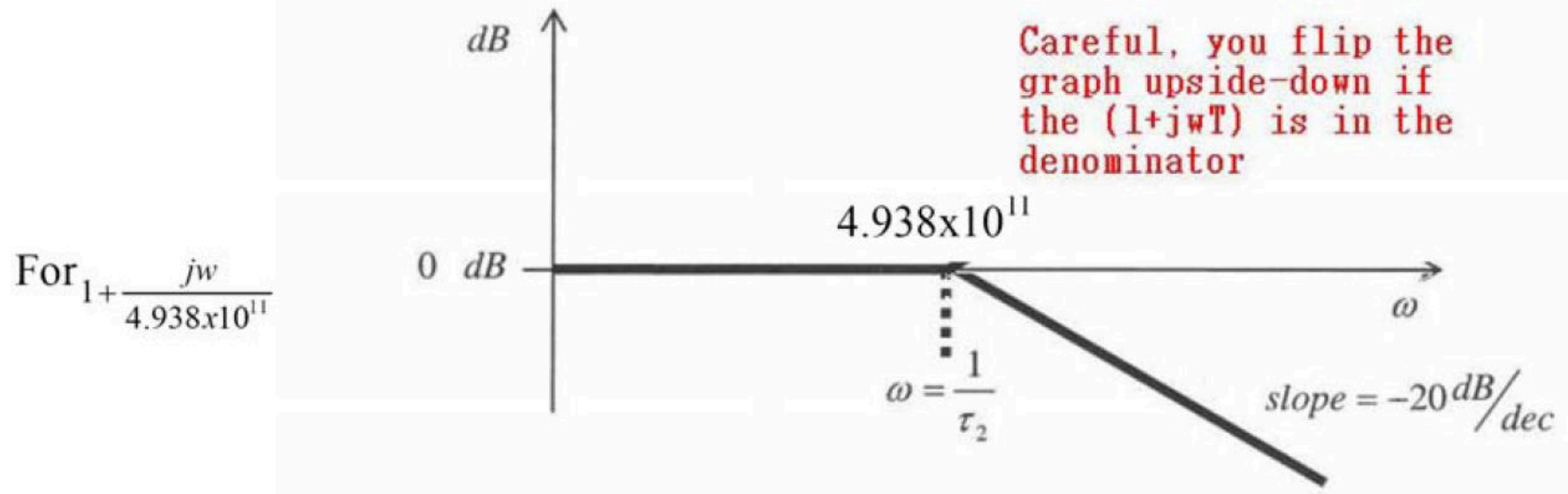
Just adding all the plots. $20 \log(7.185) = 17.126$.

$$20 \cdot \log_{10}(|A|), \text{ where } A \text{ is a real number}$$



รูปที่ 10.16 Magnitude plot

$20 \cdot \log_{10}(|(1 \pm j \cdot \omega \cdot \tau_2)|)$, where τ_2 is a real number



รูปที่ 10.17 Magnitude plot

A, where A is a positive real number

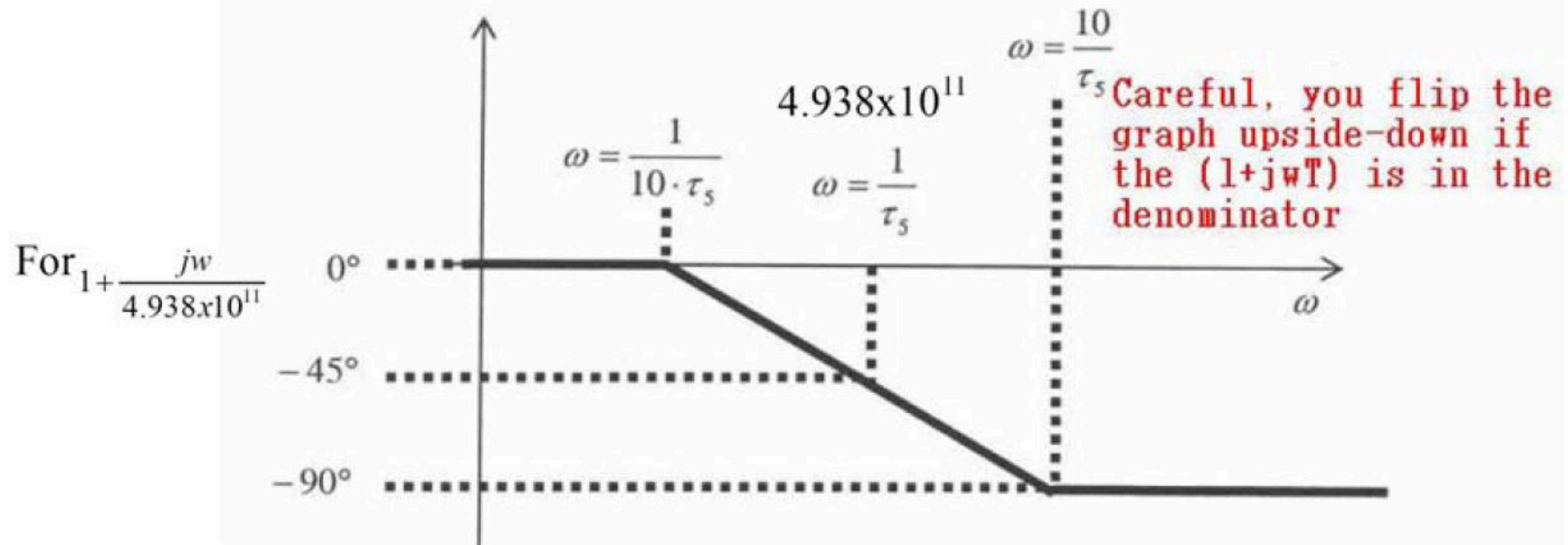
For 7.185



รูปที่ 10.18 Phase plot



$\angle (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_4)$, where τ_4 is a real number



รูปที่ 10.19 Phase plot

ตัวอย่างที่ 10.3 จงพล็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{100s + 100}{0.01s^2 + 0.11s + 10} \quad (10.20)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.20 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{[1 + (j\omega/10)][1 + (j\omega/100)]} \quad (10.21)$$

ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

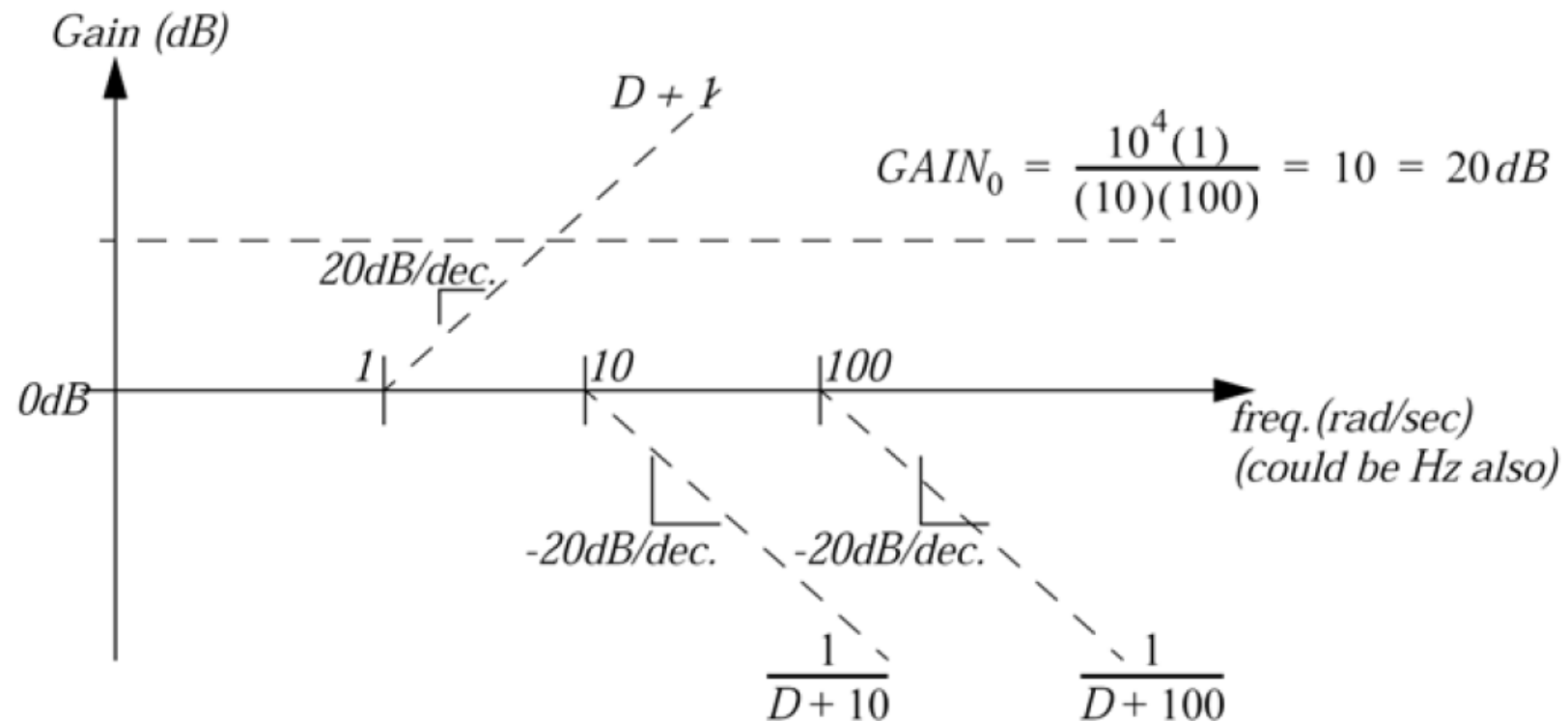
$$T_{dB} = 20 \log 10 + 20 \log |1 + j\omega| - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right| - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{100} \right| \quad (10.22)$$

และ

$$\phi = \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - \tan^{-1} \frac{\omega}{100} \quad (10.23)$$

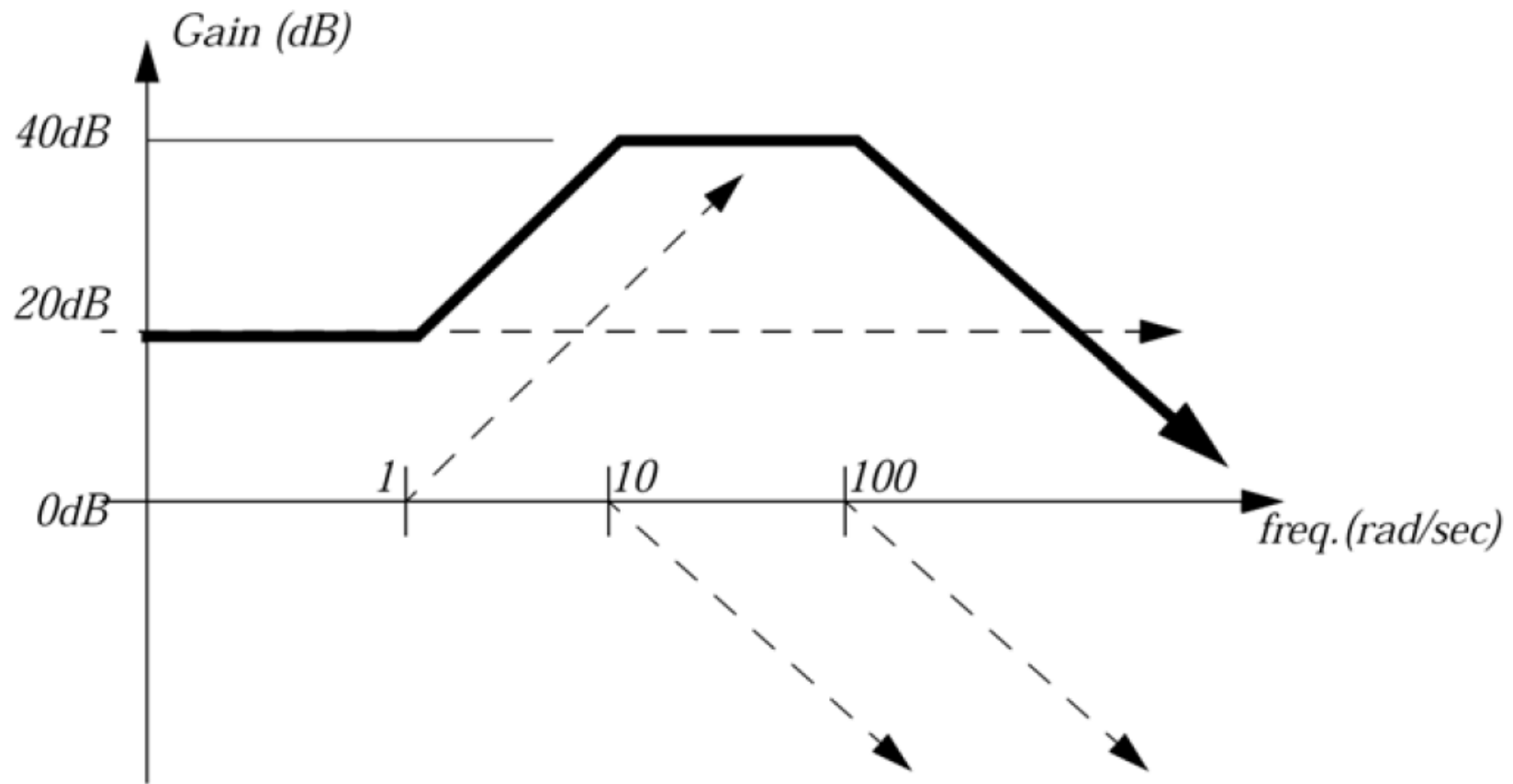
$$G(D) = \frac{100D + 100}{0.01D^2 + 0.11D + 10} = \frac{10^4(D+1)}{(D+10)(D+100)} \quad (\text{the equation is put in root form})$$

Step 1: Draw lines for each of the terms in the transfer function,



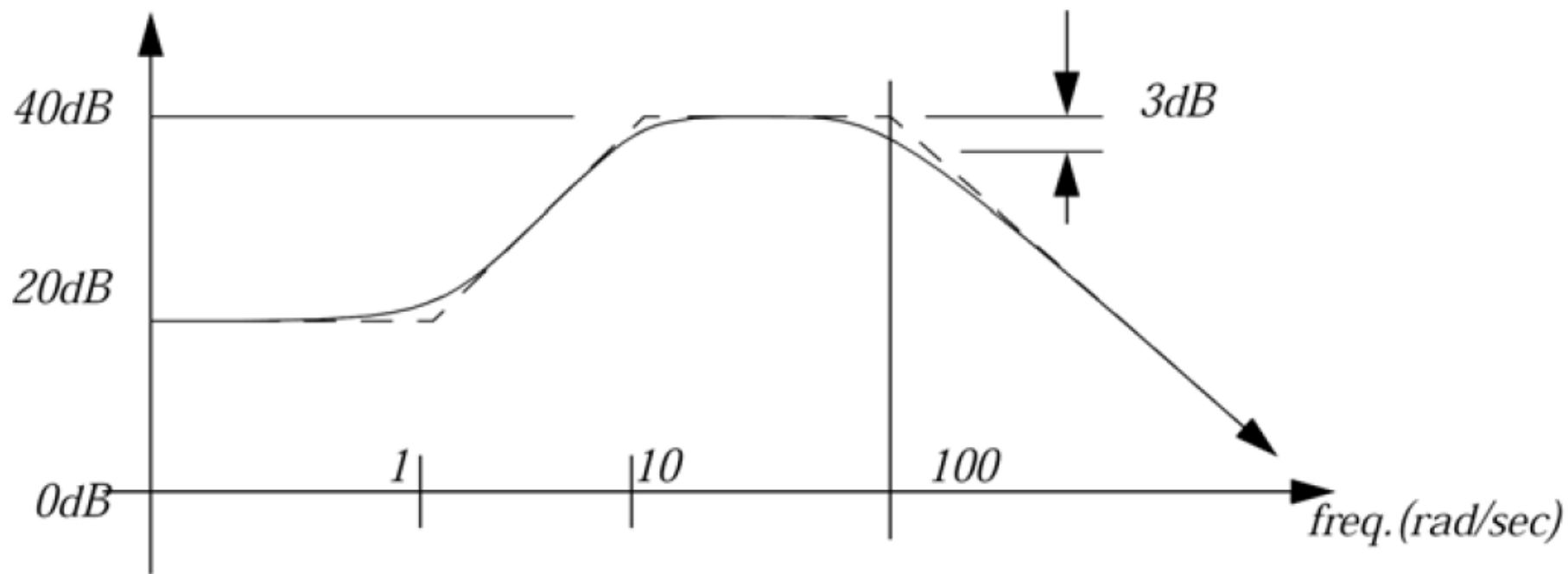
รูปที่ 10.20 Magnitude plot

Step 2: Sum the individual lines, and get the straight line approximation,



รูปที่ 10.21 Magnitude plot

Step 3: Draw the smooth curve (leaving 3dB at the corners),
Gain (dB)

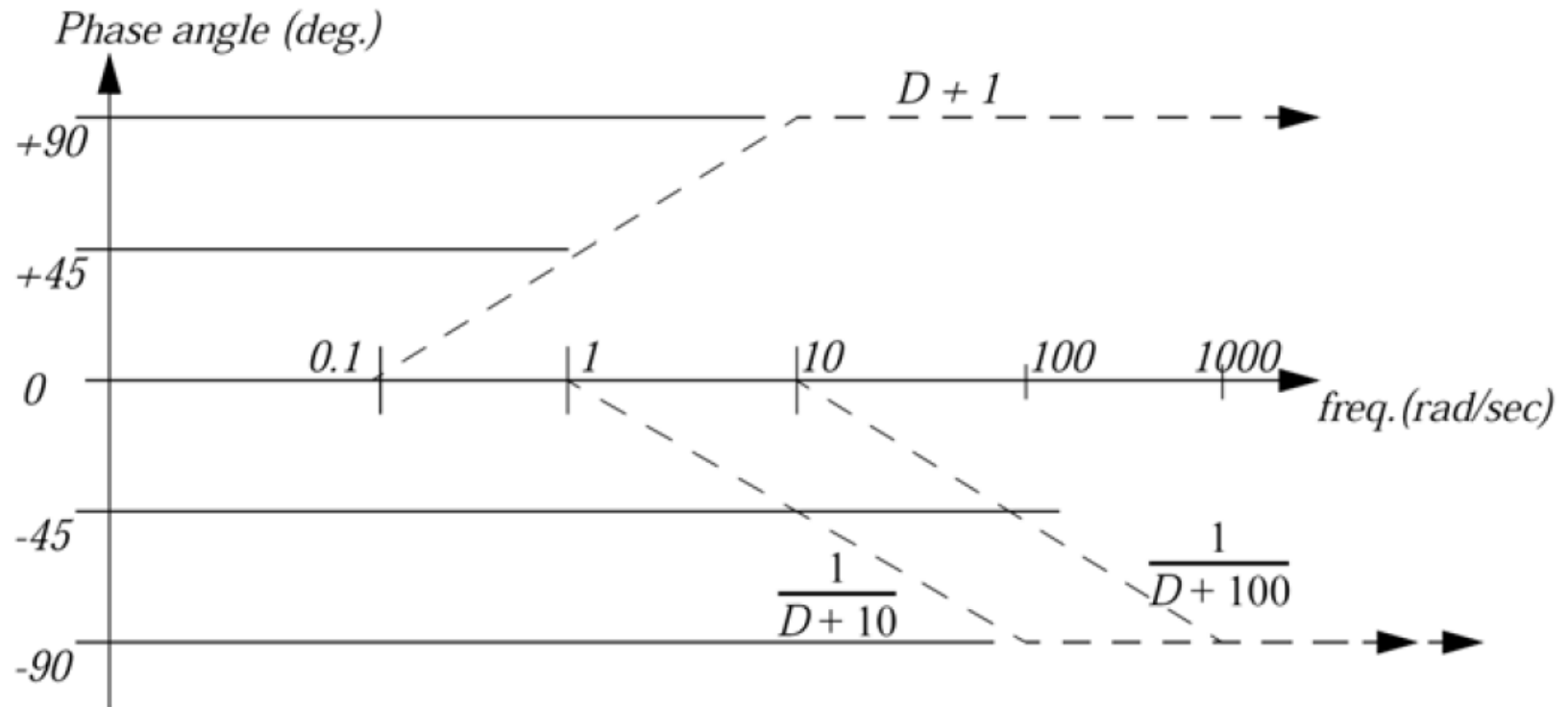


รูปที่ 10.22 Magnitude plot

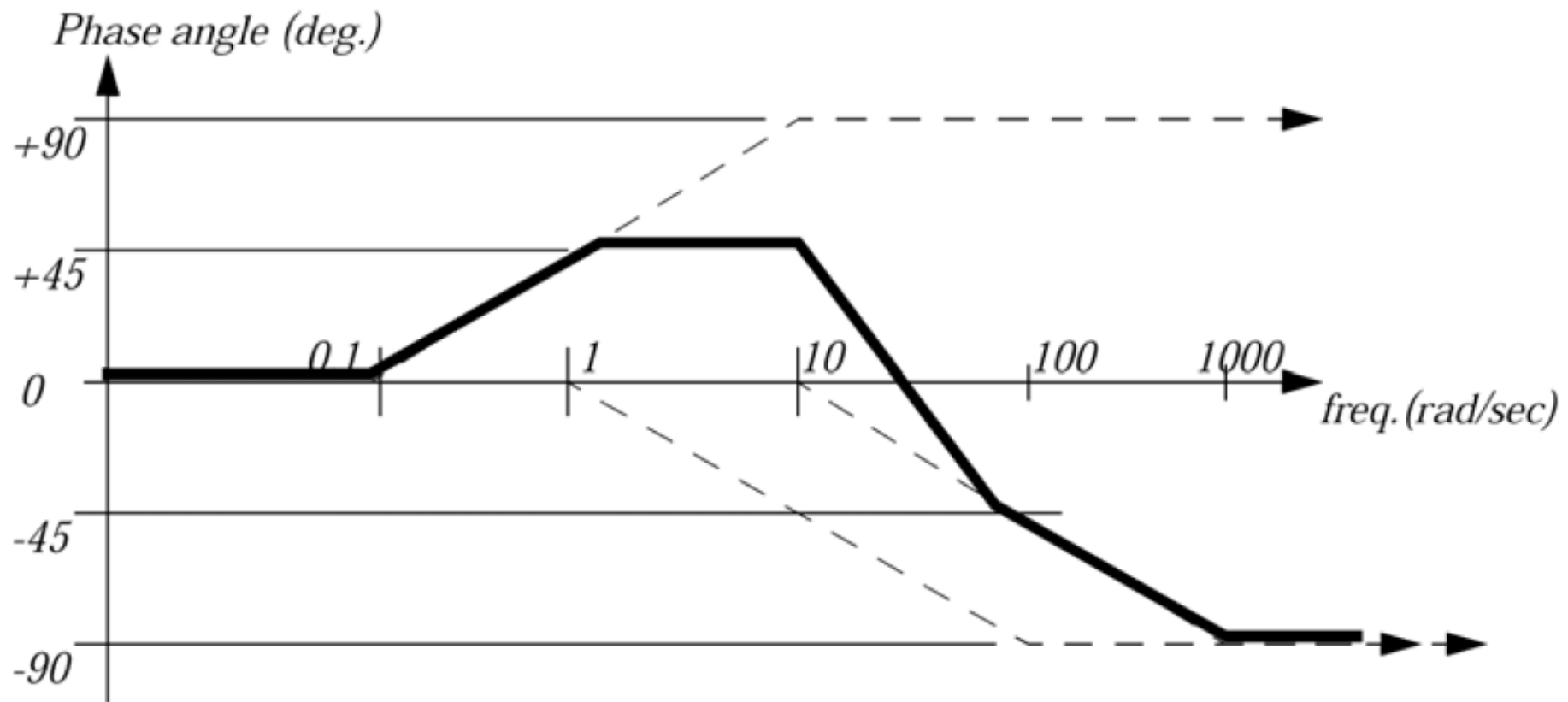
Phase plot

$$G(D) = \frac{10^4(D+1)}{(D+10)(D+100)}$$

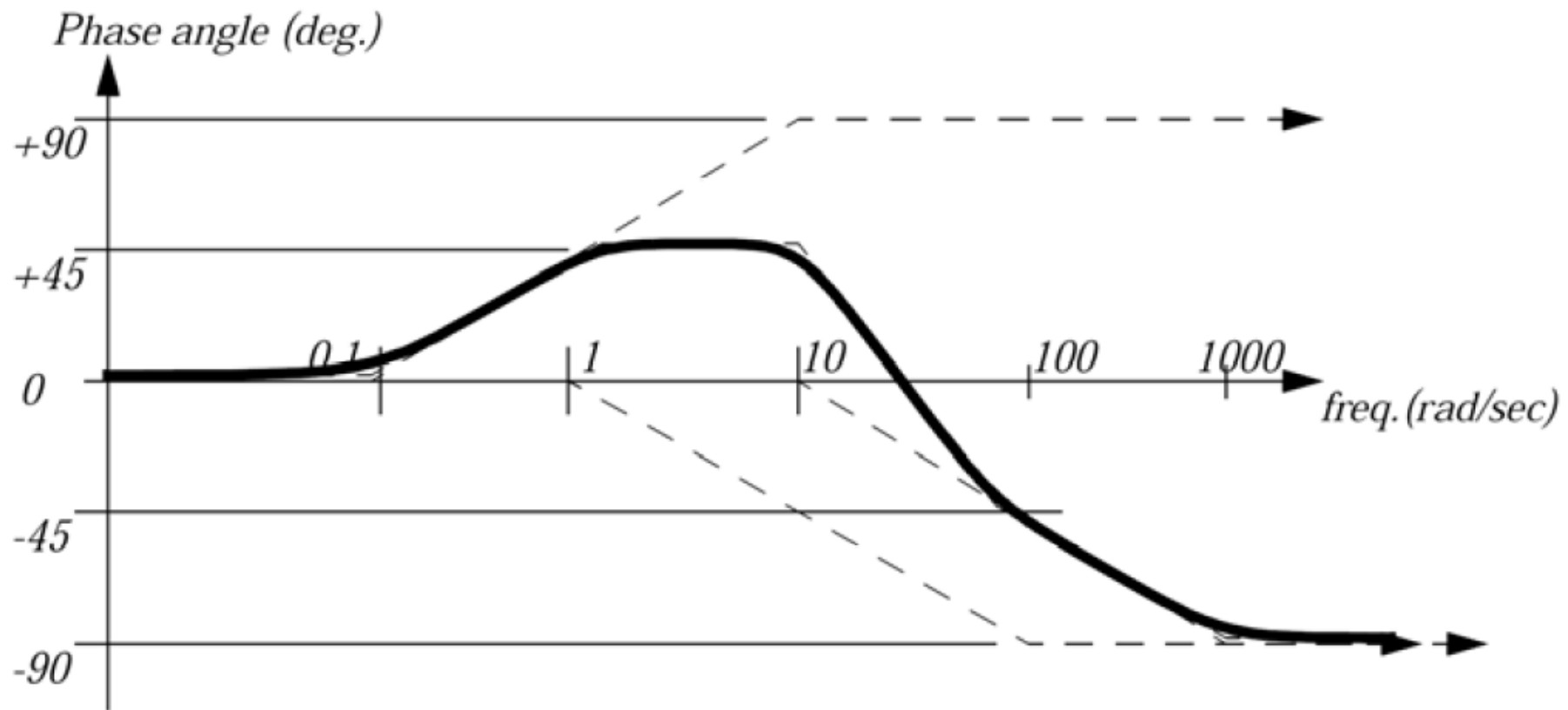
Step 1: Draw lines for each of the terms in the transfer function



รูปที่ 10.23 Phase plot



รูปที่ 10.24 Phase plot



รูปที่ 10.25 phase plot

Construct the Bode plots for the transfer function

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

Solution:

We first put $\mathbf{H}(\omega)$ in the standard form by dividing out the poles and zeros.
Thus,

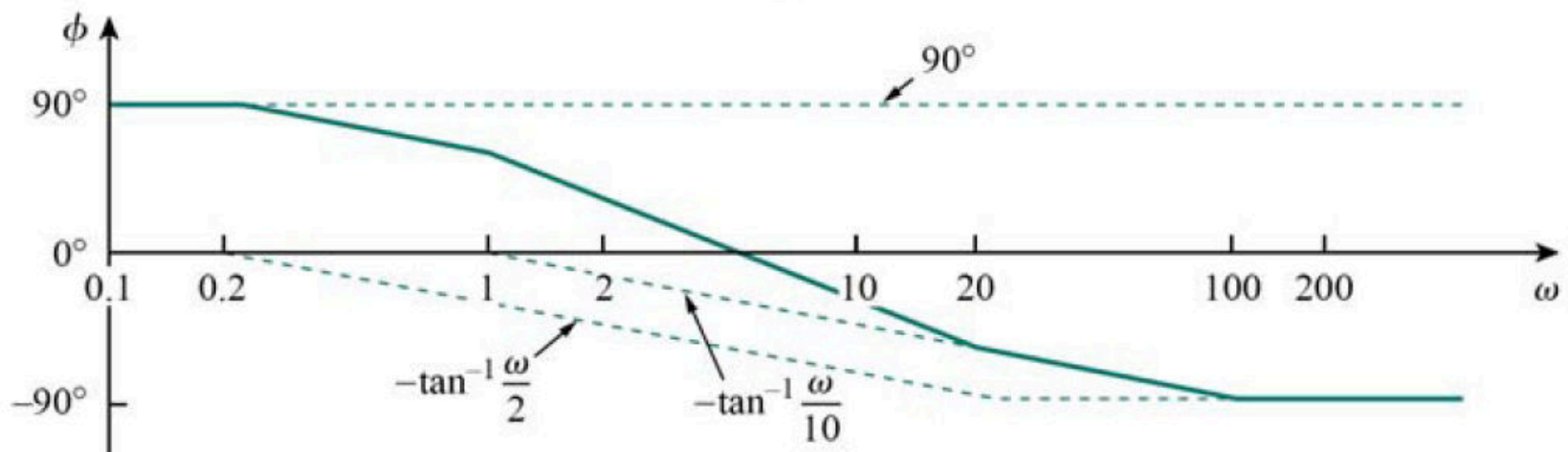
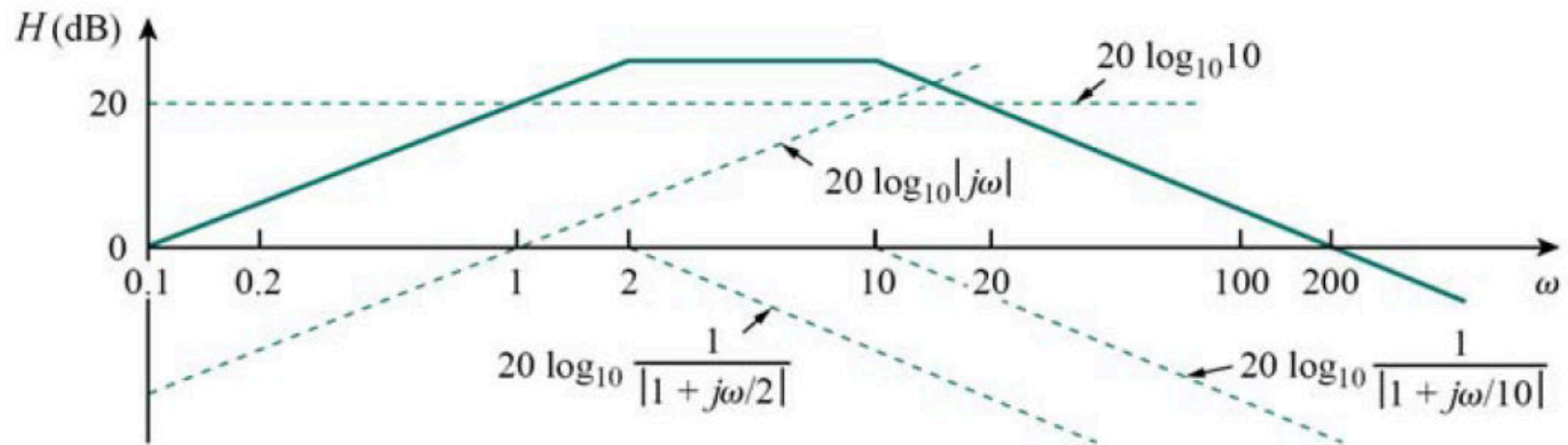
$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\omega) &= \frac{10j\omega}{(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/10)} \\ &= \frac{10|j\omega|}{|1 + j\omega/2| |1 + j\omega/10|} \angle 90^\circ - \tan^{-1} \omega/2 - \tan^{-1} \omega/10\end{aligned}$$

Hence the magnitude and phase are

$$H_{\text{dB}} = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} |j\omega| - 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{2} \right|$$

$$- 20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right|$$

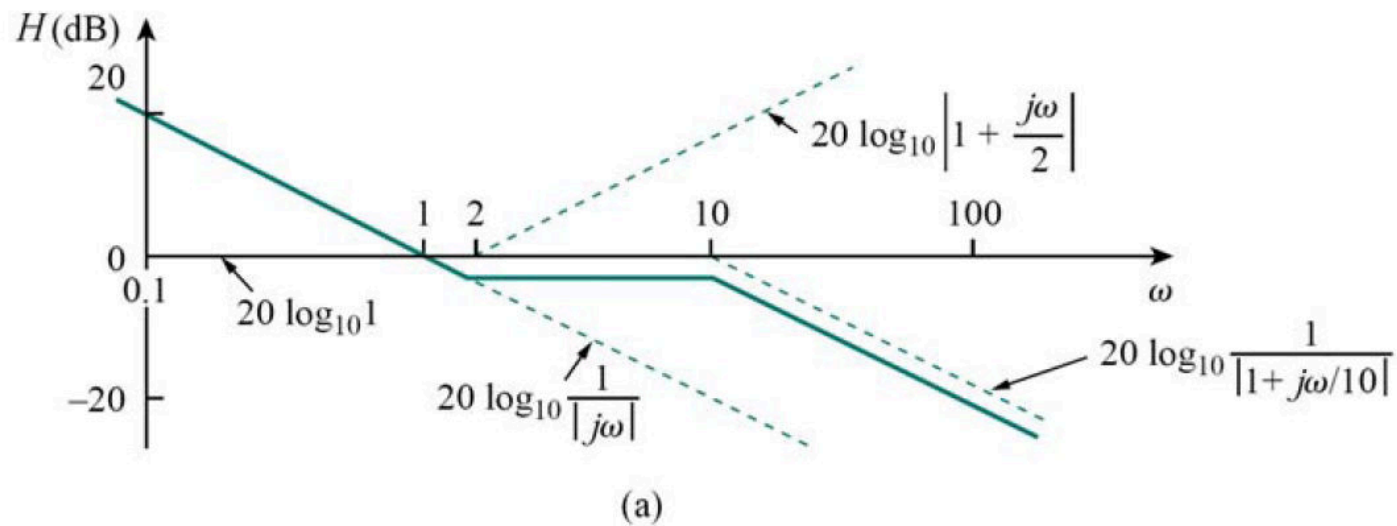
$$\phi = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \frac{\omega}{10}$$

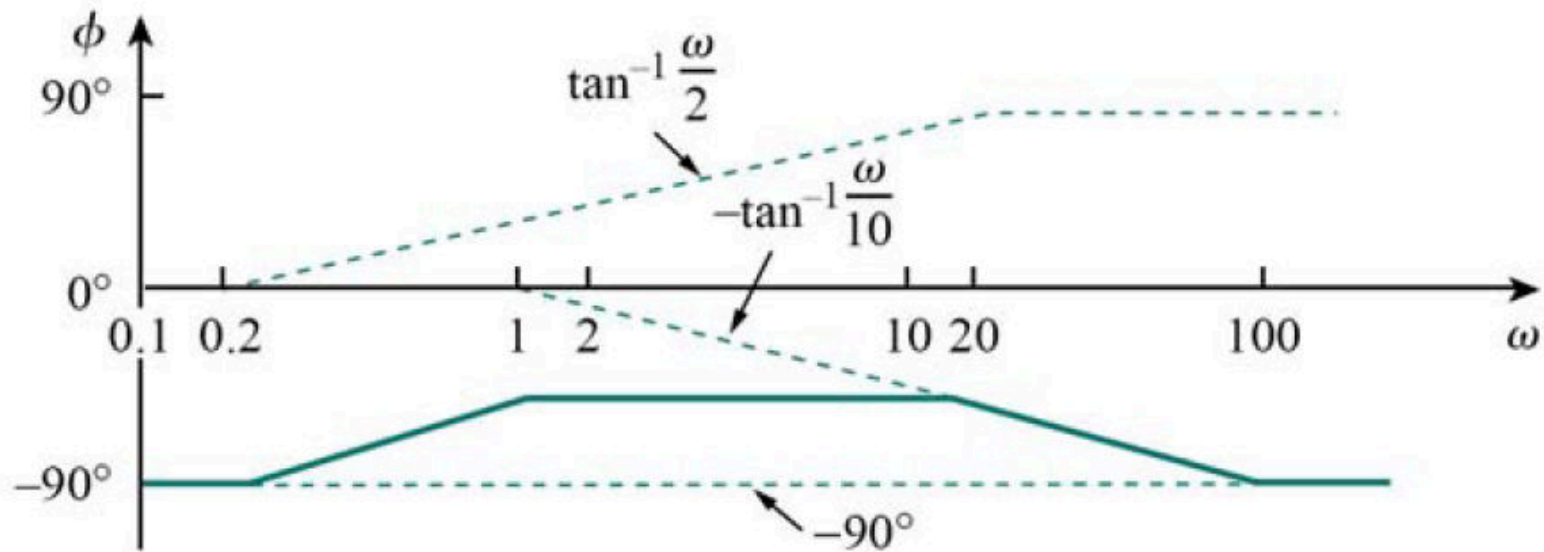


รูปที่ 10.26 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.5 จงพรีอตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{5(s + 2)}{s(s + 10)} \quad (10.28)$$





(b)

รูปที่ 10.27 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.6 จงพรีอตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{s + 10}{s(s + 5)^2} \quad (10.29)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.29 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

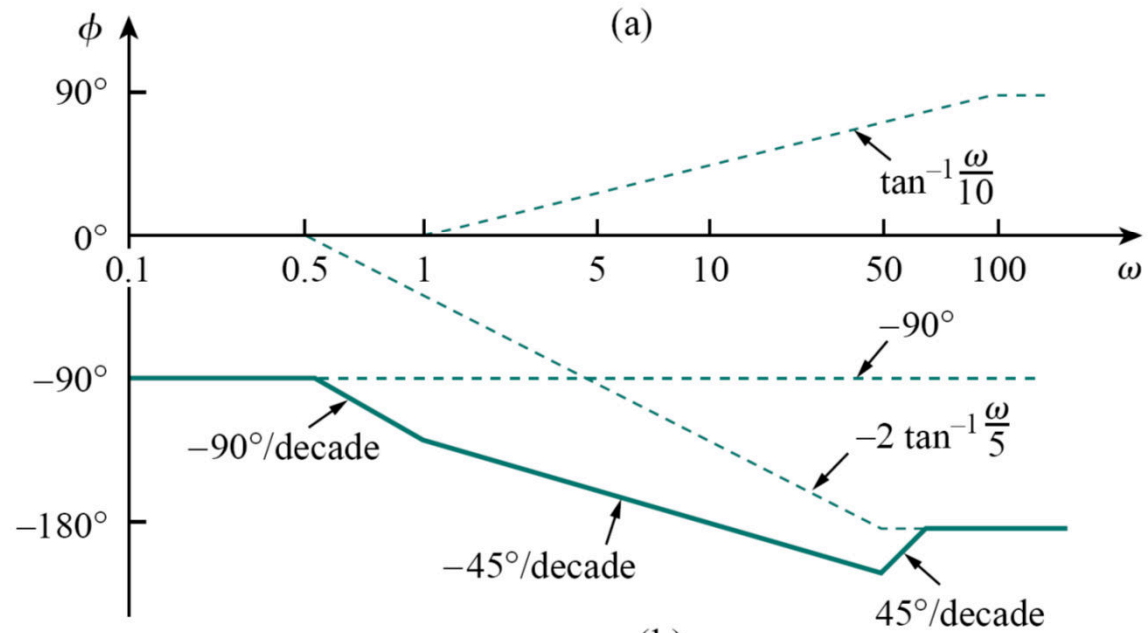
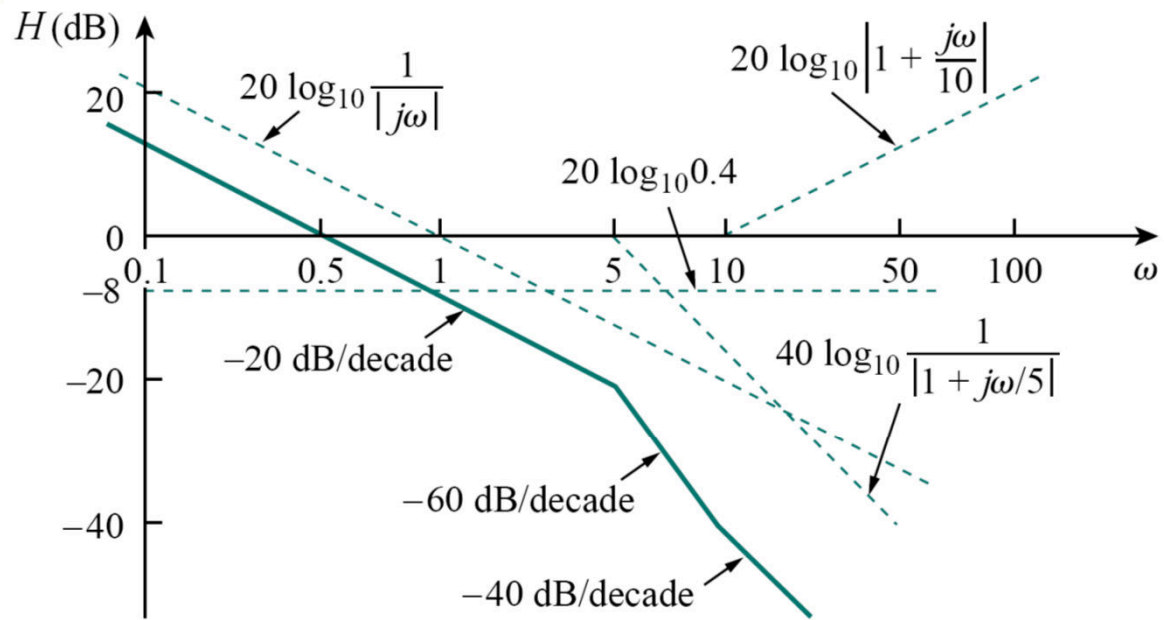
$$T(j\omega) = \frac{0.4[1 + (j\omega/10)]}{j\omega(1 + j\omega/5)^2} \quad (10.30)$$

สำหรับ ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

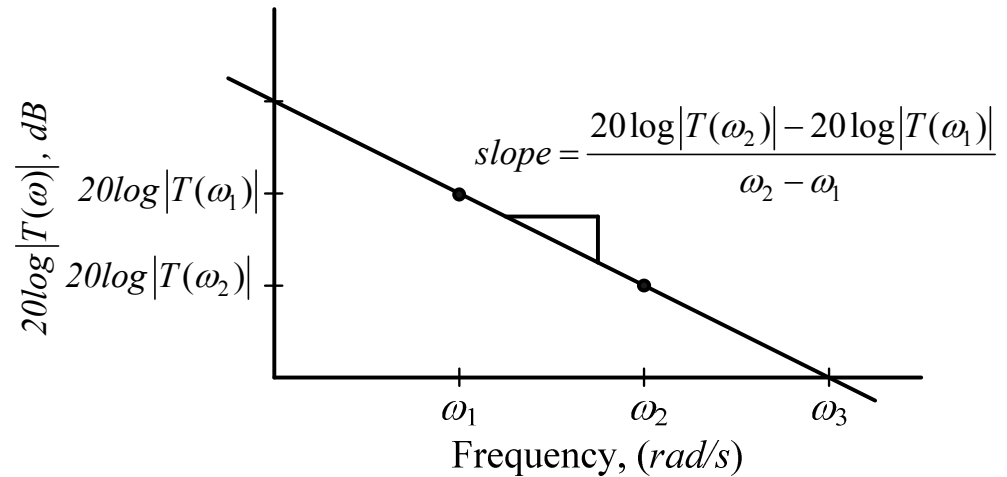
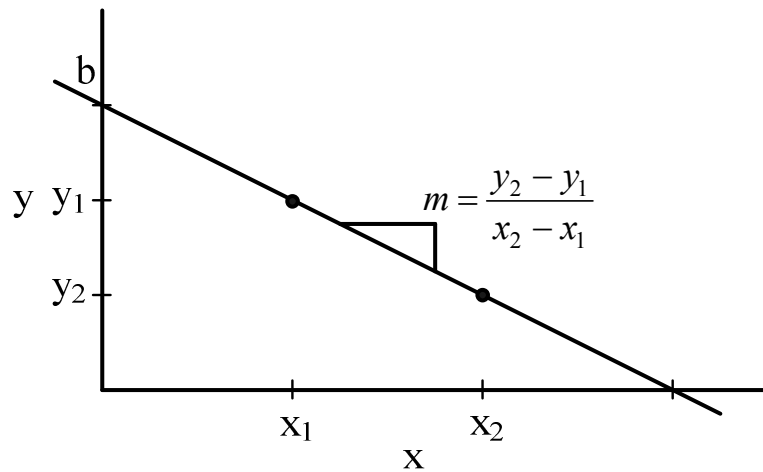
$$T_{dB} = 20 \log 0.4 + 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{10} \right| - 20 \log j\omega - 40 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{5} \right| \quad (10.31)$$

และ

$$\phi = 0^\circ + \tan^{-1} \frac{\omega}{10} - 90^\circ - 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{5} \quad (10.32)$$



จากกราฟในรูปที่ 10.3 ความถี่ ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 อยู่ x decade
 หรือ $\omega_2 = 10^x \omega_1$ ซึ่งค่า $x = \log(\omega_2/\omega_1)$ decade



Slope is given using of dB/decade

ตัวอย่างที่ 10.1. ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 อยู่กี่ decade

(ก) $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 1000 \text{ rad/s}$

(ข) $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 316 \text{ rad/s}$

วิธีทำ

ระยะห่างระหว่าง ω_1 กับ ω_2 หาได้จากสเกล $x = \log(\omega_2/\omega_1)$ ดังนี้

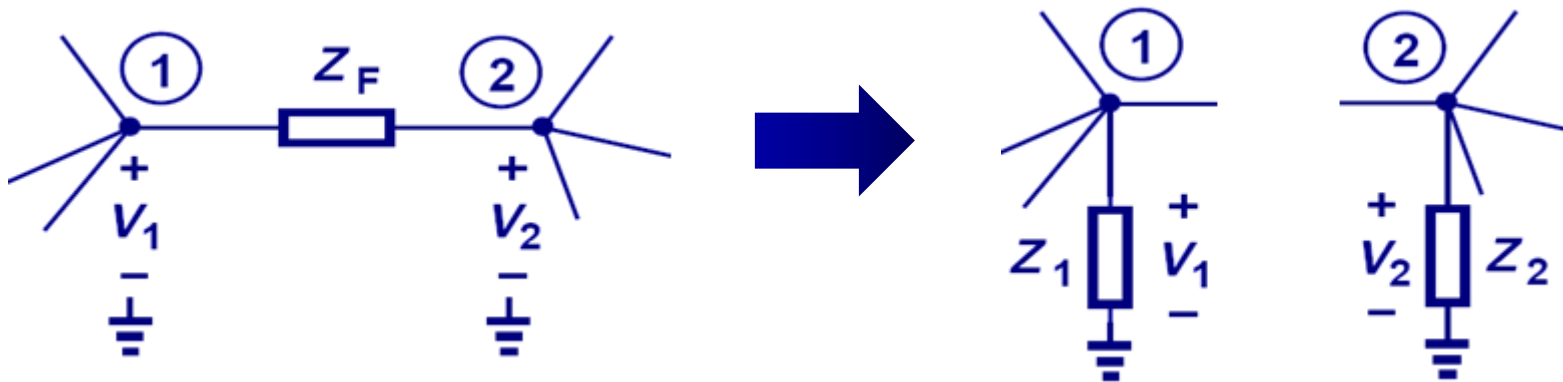
(ก) ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 เท่ากับ $x = \log(1000/10)$
 $= 2 \text{ decade}$

(ข) ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 เท่ากับ $x = \log(316/10)$
 $= 1.5 \text{ decade}$

Miller's Theorem

- If A_v is the voltage gain from node 1 to 2, then a floating impedance Z_F can be converted to two grounded impedances Z_1 and Z_2 :

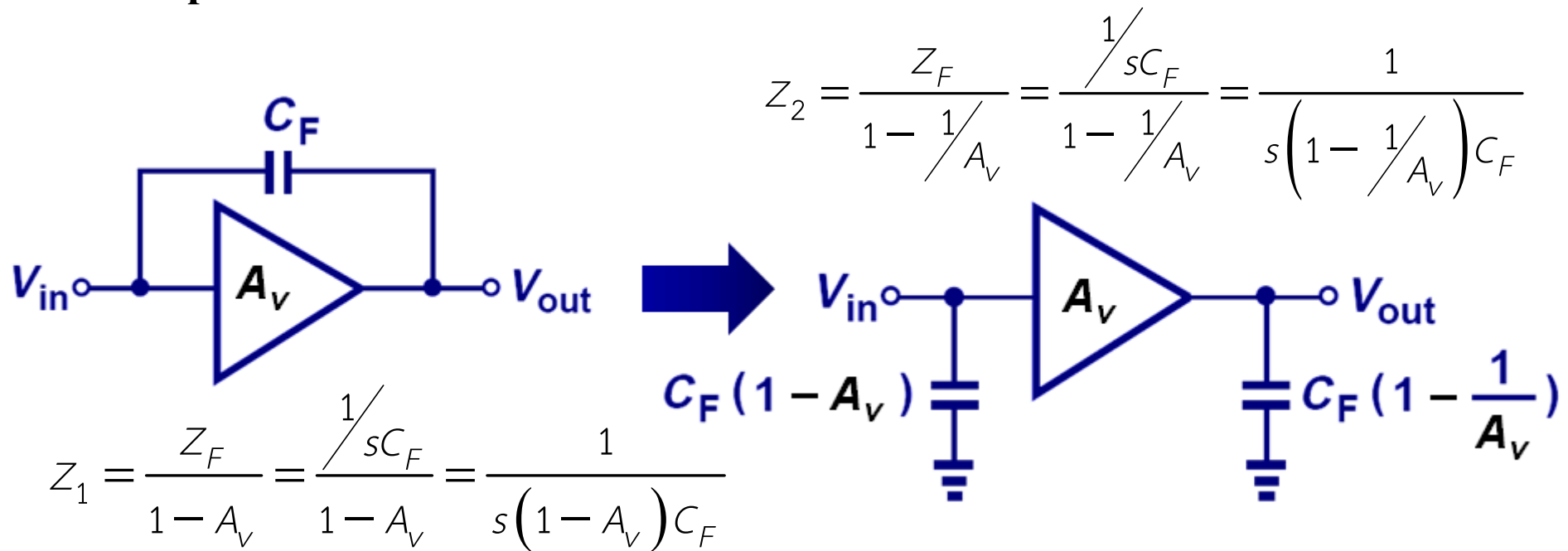
$$\frac{V_1 - V_2}{Z_F} = \frac{V_1}{Z_1} \Rightarrow Z_1 = Z_F \frac{V_1}{V_1 - V_2} = Z_F \frac{1}{1 - A_v}$$



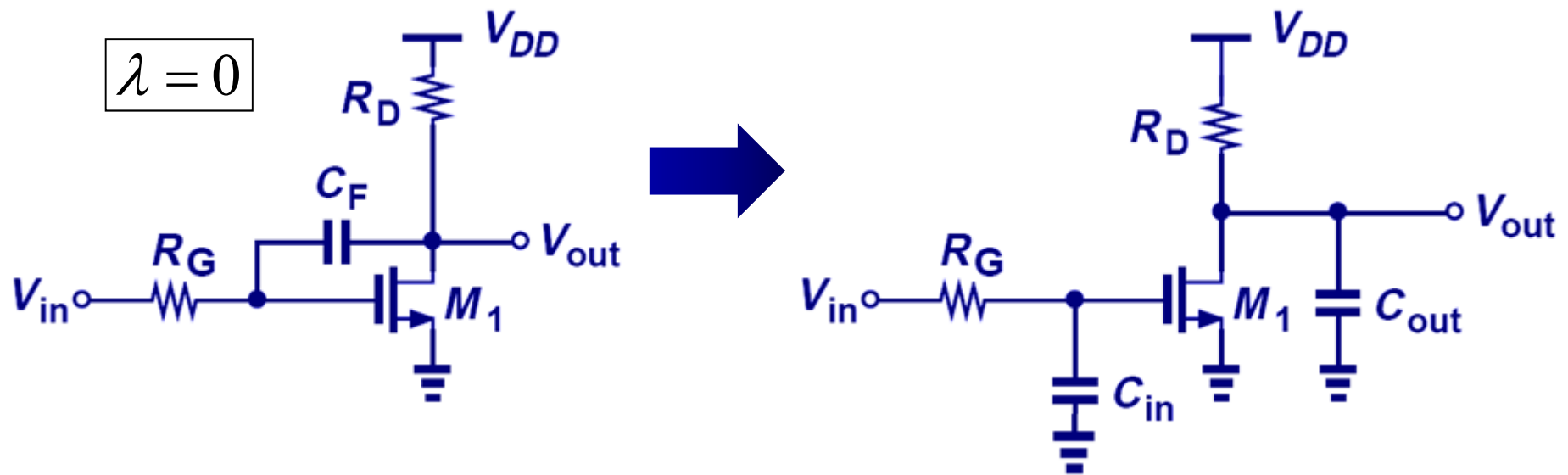
$$\frac{V_1 - V_2}{Z_F} = -\frac{V_2}{Z_2} \Rightarrow Z_2 = -Z_F \frac{V_2}{V_1 - V_2} = Z_F \frac{1}{1 - 1/A_v}$$

Miller Multiplication

- Applying Miller's theorem, we can convert a floating capacitance between the input and output nodes of an amplifier into two grounded capacitances.
- **The capacitance at the input node is larger than the original floating capacitance.**



Application of Miller's Theorem



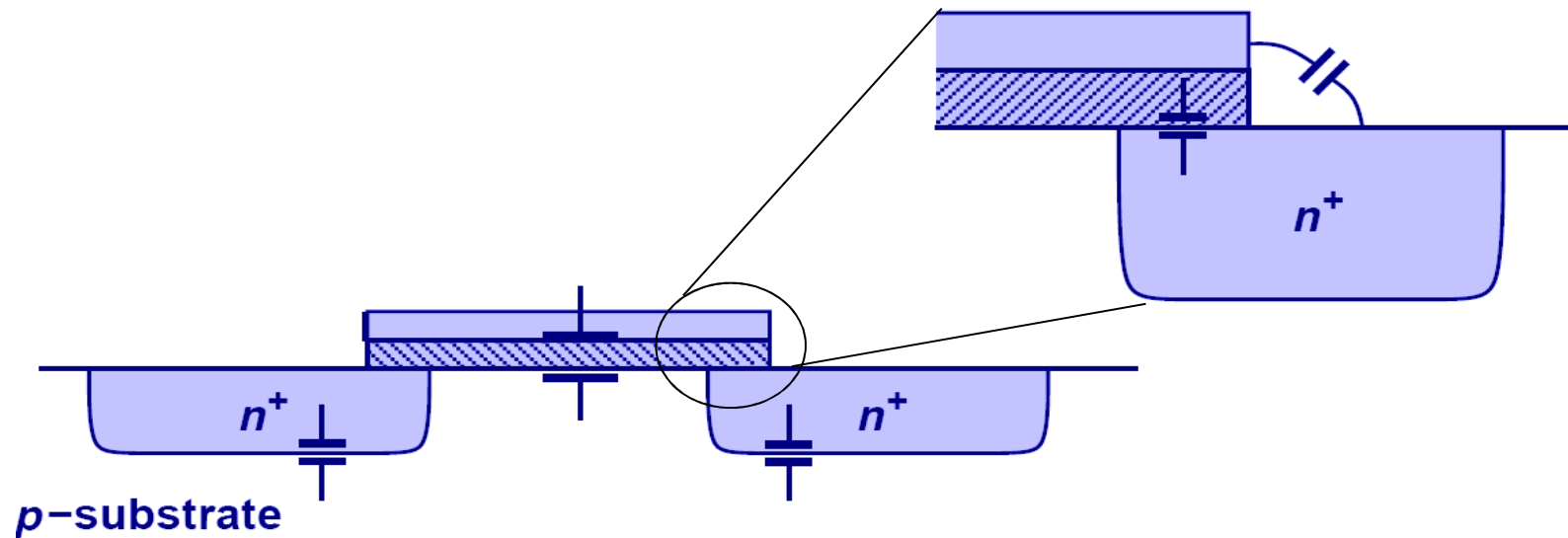
$$\omega_{in} = \frac{1}{R_G (1 + g_m R_D) C_F}$$

$$\omega_{out} = \frac{1}{R_D \left(1 + \frac{1}{g_m R_D} \right) C_F}$$

MOSFET Intrinsic Capacitances

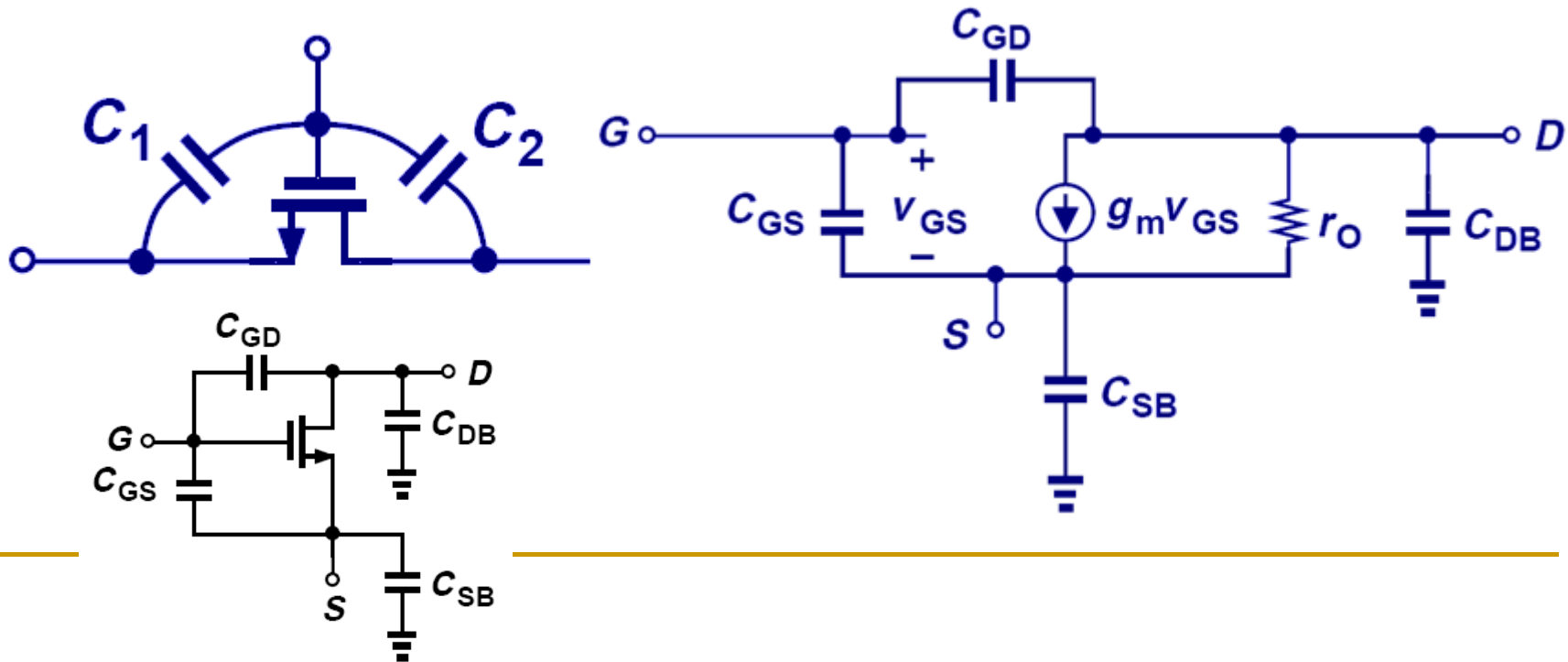
The MOSFET has intrinsic capacitances which affect its performance at high frequencies:

1. gate oxide capacitance between the gate and channel,
2. overlap and fringing capacitances between the gate and the source/drain regions, and
3. source-bulk & drain-bulk junction capacitances (C_{SB} & C_{DB}).

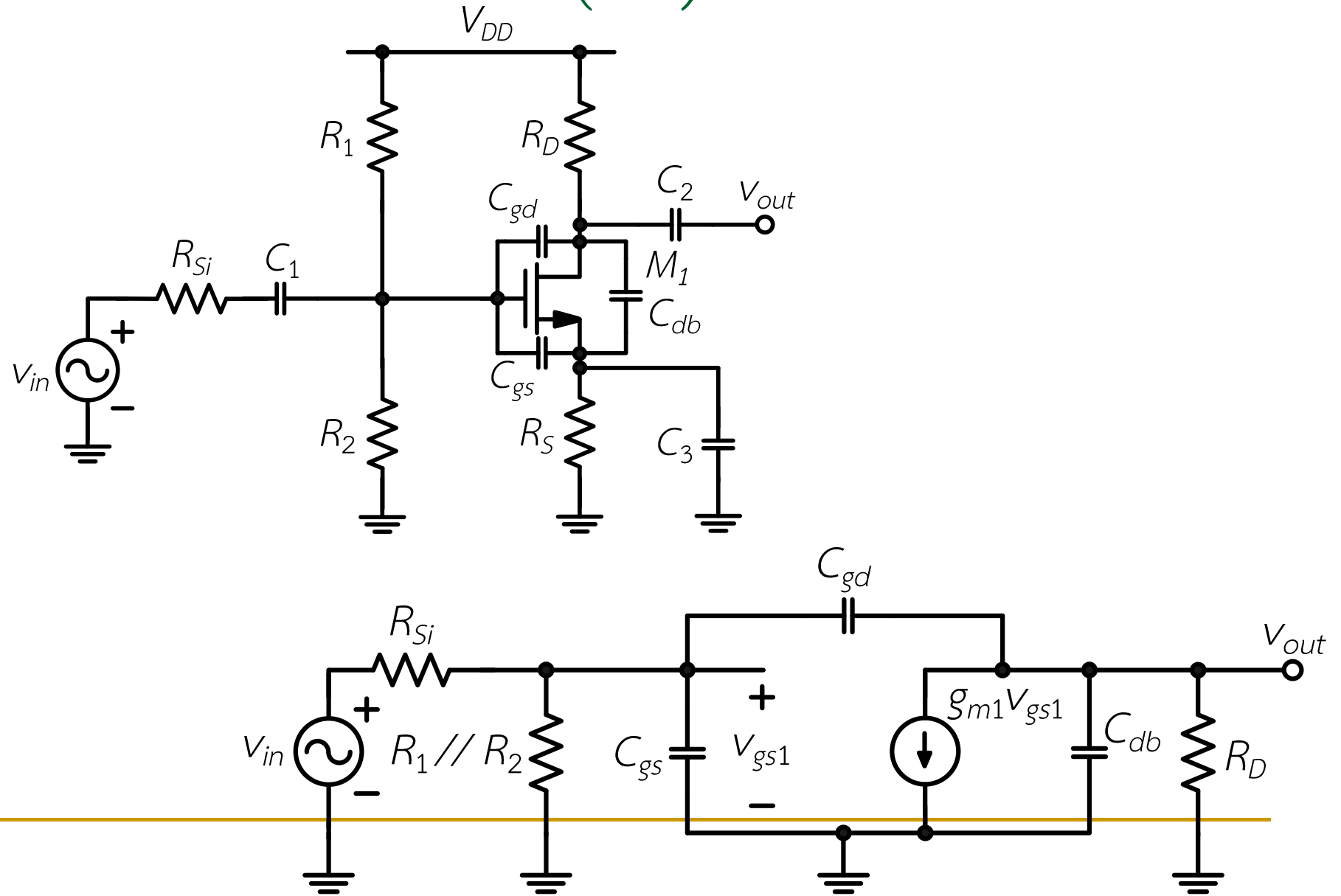


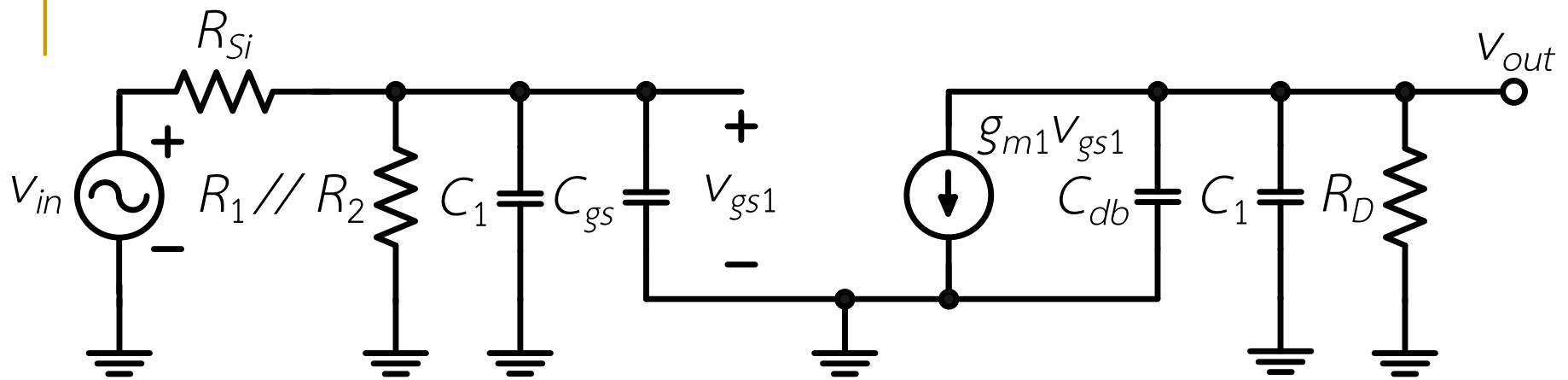
High-Frequency MOSFET Model

- The gate oxide capacitance can be decomposed into a capacitance between the gate and the source (C_1) and a capacitance between the gate and the drain (C_2).
 - In saturation, $C_1 \cong (2/3) \times C_{\text{gate}}$, and $C_2 \cong 0$.
 - C_1 in parallel with the source overlap/fringing capacitance $\rightarrow C_{\text{GS}}$
 - C_2 in parallel with the drain overlap/fringing capacitance $\rightarrow C_{\text{GD}}$



Common source (CS)



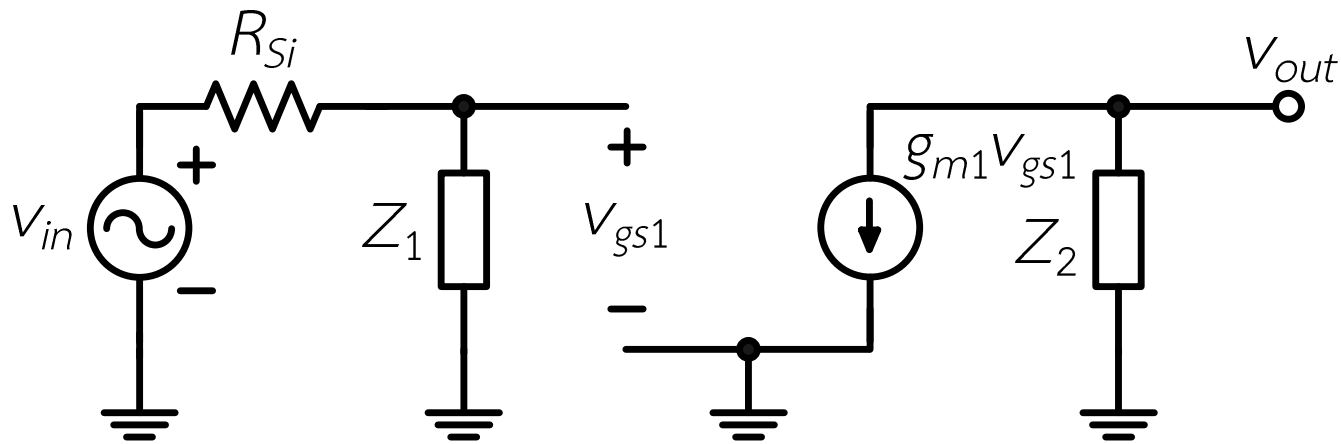


$$C_1 = (1 + g_m R_D) C_{gd}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + s(C_1 + C_{gs})(R_1 \parallel R_2)}$$

$$C_2 = \left(1 + \frac{1}{g_m R_D}\right) C_{gd} \approx C_{gd}$$

$$Z_2 = \frac{R_D}{1 + s(C_2 + C_{db})R_D}$$



$$V_{out} = -g_m V_{gs} Z_2 = \frac{-g_m V_{gs} R_D}{1 + s(C_2 + C_{db})R_D}$$

$$V_{gs} = \frac{Z_1 V_{in}}{R_{Sj} + Z_1}$$

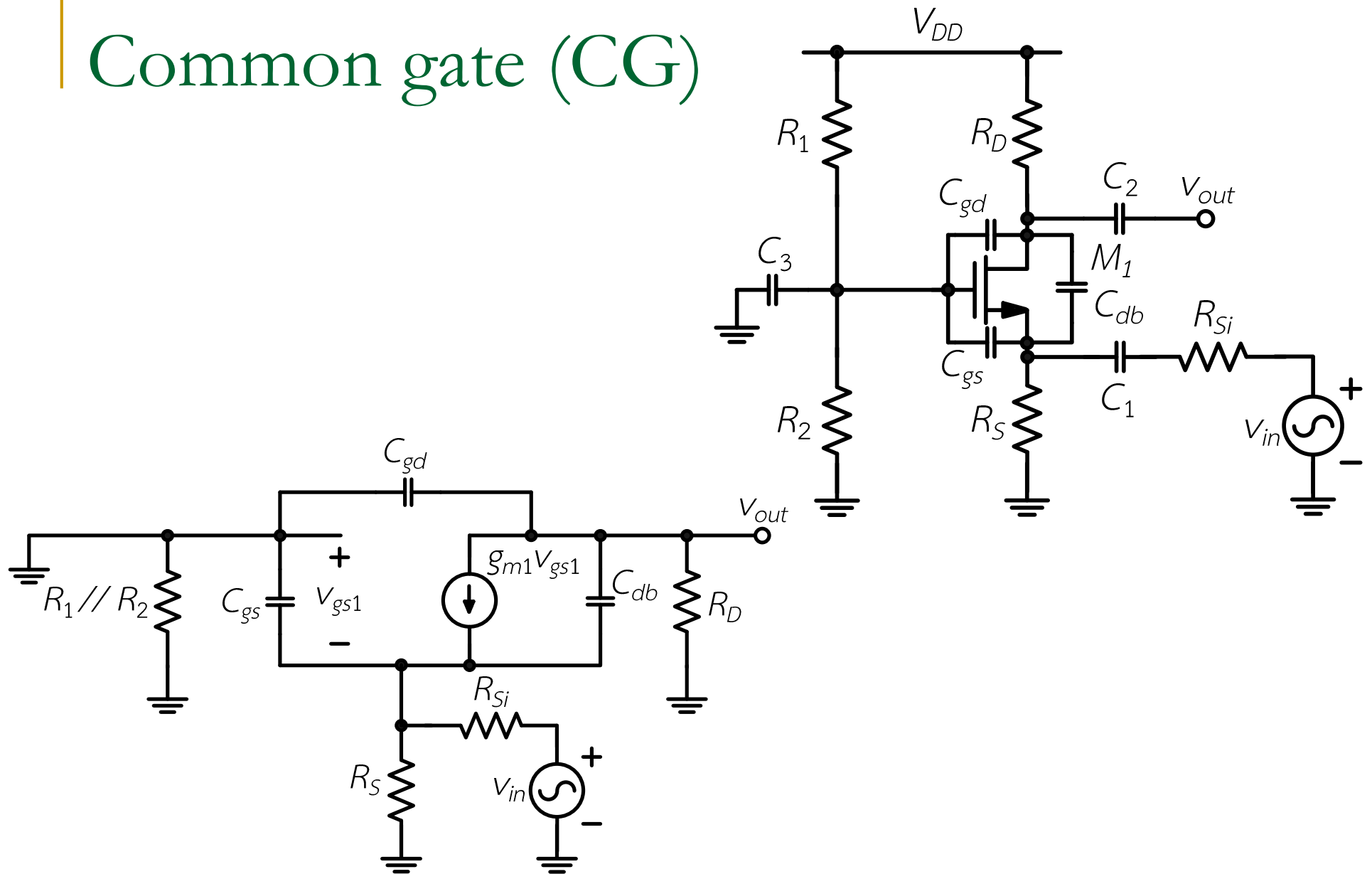
$$Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + s(C_1 + C_{gs})(R_1 \parallel R_2)} \quad Z_2 = \frac{R_D}{1 + s(C_2 + C_{db})R_D}$$

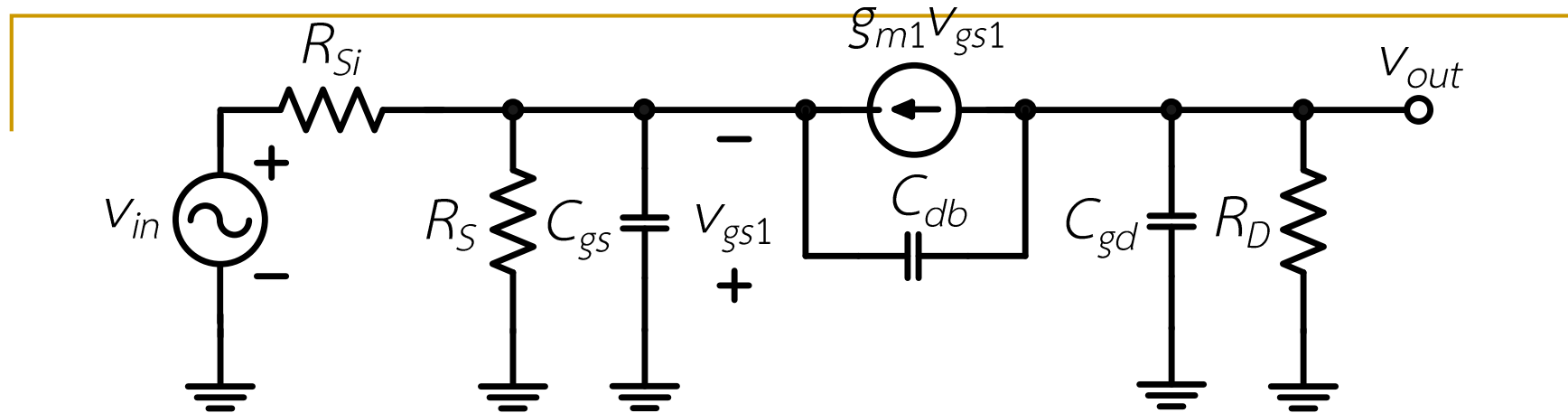
$$V_{out} = -g_m v_{gs} Z_2 = \frac{-g_m R_D}{1 + s(C_2 + C_{db})R_D} \times \frac{Z_1 v_{in}}{R_{Si} + Z_1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{-g_m R_D Z_1}{\left[1 + s(C_2 + C_{db})R_D\right] (R_{Si} + Z_1)} \quad Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + s(C_1 + C_{gs})(R_1 \parallel R_2)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{-g_m R_D (R_1 \parallel R_2)}{\left[1 + s(C_2 + C_{db})R_D\right] \left(R_{Si} + \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + s(C_1 + C_{gs})(R_1 \parallel R_2)}\right)} \times \frac{1}{1 + s(C_1 + C_{gs})(R_1 \parallel R_2)}$$

Common gate (CG)





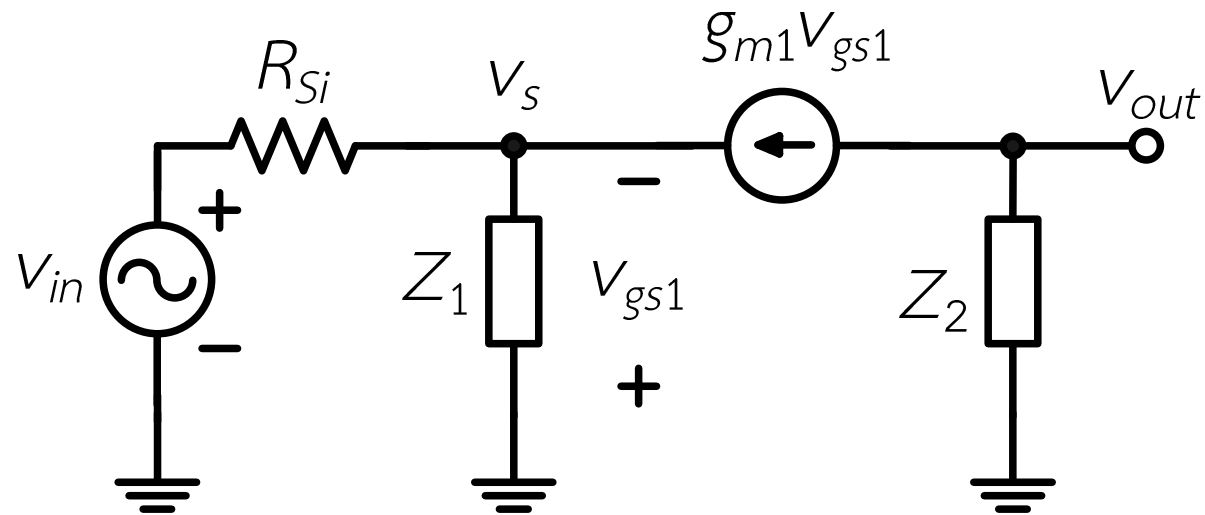
$$A_v = g_m R_D$$

$$C_1 = (1 - A_v) C_{db} = (1 - g_m R_D) C_{db} \approx 0$$

$$C_2 = \left(1 - \frac{1}{A_v}\right) C_{db} = \left(1 - \frac{1}{g_m R_D}\right) C_{db} \approx C_{db}$$

$$Z_1 = \frac{R_S}{1 + s C_{gs} R_S}$$

$$Z_2 = \frac{R_D}{1 + s (C_{db} + C_{gd}) R_D}$$



$$V_{out} = -g_m V_{gs} Z_2 = -\frac{-g_m V_{gs} R_D}{1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D}$$

$$V_{gs} = \frac{-Z_1 V_{in}}{R_{Si} + Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_S}{1 + sC_{gs}R_S} \quad Z_2 = \frac{R_D}{1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D}$$

$$V_{out} = \frac{-g_m R_D}{1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D} \times \frac{-Z_1 V_{in}}{R_{Si} + Z_1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D Z_1}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D\right] (R_{Si} + Z_1)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D\right] \left(R_{Si} + \frac{R_S}{1 + sC_{gs}R_S}\right)} \times \frac{R_S}{1 + sC_{gs}R_S}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D\right] \left(\frac{(1 + sC_{gs}R_S)R_{Si} + R_S}{1 + sC_{gs}R_S}\right)} \times \frac{R_S}{1 + sC_{gs}R_S}$$

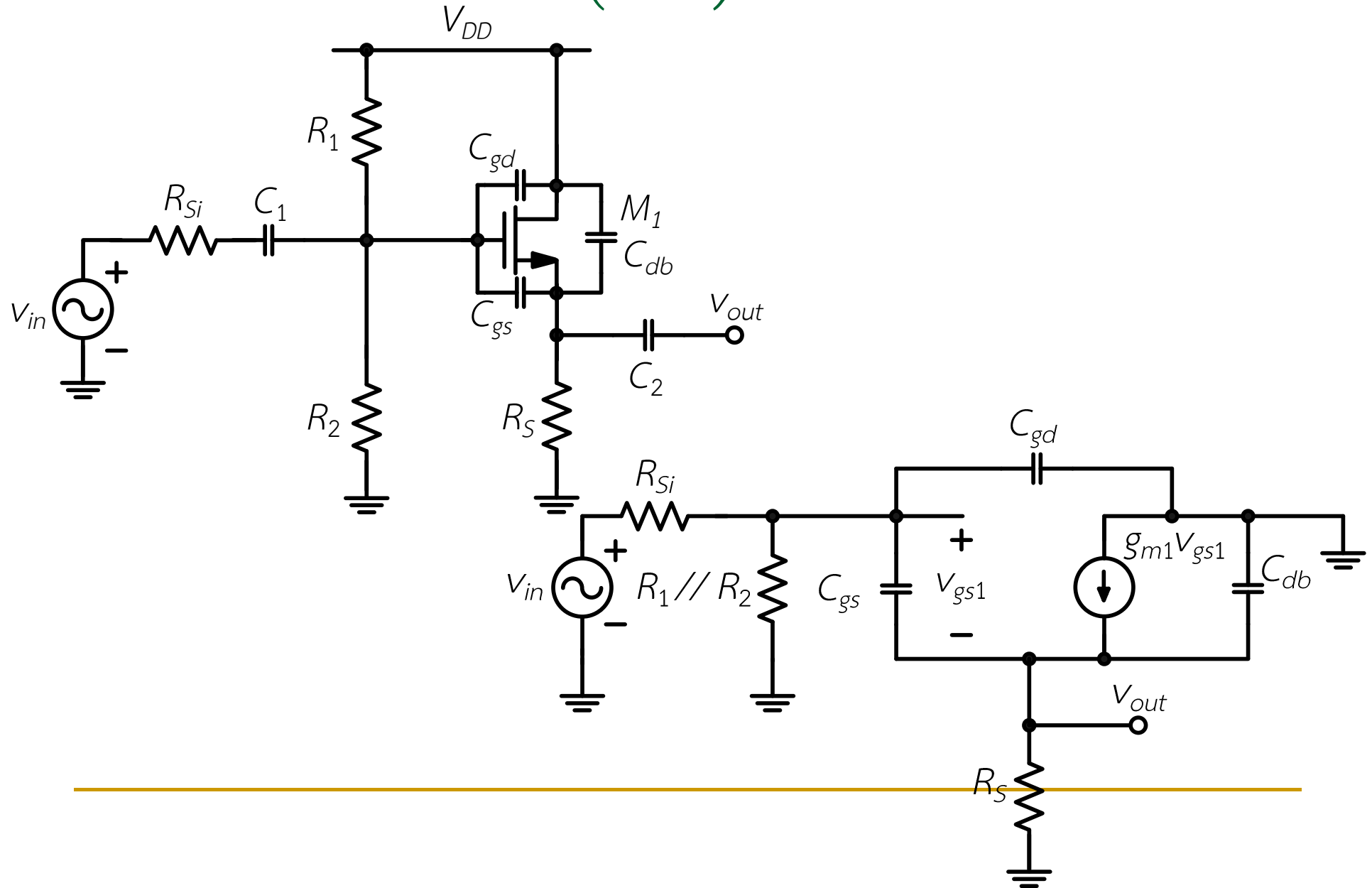
$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D \right]} \times \frac{R_S}{1 + sC_{gs}R_S} \left(\frac{(1 + sC_{gs}R_S)R_{Si} + R_S}{1 + sC_{gs}R_S} \right)$$

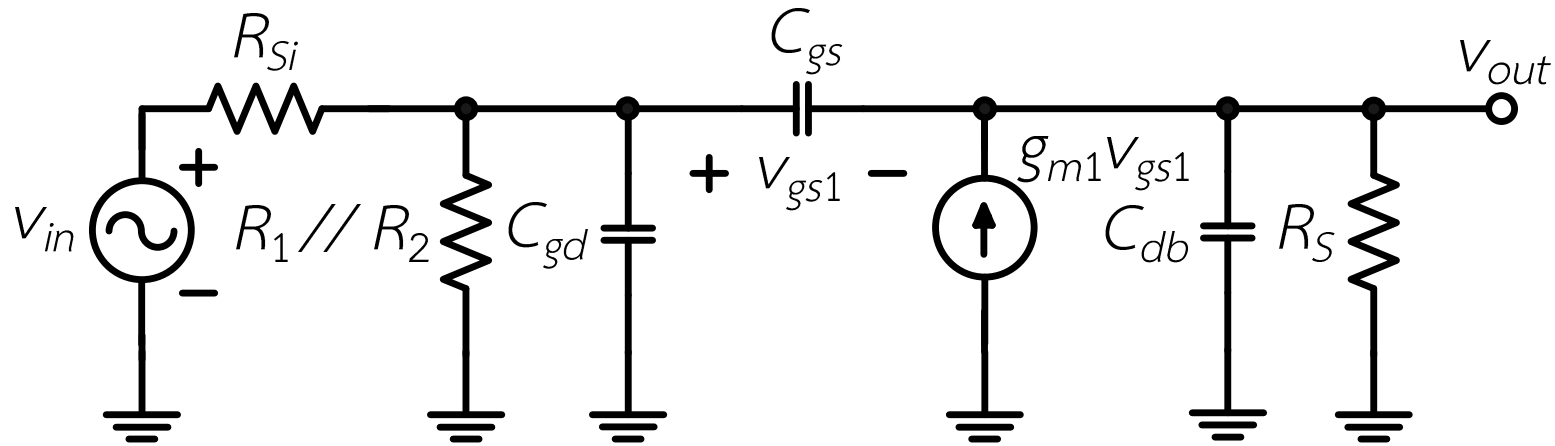
$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D \right]} \times \frac{R_S}{(1 + sC_{gs}R_S)R_{Si} + R_S}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D \right]} \times \frac{R_S}{sC_{gs}R_S R_{Si} + R_{Si} + R_S}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m R_D \left[R_S / (R_{Si} + R_S) \right]}{\left[1 + s(C_{db} + C_{gd})R_D \right] \left(1 + sC_{gs} \frac{R_S R_{Si}}{R_{Si} + R_S} \right)}$$

Common drain (CD)





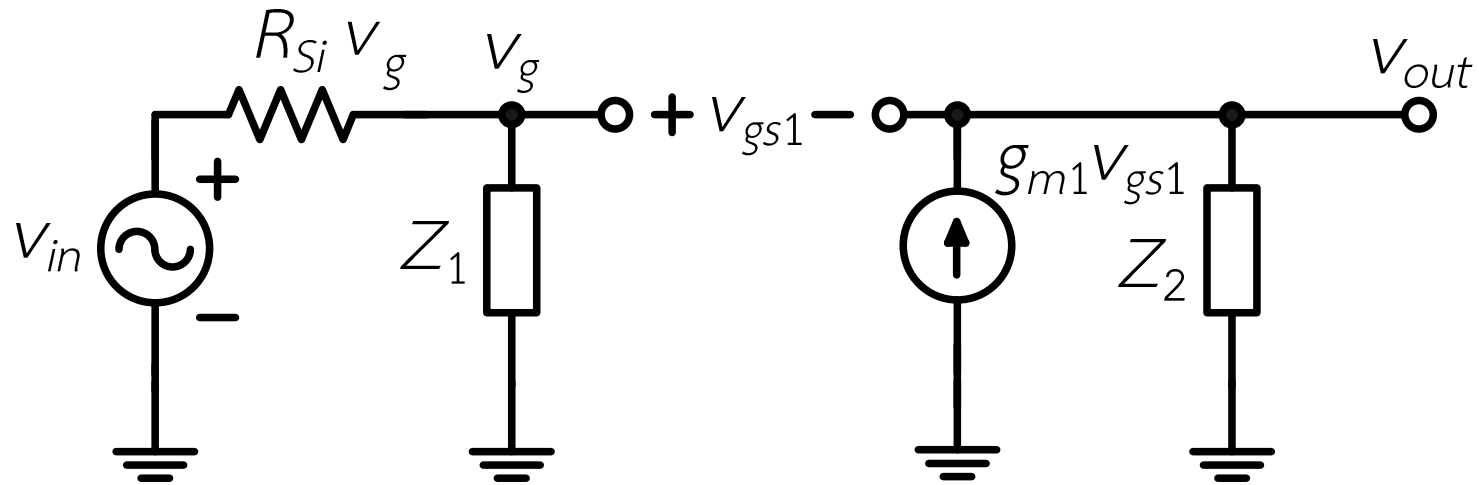
$$A_V \cong 0.9$$

$$C_1 = (1 - A_V) C_{gs} = (1 - 0.9) C_{gs} \approx 0$$

$$C_2 = \left(1 - \frac{1}{A_V}\right) C_{gs} = \left(1 - \frac{1}{0.9}\right) C_{gs} \approx C_{gs}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + sC_{gd} (R_1 \parallel R_2)}$$

$$Z_2 = \frac{R_S}{1 + s(C_{db} + C_{gs}) R_S}$$



$$V_{out} = g_m V_{gs} Z_2 \quad V_{gs} = V_g - V_{out} \quad V_g = \frac{Z_1 V_{in}}{R_{Si} + Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + sC_{gd} (R_1 \parallel R_2)}$$

$$Z_2 = \frac{R_S}{1 + s(C_{db} + C_{gs}) R_S}$$

$$v_{out} = g_m Z_2 (v_g - v_{out})$$

$$v_{out} = g_m Z_2 v_g - g_m Z_2 v_{out}$$

$$v_{out} + g_m Z_2 v_{out} = g_m Z_2 v_g$$

$$(1 + g_m Z_2) v_{out} = g_m Z_2 v_g$$

$$v_{out} = \frac{g_m Z_2 v_g}{(1 + g_m Z_2)}$$

$$V_{out} = \frac{g_m Z_2 V_g}{(1 + g_m Z_2)} = \frac{g_m Z_2}{(1 + g_m Z_2)} \times \frac{Z_1 V_{in}}{R_{Si} + Z_1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{g_m Z_2}{(1 + g_m Z_2)} \times \frac{Z_1}{R_{Si} + Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{1 + sC_{gd}(R_1 \parallel R_2)}$$

$$Z_2 = \frac{R_S}{1 + s(C_{db} + C_{gs})R_S}$$

เอกสารอ้างอิง (Reference)

1. Charles K. Alexander, and Mathew N. O. Sadiku “Fundamentals of Electric Circuits”
 2. Robert Boylestad and Louis Nashelsky “Electronic Devices and Circuit Theory”
 3. Behzad Razavi “Fundamental of Microelectronics”
-

Thank you
