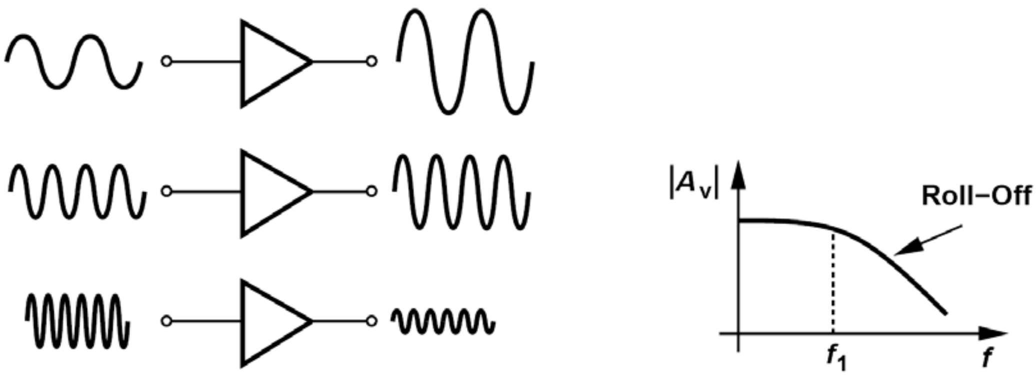
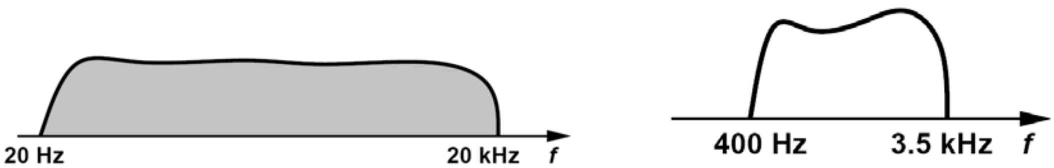
บทที่ 10
การตอบสนองทางความถี่
(Frequency Response)

บทนำ



รูปที่ 10.1



รูปที่ 10.2

10.1. Logarithm

There is no escaping the need to become comfortable with the logarithmic function. The plotting of a variable between wide limits, comparing levels without unwieldy numbers, and identifying levels of particular importance in the design, review, and analysis procedures are all positive features of using the logarithmic function.

As a first step in clarifying the relationship between the variables of a logarithmic function, consider the following mathematical equations:

$$\boxed{a = b^x, \qquad x = \log_b a} \tag{11.1}$$

The variables a, b, and x are the same in each equation. If a is determined by taking the base b to the x power, the same x will result if the log of a is taken to the base b. For instance, if $b = 10$ and $x = 2$,

$$a = b^x = (10)^2 = 100$$

but

$$x = \log_b a = \log_{10} 100 = 2$$

In other words, if you were asked to find the power of a number that would result in a particular level such as shown below:

$$10{,}000 = 10^x$$

the level of x could be determined using logarithms. That is,

$$x = \log_{10} 10{,}000 = 4$$

For the electrical/electronics industry and in fact for the vast majority of scientific research, the base in the logarithmic equation is limited to 10 and the number $e = 2.71828. . . .$

Logarithms taken to the base 10 are referred to as *common logarithms,* while logarithms taken to the base e are referred to as *natural logarithms.* In summary:

$$\boxed{\text{Common logarithm:} \quad x = \log_{10} a} \tag{11.2}$$

$$\boxed{\text{Natural logarithm:} \quad y = \log_e a} \tag{11.3}$$

The two are related by

$$\boxed{\log_e a = 2.3 \log_{10} a} \tag{11.4}$$

On today's scientific calculators, the common logarithm is typically denoted by the **log** key and the natural logarithm by the **ln** key.

EXAMPLE 11.1

Using the calculator, determine the logarithm of the following numbers to the base indicated.
(a) $\log_{10} 10^6$.
(b) $\log_e e^3$.
(c) $\log_{10} 10^{-2}$.
(d) $\log_e e^{-1}$.

Solution

(a) **6** (b) **3** (c) **−2** (d) **−1**

The results in Example 11.1 clearly reveal that the logarithm of a number taken to a power is simply the power of the number if the number matches the base of the logarithm. In the next example, the base and the variable x are not related by an integer power of the base.

EXAMPLE 11.2

Using the calculator, determine the logarithm of the following numbers.
(a) $\log_{10} 64$.
(b) $\log_e 64$.
(c) $\log_{10} 1600$.
(d) $\log_{10} 8000$.

Solution

(a) **1.806** (b) **4.159** (c) **3.204** (d) **3.903**

Note in parts (a) and (b) of Example 11.2 that the logarithms $\log_{10} a$ and $\log_e a$ are indeed related as defined by Eq. (11.4). In addition, note that the logarithm of a number does not increase in the same linear fashion as the number. That is, 8000 is 125 times larger than 64, but the logarithm of 8000 is only about 2.16 times larger

Since the remaining analysis of this chapter employs the common logarithm, let us now review a few properties of logarithms using solely the common logarithm. In general, however, the same relationships hold true for logarithms to any base.

$$\boxed{\log_{10} 1 = 0} \tag{11.5}$$

As clearly revealed by Table 11.1, since $10^0 = 1$,

$$\boxed{\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b} \tag{11.6}$$

which for the special case of $a = 1$ becomes

$$\boxed{\log_{10} \frac{1}{b} = -\log_{10} b} \tag{11.7}$$

revealing that for any b greater than 1 the logarithm of a number less than 1 is always negative.

$$\boxed{\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b} \tag{11.8}$$

In each case, the equations employing natural logarithms will have the same format.

EXAMPLE 11.4

Using a calculator, determine the logarithm of the following numbers:

(a) $\log_{10} 0.5$.

(b) $\log_{10} \dfrac{4000}{250}$.

(c) $\log_{10} (0.6 \times 30)$.

Solution

(a) $\mathbf{-0.3}$

(b) $\log_{10} 4000 - \log_{10} 250 = 3.602 - 2.398 = \mathbf{1.204}$

Check: $\log_{10} \dfrac{4000}{250} = \log_{10} 16 = \mathbf{1.204}$

(c) $\log_{10} 0.6 + \log_{10} 30 = -0.2218 + 1.477 = \mathbf{1.255}$

Check: $\log_{10} (0.6 \times 30) = \log_{10} 18 = \mathbf{1.255}$

The use of log scales can significantly expand the range of variation of a particular variable on a graph. Most graph paper available is of the semilog or double-log (log-log) variety. The term *semi* (meaning one-half) indicates that only one of the two scales is a log scale, whereas double-log indicates that both scales are log scales. A semilog scale appears in Fig. 11.1. Note that the vertical scale is a linear scale with equal divisions. The spacing between the lines of the log plot is shown on the graph.

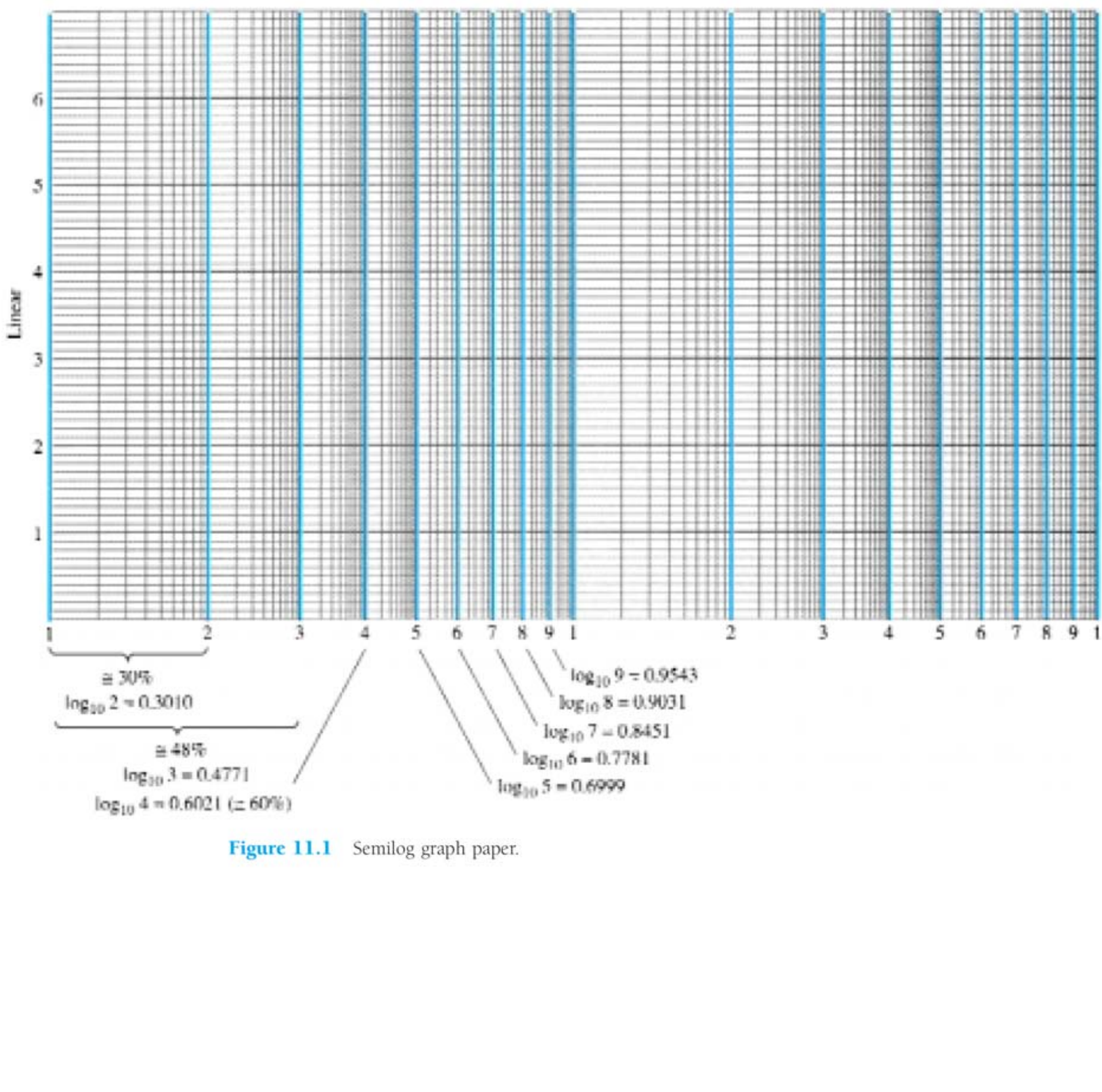


Figure 11.1 Semilog graph paper.

The log of 2 to the base 10 is approximately 0.3. The distance from 1 ($\log_{10} 1 = 0$) to 2 is therefore 30% of the span. The log of 3 to the base 10 is 0.4771 or almost 48% of the span (very close to one-half the distance between power of 10 increments on the log scale). Since $\log_{10} 5 \cong 0.7$, it is marked off at a point 70% of the distance. Note that between any two digits the same compression of the lines appears as you progress from the left to the right. It is important to note the resulting numerical value and the spacing, since plots will typically only have the tic marks indicated in Fig. 11.2 due to a lack of space. You must realize that the longer bars for this figure have the numerical values of 0.3, 3, and 30 associated with them, whereas the next shorter bars have values of 0.5, 5, and 50 and the shortest bars 0.7, 7, and 70.

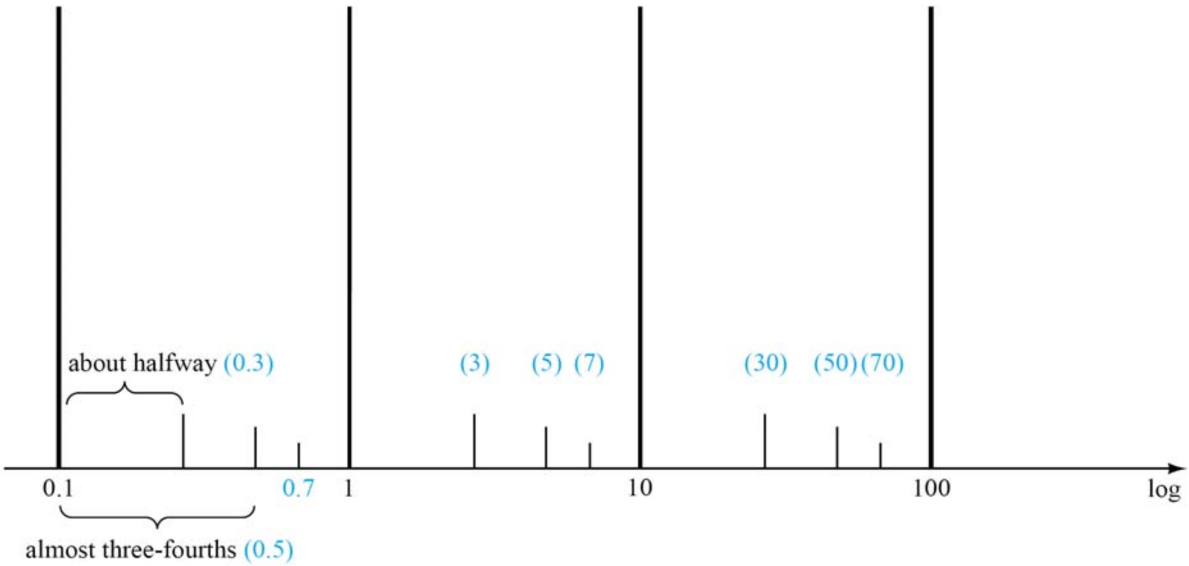


Figure 11.2 Identifying the numerical values of the tic marks on a log scale.

The concept of the decibel (dB) and the associated calculations will become increasingly important in the remaining sections of this chapter. The background surrounding the term *decibel* has its origin in the established fact that power and audio levels are related on a logarithmic basis. That is, an increase in power level, say 4 to 16 W, does not result in an audio level increase by a factor of 16/4 = 4. It will increase by a factor of 2 as derived from the power of 4 in the following manner: $(4)^2 = 16$. For a change of 4 to 64 W, the audio level will increase by a factor of 3 since $(4)^3 = 64$. In logarithmic form, the relationship can be written as $\log_4 64 = 3$.

The term *bel* was derived from the surname of Alexander Graham Bell. For standardization, the bel (B) was defined by the following equation to relate power levels P_1 and P_2:

$$\boxed{G = \log_{10} \frac{P_2}{P_1}} \qquad \text{bel} \tag{11.9}$$

It was found, however, that the bel was too large a unit of measurement for practical purposes, so the decibel (dB) was defined such that 10 decibels = 1 bel. Therefore,

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}} \qquad \mathrm{dB} \qquad (11.10)$$

There exists a second equation for decibels that is applied frequently. It can be best described through the system of Fig. 11.3. For V_i equal to some value V_1, $P_1 = V_1^2/R_i$, where R_i, is the input resistance of the system of Fig. 11.3. If V_i should be increased (or decreased) to some other level, V_2, then $P_2 = V_2^2/R_i$. If we substitute into Eq. (11.10) to determine the resulting difference in decibels between the power levels,

$$G_{\mathrm{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{V_2^2/R_i}{V_1^2/R_i} = 10 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

and

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}} \qquad \mathrm{dB} \qquad (11.12)$$

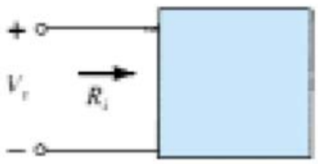


Figure 11.3 Configuration employed in the discussion of Eq. (11.12).

Frequently, the effect of different impedances ($R_1 \neq R_2$) is ignored and Eq. (11.12) applied simply to establish a basis of comparison between levels—voltage or current. For situations of this type, the decibel gain should more correctly be referred to as the voltage or current gain in decibels to differentiate it from the common usage of decibel as applied to power levels.

One of the advantages of the logarithmic relationship is the manner in which it can be applied to cascaded stages. For example, the magnitude of the overall voltage gain of a cascaded system is given by

$$|A_{v_T}| = |A_{v_1}||A_{v_2}||A_{v_3}| \cdots |A_{v_n}| \qquad (11.13)$$

Applying the proper logarithmic relationship results in

$$G_v = 20 \log_{10} |A_{v_T}| = 20 \log_{10} |A_{v_1}| + 20 \log_{10} |A_{v_2}| + 20 \log_{10} |A_{v_3}| + \cdots + 20 \log_{10} |A_{v_n}| \quad \text{(dB)} \tag{11.14}$$

In words, the equation states that the decibel gain of a cascaded system is simply the sum of the decibel gains of each stage, that is,

$$\boxed{G_v = G_{v_1} + G_{v_2} + G_{v_3} + \cdots + G_{v_n}} \quad \text{dB} \tag{11.15}$$

In an effort to develop some association between dB levels and voltage gains, Table 11.2 was developed. First note that a gain of 2 results in a dB level of +6 dB while a drop to $\frac{1}{2}$ results in a -6-dB level. A change in V_o/V_i from 1 to 10, 10 to 100, or 100 to 1000 results in the same 20-dB change in level. When $V_o = V_i$, $V_o/V_i = 1$ and the dB level is 0. At a very high gain of 1000, the dB level is 60, while at the much higher gain of 10,000, the dB level is 80 dB, an increase of only 20 dB—a result of the logarithmic relationship. Table 11.2 clearly reveals that voltage gains of 50 dB or higher should immediately be recognized as being quite high.

TABLE 11.2

Voltage Gain, V_o/V_i	*dB Level*
0.5	−6
0.707	−3
1	0
2	6
10	20
40	32
100	40
1000	60
10,000	80
etc.	

ตัวอย่างที่ 1

Find the magnitude gain corresponding to a decibel gain of 100.

Solution

By Eq. (11.10),

$$G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 100 \text{ dB} \rightarrow \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10$$

so that

$$\frac{P_2}{P_1} = \mathbf{10^{10} = 10{,}000{,}000{,}000}$$

This example clearly demonstrates the range of decibel values to be expected from practical devices. Certainly, a future calculation giving a decibel result in the neighborhood of 100 should be questioned immediately.

ตัวอย่างที่ 2

The input power to a device is 10,000 W at a voltage of 1000 V. The output power is 500 W, while the output impedance is 20 Ω.
(a) Find the power gain in decibels.
(b) Find the voltage gain in decibels.
(c) Explain why parts (a) and (b) agree or disagree.

Solution

(a) $G_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \dfrac{P_o}{P_i} = 10 \log_{10} \dfrac{500 \text{ W}}{10 \text{ kW}} = 10 \log_{10} \dfrac{1}{20} = -10 \log_{10} 20$

$= -10(1.301) = \mathbf{-13.01 \text{ dB}}$

(b) $G_v = 20 \log_{10} \dfrac{V_o}{V_i} = 20 \log_{10} \dfrac{\sqrt{PR}}{1000} = 20 \log_{10} \dfrac{\sqrt{(500 \text{ W})(20\ \Omega)}}{1000 \text{ V}}$

$= 20 \log_{10} \dfrac{100}{1000} = 20 \log_{10} \dfrac{1}{10} = -20 \log_{10} 10 = \mathbf{-20 \text{ dB}}$

(c) $R_i = \dfrac{V_i^2}{P_i} = \dfrac{(1 \text{ kV})^2}{10 \text{ kW}} = \dfrac{10^6}{10^4} = \mathbf{100\ \Omega} \neq R_o = \mathbf{20\ \Omega}$

ตัวอย่างที่ 3

An amplifier rated at 40-W output is connected to a 10-Ω speaker.

(a) Calculate the input power required for full power output if the power gain is 25 dB.

(b) Calculate the input voltage for rated output if the amplifier voltage gain is 40 dB.

Solution

(a) Eq. (11.10): $25 = 10\log_{10}\dfrac{40\text{ W}}{P_i} \Rightarrow P_i = \dfrac{40\text{ W}}{\text{antilog}\,(2.5)} = \dfrac{40\text{ W}}{3.16\times 10^2}$

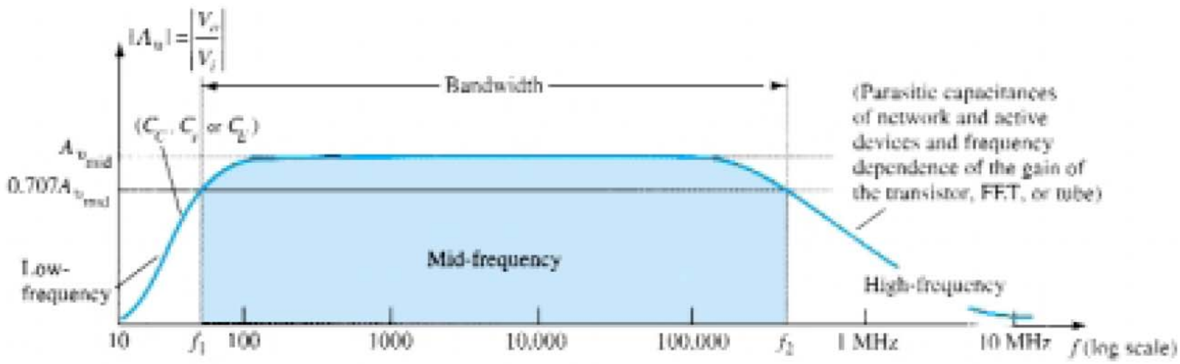
$$= \frac{40\text{ W}}{316} \cong \mathbf{126.5\ mW}$$

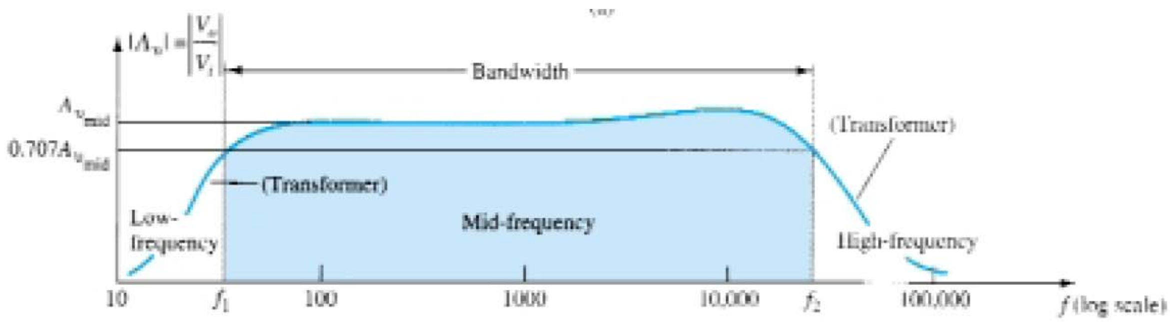
(b) $G_v = 20\log_{10}\dfrac{V_o}{V_i} \Rightarrow 40 = 20\log_{10}\dfrac{V_o}{V_i}$

$$\frac{V_o}{V_i} = \text{antilog } 2 = 100$$

$$V_o = \sqrt{PR} = \sqrt{(40\text{ W})(10\text{ V})} = 20\text{ V}$$

$$V_i = \frac{V_o}{100} = \frac{20\text{ V}}{100} = 0.2\text{ V} = \mathbf{200\ mV}$$





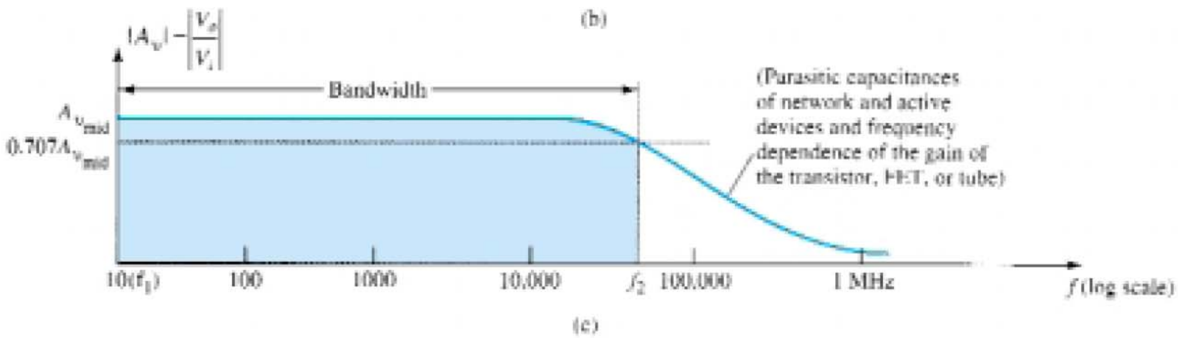


Figure 11.4 Gain versus frequency: (a) *RC*-coupled amplifiers; (b) transformer-coupled amplifiers; (c) direct-coupled amplifiers.

For each system of Fig. 11.4, there is a band of frequencies in which the magnitude of the gain is either equal or relatively close to the midband value. To fix the frequency boundaries of relatively high gain, $0.707A_{v_{\text{mid}}}$ was chosen to be the gain at the cutoff levels. The corresponding frequencies f_1 and f_2 are generally called the *corner, cutoff, band, break,* or *half-power frequencies*. The multiplier 0.707 was chosen because at this level the output power is half the midband power output, that is, at midfrequencies,

$$P_{o_{\text{mid}}} = \frac{|V^2{}_o|}{R_o} = \frac{|A_{v_{\text{mid}}} V_i|^2}{R_o}$$

and at the half-power frequencies,

$$P_{o_{HPF}} = \frac{|0.707A_{v_{\text{mid}}} V_i|^2}{R_o} = 0.5\,\frac{|A_{v_{\text{mid}}} V_i|^2}{R_o}$$

and

$$\boxed{P_{o_{HPF}} = 0.5P_{o_{\text{mid}}}} \tag{11.16}$$

The bandwidth (or passband) of each system is determined by f_1 and f_2, that is,

$$\boxed{\text{bandwidth (BW)} = f_2 - f_1} \tag{11.17}$$

For applications of a communications nature (audio, video), a decibel plot of the voltage gain versus frequency is more useful than that appearing in Fig. 11.4. Before obtaining the logarithmic plot, however, the curve is generally normalized as shown in Fig. 11.5. In this figure, the gain at each frequency is divided by the midband value. Obviously, the midband value is then 1 as indicated. At the half-power frequencies, the resulting level is $0.707 = 1/\sqrt{2}$. A decibel plot can now be obtained by applying Eq. (11.12) in the following manner:

$$\boxed{\left.\frac{A_v}{A_{v_{\text{mid}}}}\right|_{\text{dB}} = 20\log_{10}\frac{A_v}{A_{v_{\text{mid}}}}} \tag{11.18}$$

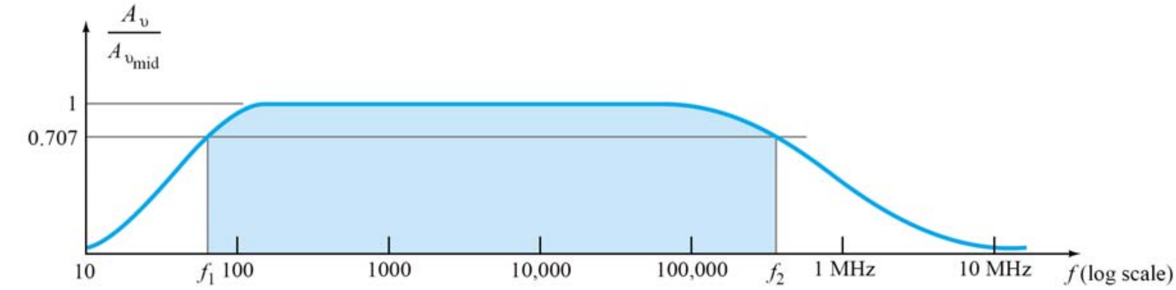


Figure 11.5 Normalized gain versus frequency plot.

At midband frequencies, 20 $\log_{10}$ 1 = 0, and at the cutoff frequencies, 20 $\log_{10}$ $1/\sqrt{2} = -3$ dB. Both values are clearly indicated in the resulting decibel plot of Fig. 11.6. The smaller the fraction ratio, the more negative the decibel level.

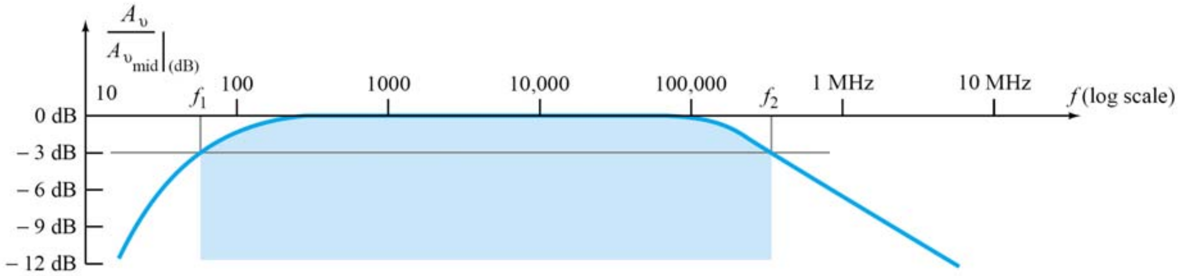


Figure 11.6 Decibel plot of the normalized gain versus frequency plot of Fig. 11.5.

10.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลการตอบสนองทางความถี่

s-Domain analysis Poles, Zeros and Bode Plots

$$T(s) = A_o \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{z2}}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{\omega_{pn}}\right)} \tag{10.1}$$

10.3 Bode Plots

Bode plot คือ การพร็อตกราฟเซมิล็อกของอัตราขยายมีหน่วยเป็นเดซิเบล และเฟสที่อยู่ในหน่วยดีกรีของฟังก์ชันถ่ายโอนเทียบกับความถี่ เราสามารถเขียนสมการฟังก์ชันถ่ายโอนอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$T(s) = T\angle\phi = Te^{j\phi} \tag{10.2}$$

ซึ่งอัตราขยายที่มีหน่วยเป็นเดซิเบลสามารถหาได้จากสมการ

$$T_{dB} = 20\log T(s) \tag{10.3}$$

ตารางที่ 10.3-1 แสดงตารางแปลงค่าขนาดเป็นเดซิเบล

Magnitude, *T*	20log*T* (*dB*)	Magnitude, *T*	*20logT* (*dB*)
0.001	-60	$\sqrt{2}$	3
0.01	-40	2	6
0.1	-20	10	20
0.5	-6	20	26
$1/\sqrt{2}$	-3	100	40
1.0	0	1,000	60

เราสามารถพร็อตกราฟโบเดได้จากสมการ

$$T(j\omega)=\frac{1}{1+j\left(\omega/\omega_0\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2}}\angle\tan^{-1}\left(\omega/\omega_0\right)=T\angle\phi \qquad (10.4)$$

อัตราขยายที่อยู่ในหน่วยเดซิเบลมีค่าเท่ากับ

$$T(dB)=20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2}} \qquad (10.5)$$

$$=20\log 1-20\log\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2}=-20\log\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2} \qquad (10.6)$$

ในกรณีที่เราพิจารณาที่ความถี่ต่ำ $\omega << \omega_0$

$$1+\left(\omega/\omega_0\right)^2\cong 1 \qquad (10.7)$$

ดังนั้น อัตราขยายที่อยู่ในหน่วยเดซิเบลมีค่าประมาณเท่ากับ

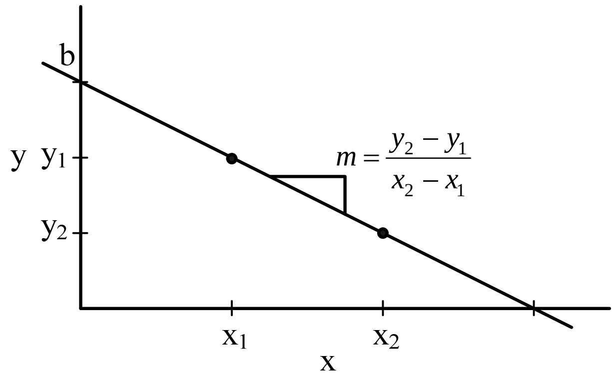
$$T(dB)=-20\log\sqrt{1}=0dB \qquad (10.8)$$

ในกรณีที่เราพิจารณาที่ความถี่สูง $\omega >> \omega_0$

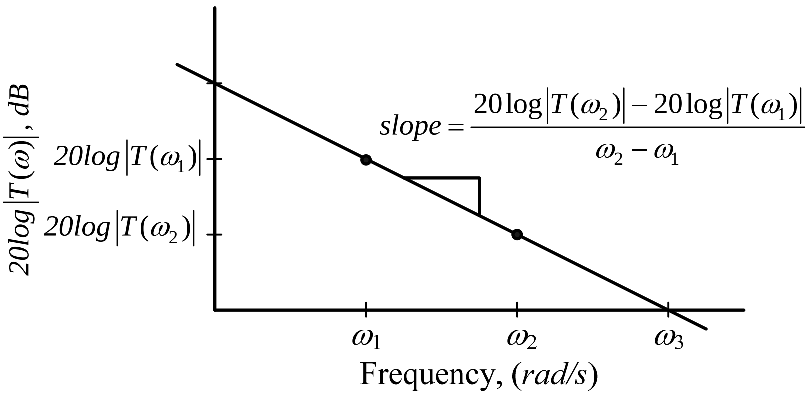
$$1+\left(\omega/\omega_0\right)^2\cong\left(\omega/\omega_0\right)^2 \qquad (10.9)$$

$$T(dB)=-20\log\sqrt{1+\left(\omega/\omega_0\right)^2} \qquad (10.10)$$

$$=-20\log\left(\omega/\omega_0\right)=20\log\omega_0-20\log\omega \qquad (10.10)$$



(a)



(b)

รูปที่ 10.3

จากกราฟในรูปที่ 10.3 ความถี่ ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 อยู่ x decade หรือ $\omega_2 = 10^x\omega_1$ ซึ่งค่า x = log(ω_2/ω_1) decade

ตัวอย่างที่ 10.1. ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 อยู่กี่ decade

(ก) ω_1 = 10 rad/s, ω_2 = 1000 rad/s

(ข) ω_1 = 10 rad/s, ω_2 = 316 rad/s

วิธีทำ

ระยะห่างระหว่าง ω_1 กับ ω_2 หาได้จากสกมาร x = log(ω_2/ω_1) ดังนั้น

(ก) ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 เท่ากับ x = log(1000/10)

= 2 decade

(ข) ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 เท่ากับ x = log(316/10)

= 1.5 decade

10.3.1 Magnitude plot

สมการฟังก์ชันถ่ายโอนในที่อยู่ในโดเมนของ s สามารถเขียนอยู่ในเทอมของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{K(j\omega)^{\pm 1}(1 + j\omega/z_1)\left[1 + j2\zeta_1\omega/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2\right]\cdots}{(1 + j\omega/p_1)\left[1 + j2\zeta_2\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2\right]\cdots} \tag{10.11}$$

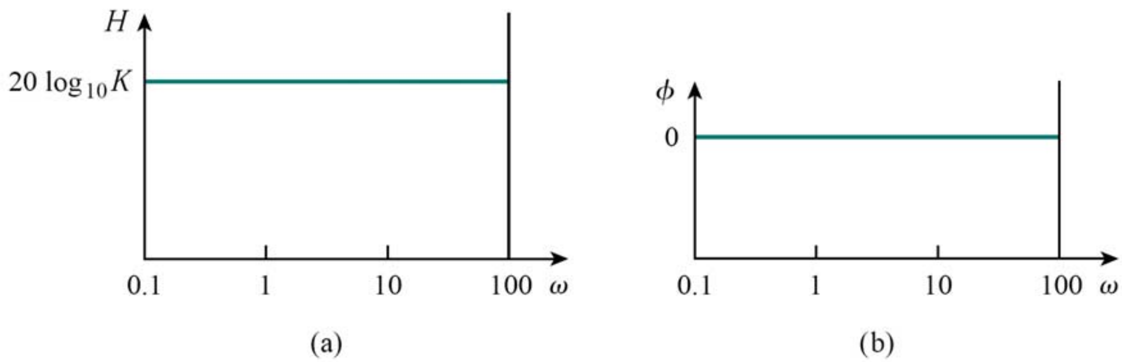
จากสมการที่ 10.11 เราสามารถหาค่าอัตราขยาย, โพล และซีโรได้ ได้ดังนี้

1. K คือ อัตราขยาย
2. ตำแหน่งของโพล $(j\omega)^{-1}$ หรือซีโร $(j\omega)$ อยู่ที่จุดกำเนิด
3. $1/[1 + (j\omega/p_1)]$ คือ รูปแบบทั่วไปของโพล และ $[1 + (j\omega/z_1)]$ คือ รูปแบบทั่วไปของซีโร่
4. $1/[1 + (j2\zeta_2\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_k)^2]$ คือสมการกำลังสองของโพล และ $[1 + (j2\zeta_1\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_k)^2]$ คือสมการกำลังสองของซีโร่

ในการวาดกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนจะเริ่มจากการแยกวาดกราฟตัวประกอบของฟังก์ชันถ่ายโอนแต่ละค่าแล้วนำกราฟแต่ละกราฟมารวมกัน ซึ่งตัวประกอบของฟังก์ชันถ่ายโอนจะประกอบด้วย

1. ค่าคงที่ (constant term)

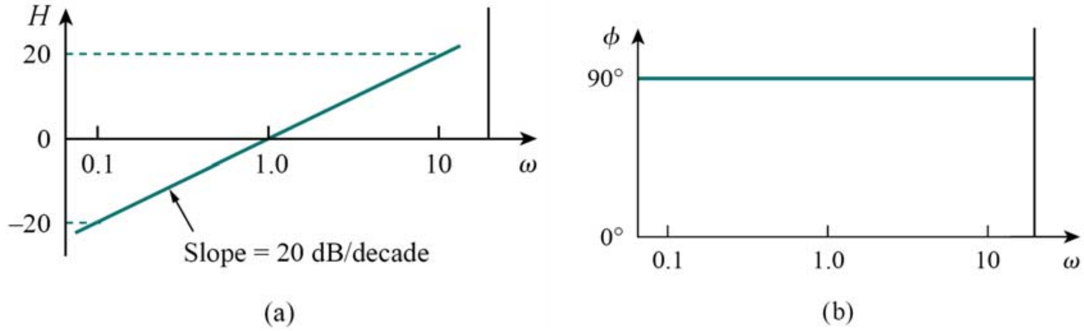
ในการวาดขนาดและเฟสของอัตราขยาย (K) เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ 20logK และมีค่าเฟสเท่ากับ 0° ในรูปที่ 10.4 แสดงกราฟขนาด และเฟส ซึ่งมีค่าคงที่ทุกความถี่ ถ้าอัตราขยายมีค่าเป็นลบ ขนาดของอัตราขยายมีค่าเท่ากับ 20log|K| และมีค่าเฟสเท่ากับ $\pm 180^{\circ}$



รูปที่ 10.4 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

2. โพลและซีโรที่จุดศูนย์กลาง

ในการวาดขนาดและเฟสของซีโร่ $(j\omega)$ เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ 20log$j\omega$ และมีค่าเฟสเท่ากับ 90° ในรูปที่ 10.5 แสดงกราฟขนาด และเฟส ซึ่งความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ 20dB/decade ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่ การวาดขนาดและเฟสของโพล $(j\omega)^{-1}$ ความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ -20dB/decade ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่เท่ากับ -90° และสำหรับค่าการวาดกราฟ $(j\omega)^{N}$ เมื่อ N คือ จำนวนเต็ม ความชันของขนาดมีค่าเท่ากับ 20NdB/decade ขณะที่เฟสของซีโรมีค่าคงที่เท่ากับ $90N^{\circ}$



รูปที่ 10.5 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

3. สมการโพลและซีโร่รูปทั่วไป

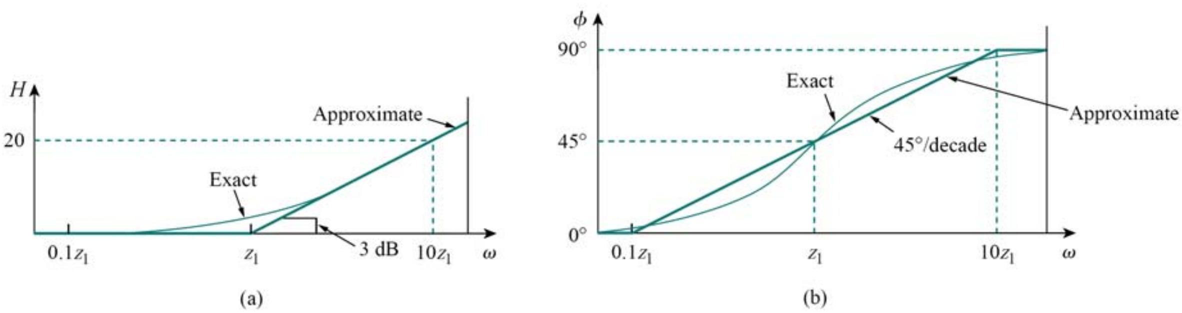
ในการวาดขนาดและเฟสของซีโร่ $[1 + (j\omega/z_1)]$ เริ่มจากการหาค่าขนาดได้จากสมการ $20\log[1 + (j\omega/z_1)]$ และมีค่าเฟสเท่ากับ $\tan^{-1}(\omega/z_1)$ ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากสมการ 10.12 มีค่าเท่ากับ

$$T_{dB} = 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{z_1}\right| \tag{10.12}$$

เมื่อ $\omega = 0$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = 20\log 1 = 0$ และ เมื่อ $\omega = \infty$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = 20\log\frac{\omega}{z_1}$

เราสามารถวาดกราฟขนาดของสมการด้วยการประมาณค่าได้ เนื่องจากค่าขณะที่ ω มีค่าน้อยขนาดของสมการมีค่าเท่าศูนย์ และมีลักษณะเป็นเส้นตรงเมื่อ ω มีค่ามาก ๆ ซึ่งความชันของกราฟมีค่าเท่ากับ 20dB/decade กรณีที่ความถี่ $\omega = z_1$ เกิดการเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นอซิลโทรป เราจะเรียกว่าความถี่มุม ในรูปที่ 10.6 (a) แสดงกราฟเส้นตรงของขนาดด้วยการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง ซึ่งค่าประมาณที่ได้มีค่าใกล้เคียงความจริงมาก และมีค่าเบียงแบนเท่ากับ $20\log|(1 + j)| = 20\log\sqrt{2} = 3\text{dB}$ ค่าเฟสของฟังก์ชันถ่ายโอนแต่ละความถี่มีค่าเท่ากับ

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z_1}\right) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ 45^\circ, & \omega = z_1 \\ 90^\circ, & \omega \to \infty \end{cases} \tag{10.13}$$



รูปที่ 10.6 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

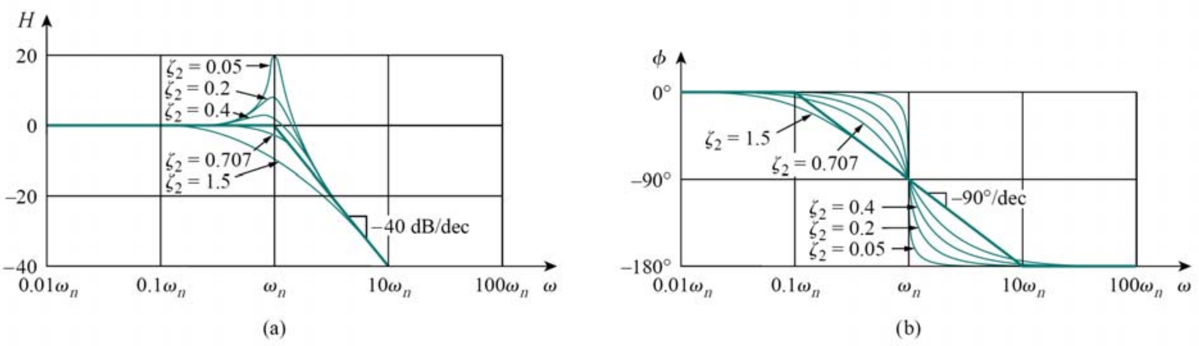
เนื่องจากกราฟโบเดเป็นการประมาณค่า ดังนั้น เราสามารถประมาณค่า $\phi \simeq 0$ เมื่อ $\omega \leq z_1/10$, $\phi \simeq 45^\circ$ เมื่อ $\omega = z_1$, และ $\phi \simeq 90^\circ$ เมื่อ $\omega \geq 10z_1$ รูปที่ 10.6 (b) แสดงลักษณะของกราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง ซึ่งมีความชันเท่ากับ 45 deg/decade รูปที่ 10.6 แสดงกราฟขนาด และเฟสของโพลของสมการ $1/[1 + (j\omega/p_1)]$ ซึ่งความถี่มุมของสมการคือ $\omega = p_1$ และความชันของกราฟขนาดมีค่าเท่ากับ -20dB/decade และเฟสมีความชันเท่ากับ -45 deg/decade

สมการโพลและซีโรที่ยกกำลังสอง

ขนาดของสมการ $1/[1 + (j2\zeta_2\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_k)^2]$ ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าเท่ากับ

$$T_{dB} = -20\log\left|1 + \frac{j2\zeta_2\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{z_1}\right)^2\right| \tag{10.14}$$

เมื่อ $\omega = 0$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = 20\log 1 = 0$ และ เมื่อ $\omega = \infty$ อัตราขยายมีค่าเท่ากับ $T_{dB} = -40\log\frac{\omega}{\omega_n}$



รูปที่ 10.7 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ดังนั้น กราฟอัตราขยายจะประกอบด้วยเส้นอซิลโทรปสองเส้น คือ 1) เมื่อ $\omega < \omega_n$ เส้นที่หนึ่งความชันเท่ากับศูนย์ และ 2) เมื่อ $\omega > \omega_n$ ค่าอื่น ๆ ของกราฟมีความชันเท่ากับ -40dB/decade ซึ่ง ω_n คือ ความถี่มุม รูปที่ 10.7 (a) แสดงลักษณะของกราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าและได้จากการคำนวณถูกต้อง ซึ่งค่าของขนาดและเฟสของกราฟที่ได้จากการคำนวณถูกต้องจะขึ้นอยู่กับค่าปัจจัยความหน่วง ζ_2 ถ้าออกแบบให้กราฟถูกต้องมากขึ้นค่าพีคในบริเวณใกล้กับความถี่มุมจะถูกเพิ่มขึ้นด้วยการออกแบบค่าปัจจัยความหน่วง ζ_2 ให้เหมาะสม อย่างไรก็ตาม เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาเราจะใช้เส้นกราฟที่จากการประมาณค่า

เฟสของสมการสามารถพิจารณาได้จากสมการ 10.15

$$\phi = -\tan^{-1}\frac{2\zeta_2(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2} = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_n \\ -180^\circ, & \omega \to \infty \end{cases} \tag{10.15}$$

รูปที่ 10.7 (b) แสดงกราฟเฟสมีลักษณะเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 90 deg/decade ซึ่งเริ่มต้นที่ $\omega_n/10$ และสิ้นสุดที่ $10\omega_n$ ข้อแตกต่างของกราฟอัตราขยายระหว่างเส้นที่ได้จากการคำนวณถูกต้องกับเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าคือค่าความหน่วง เราสังเกตุเห็นได้ว่า กราฟเส้นตรงของขนาดและเฟสที่ได้

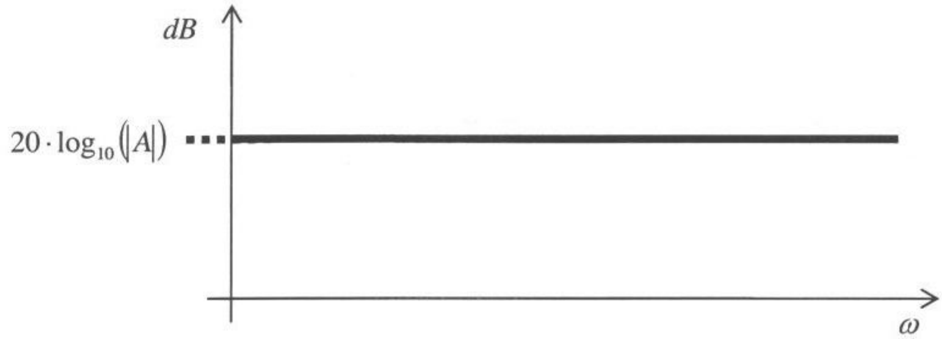
จากการประมาณค่าของสมการโพลที่ยกกำลังสองคือค่าเดียวกับค่าที่มีสองโพล $[1 + (j\omega/\omega_n)]^2$ อันเนื่องมาจาก เมื่อค่า $\zeta_2 = 1$, $[1 + (j\omega/\omega_n)]^2 = [1 + j2\zeta_2(\omega/\omega_k) + (j\omega/\omega_k)^2]$ ดังนั้น กราฟเส้นตรงที่ได้จากการประมาณค่าของสมการโพลที่ยกกำลังสองสามารถวาดเหมือนกับค่าที่มีสองโพลคือค่าวิกฤต

กราฟขนาดของสมการซีโรยกกำลังสอง $[1 + j2\zeta_1(\omega/\omega_k) + (j\omega/\omega_k)^2]$ เป็นค่าตรงข้ามกับในรูปที่ 10.7 เพราะกราฟขนาดมีความชัน 40 dB/decade และกราฟเฟสมีความชันเท่ากับ 90 deg/decade

สรุปการวาดกราฟโบเดพร็อต

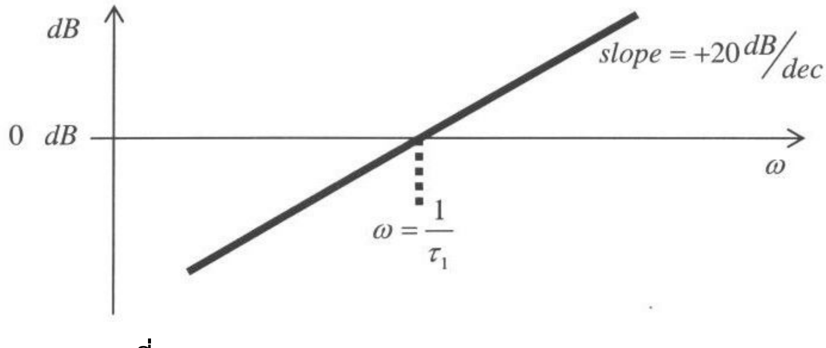
Bode magnitude plots

1. $20 \cdot \log_{10}(|A|)$, *where A is a real number*



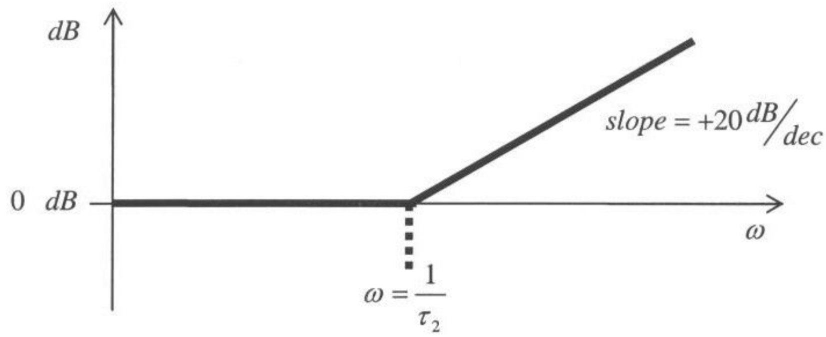
รูปที่ 10.8 Bode plot **of** magnitude plot

2. $20 \cdot \log_{10}(|j \cdot \omega \cdot \tau_1|)$, *where τ_1 is a real number*



รูปที่ 10.9 Bode plot of magnitude plot

3. $20 \cdot \log_{10}(|(1 \pm j \cdot \omega \cdot \tau_2)|)$, *where* τ_2 *is a real number*



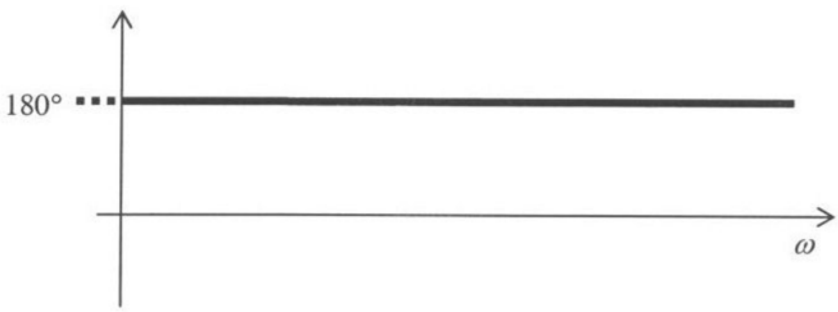
รูปที่ 10.10 Bode plot of magnitude plot

Bode Phase plots

1. $\angle A$, *where* A *is a positive real number*

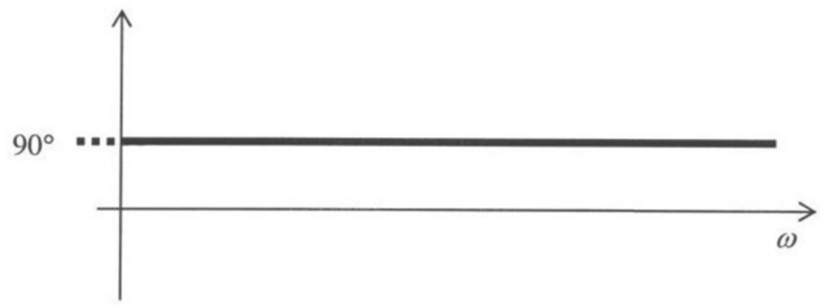
รูปที่ 10.11 Bode plot of phase plot

2. $\angle B$, *where* B *is a negative real number*



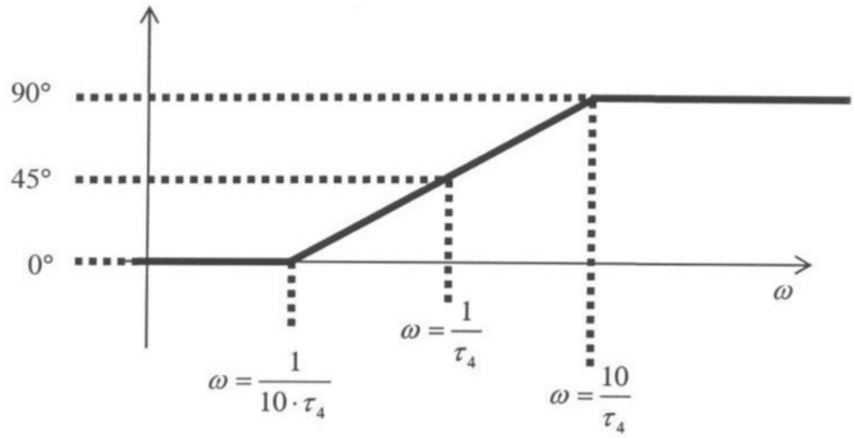
รูปที่ 10.12 Bode plot of phase plot

3. $\angle\ (j \cdot \omega \cdot \tau_3)$, *where* τ_3 *is a real number*



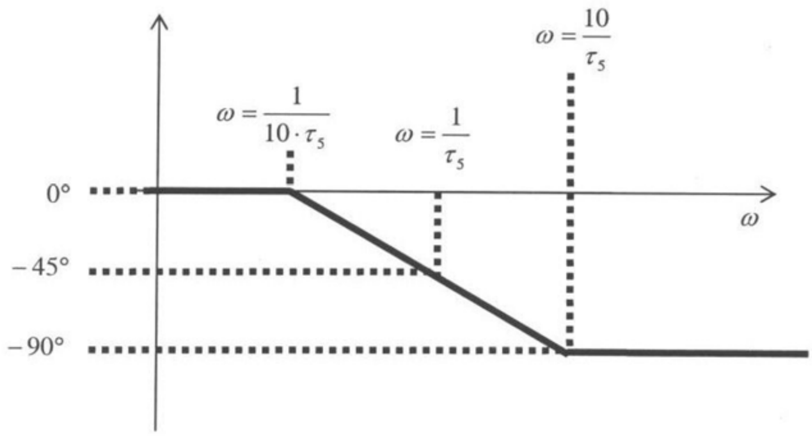
รูปที่ 10.13 Bode plot of phase plot

4. $\angle\ (1 + j \cdot \omega \cdot \tau_4)$, *where* τ_4 *is a real number*



รูปที่ 10.14 Bode plot of phase plot

5. $\angle\ (1 - j \cdot \omega \cdot \tau_5)$, *where* τ_5 *is a real number*



รูปที่ 10.15 Bode plot of phase plot

ตารางที่ 10.3-2 ผลรวมของกราฟขนาดและเฟสโบเด

TABLE 14.3 Summary of Bode straight-line magnitude and phase plots.

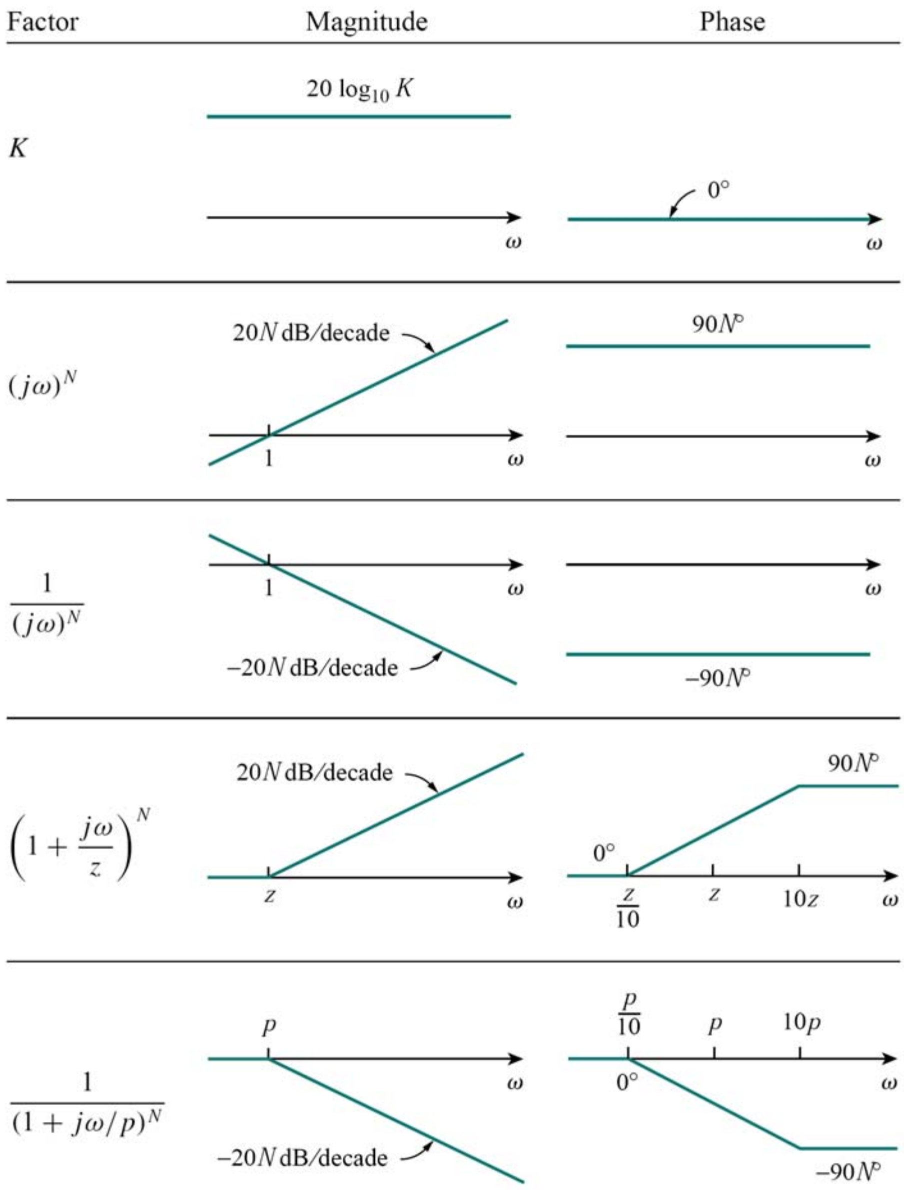
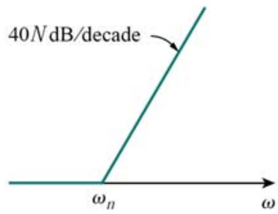
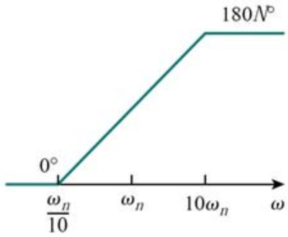
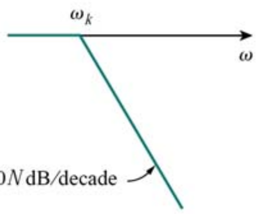
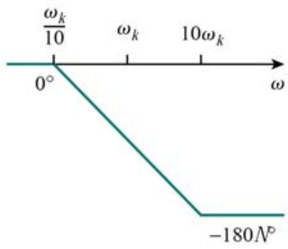


TABLE 14.3 *(continued)*

Factor	Magnitude	Phase
$\left[1+\frac{2j\omega\zeta}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$		
$\frac{1}{[1+2j\omega\zeta/\omega_k+(j\omega/\omega_k)^2]^N}$		

ตัวอย่างที่ 10.2 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s)=\frac{5.82\times10^{6}}{8.1\times10^{5}+s(4\times10^{-5})} \tag{10.16}$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.16 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega)=\frac{7.185}{1+(j\omega/4.938\times10^{11})} \tag{10.17}$$

ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

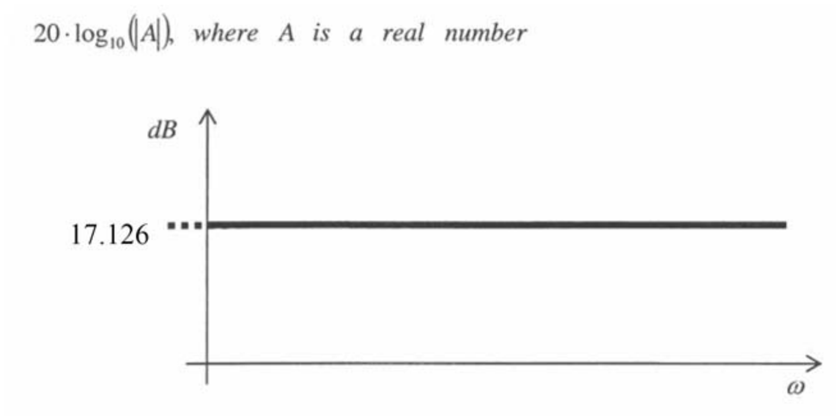
$$T_{dB}=20\log7.185-20\log\left|1+\frac{j\omega}{4.938\times10^{11}}\right| \tag{10.18}$$

และ

$$\phi=0^\circ-\tan^{-1}\frac{\omega}{4.938\times10^{11}} \tag{10.19}$$

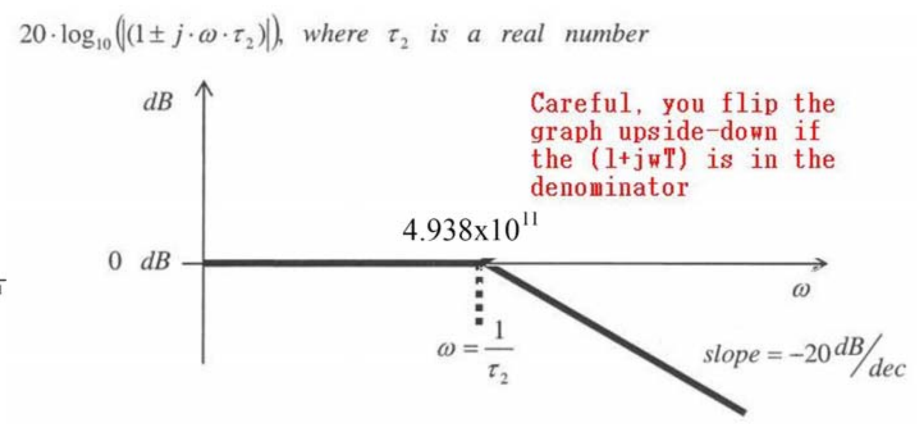
Just adding all the plots. 20 log(7.185) = 17.126.

For 7.185



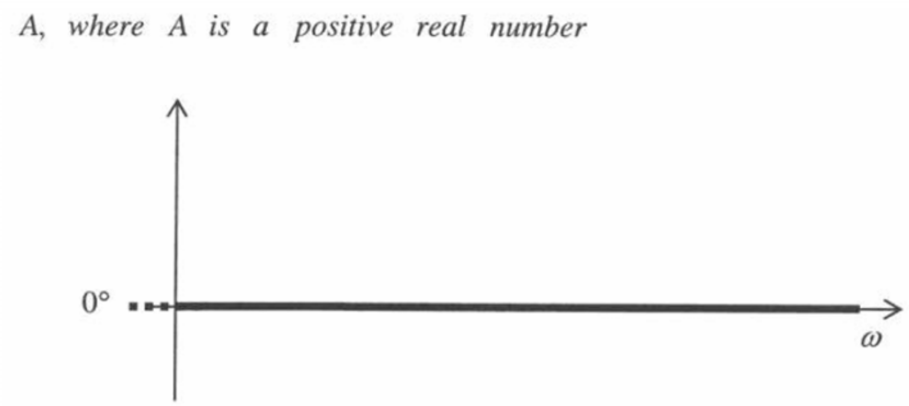
รูปที่ 10.16 Magnitude plot

For $1 + \frac{jw}{4.938x10^{11}}$

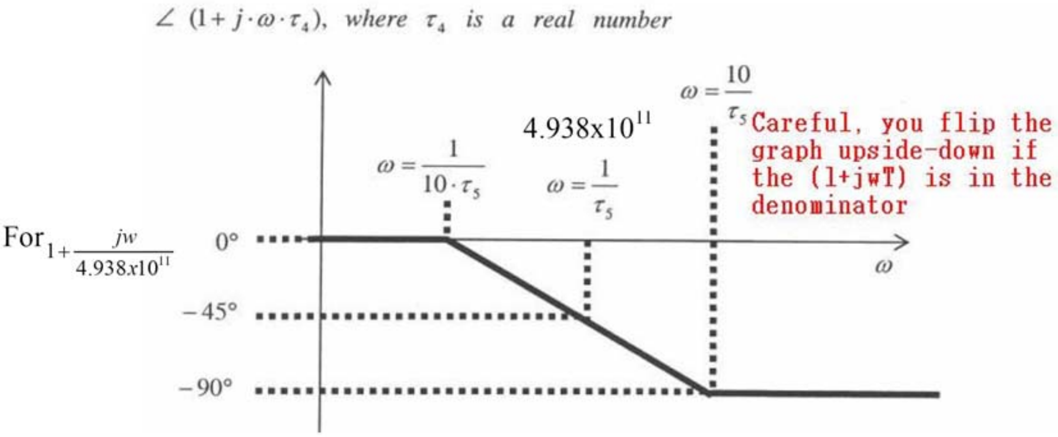


รูปที่ 10.17 Magnitude plot

For 7.185



รูปที่ 10.18 Phase plot



รูปที่ 10.19 Phase plot

ตัวอย่างที่ 10.3 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{100s + 100}{0.01s^2 + 0.11s + 10} \qquad (10.20)$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.20 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{10(1 + j\omega)}{[1 + (j\omega/10)][1 + (j\omega/100)]} \qquad (10.21)$$

ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

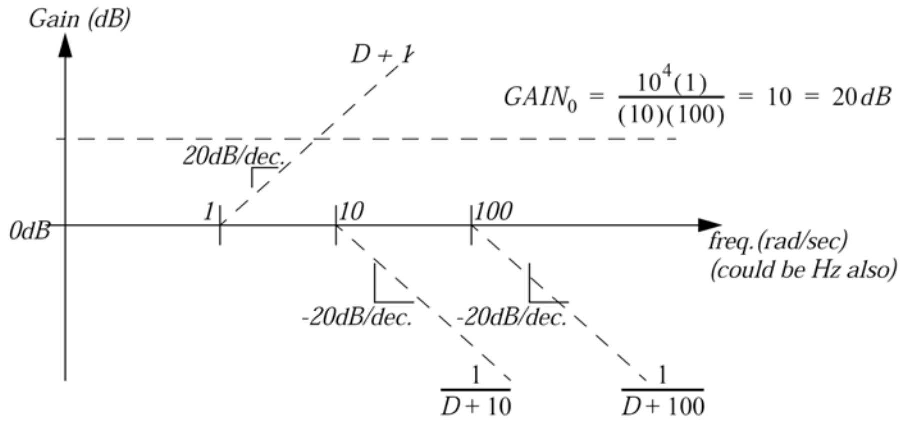
$$T_{dB} = 20\log 10 + 20\log\left|1 + j\omega\right| - 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right| - 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{100}\right| \qquad (10.22)$$

และ

$$\phi = \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{100} \qquad (10.23)$$

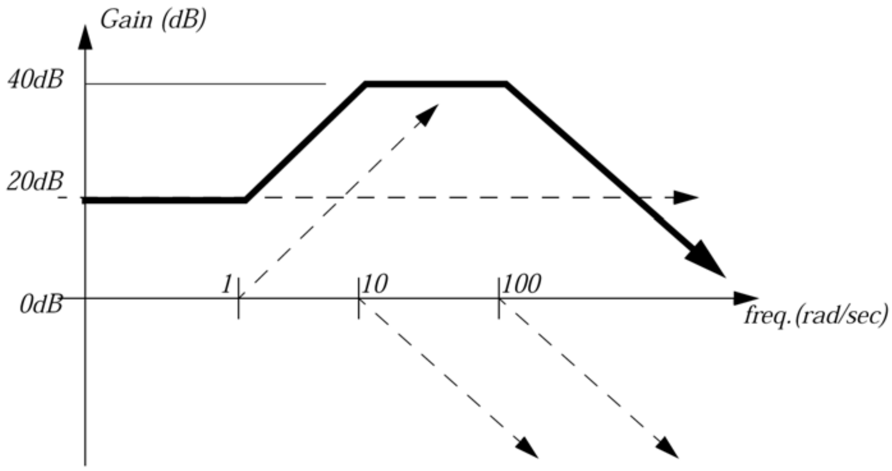
$$G(D) = \frac{100D + 100}{0.01D^2 + 0.11D + 10} = \frac{10^4(D+1)}{(D+10)(D+100)}$$ *(the equation is put in root forn*

Step 1: Draw lines for each of the terms in the transfer function,



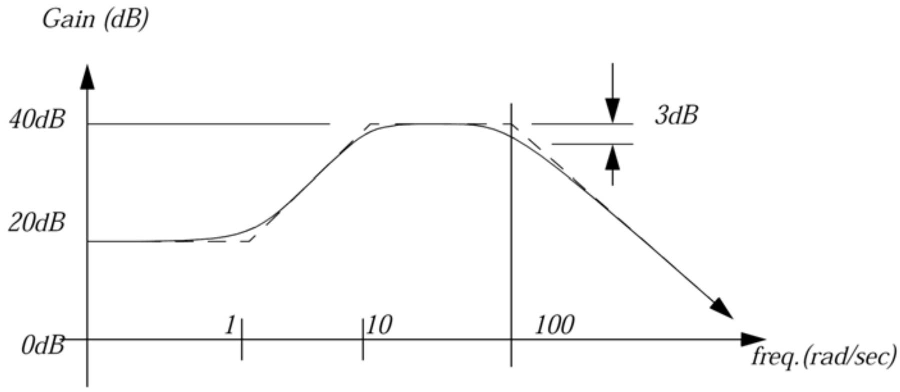
รูปที่ 10.20 Magnitude plot

Step 2: Sum the individual lines, and get the straight line approximation,



รูปที่ 10.21 Magnitude plot

Step 3: Draw the smooth curve (leaving 3dB at the corners),

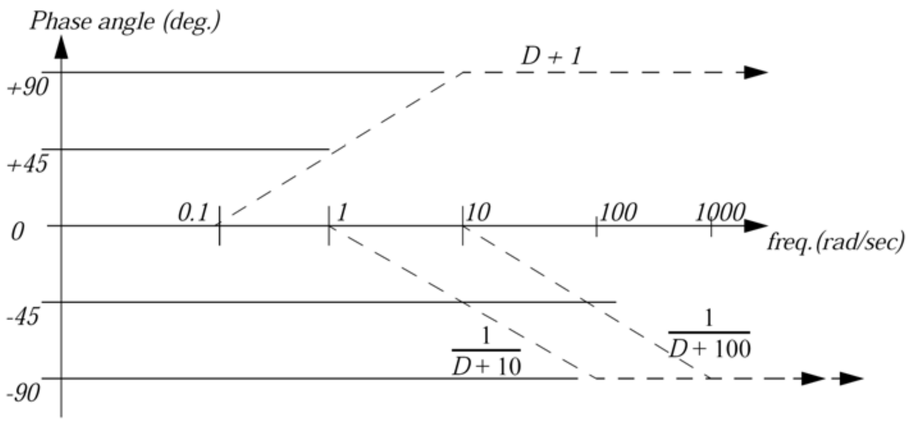


รูปที่ 10.22 Magnitude plot

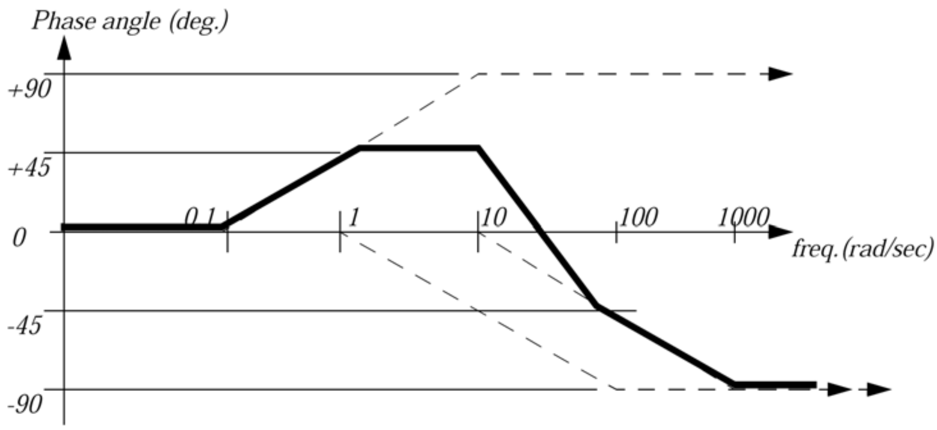
Phase plot

$$G(D) = \frac{10^4(D+1)}{(D+10)(D+100)}$$

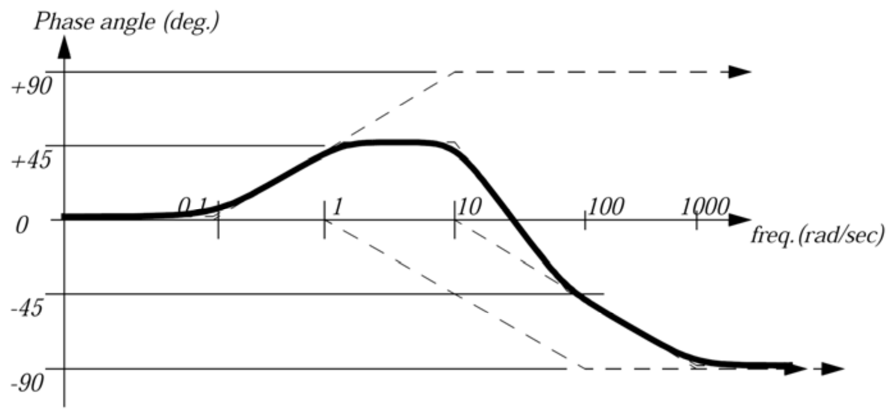
Step 1: Draw lines for each of the terms in the transfer function



รูปที่ 10.23 Phase plot



รูปที่ 10.24 Phase plot



รูปที่ 10.25 phase plot

ตัวอย่างที่ 10.4 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s)=\frac{200s}{(s+2)(s+10)} \tag{10.24}$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.24 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega)=\frac{10j\omega}{[1+(j\omega/2)][1+(j\omega/10)]} \tag{10.25}$$

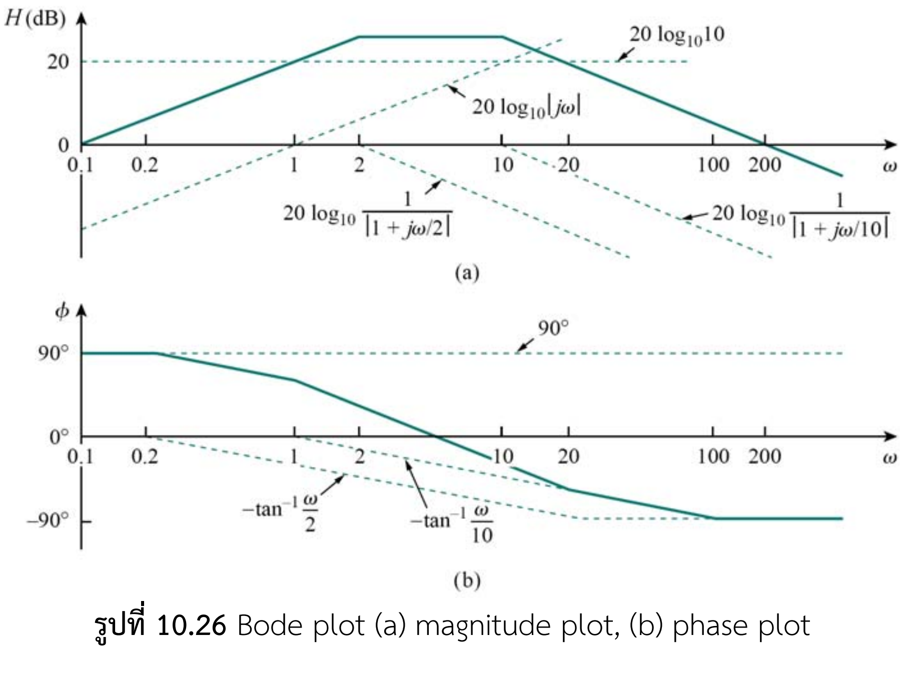
ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$T_{dB}=20\log 10+20\log|j\omega|-20\log\left|1+\frac{j\omega}{2}\right|-20\log\left|1+\frac{j\omega}{10}\right| \tag{10.26}$$

และ

$$\phi=90^{\circ}+\tan^{-1}\frac{\omega}{2}-\tan^{-1}\frac{\omega}{10} \tag{10.27}$$

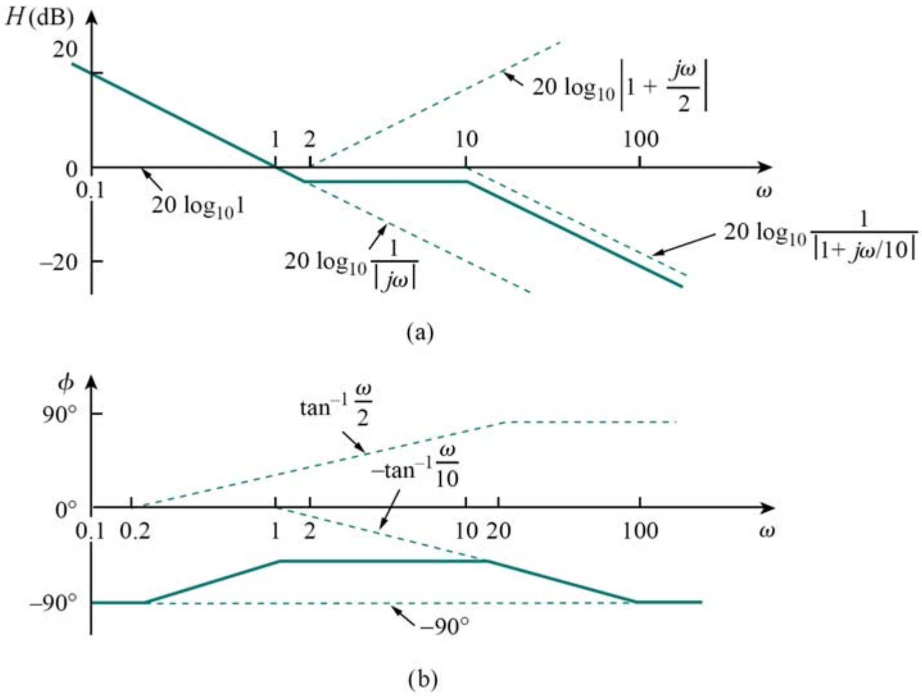
ความถี่มุมของฟังก์ชันถ่ายโอนมี 2 ค่า คือ ω = 2, 10 rad/s รูปที่ 10.26 แสดงกราฟโบเดพร็อต ซึ่งรูป (a) แสดงกราฟขนาด และ (b) แสดงกราฟดฟสของฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ 10.24



รูปที่ 10.26 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.5 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s)=\frac{5(s+2)}{s(s+10)} \tag{10.28}$$



รูปที่ 10.27 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.6 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s)=\frac{s+10}{s(s+5)^2} \tag{10.29}$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.29 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega)=\frac{0.4[1+(j\omega/10)]}{j\omega(1+j\omega/5)^2} \tag{10.30}$$

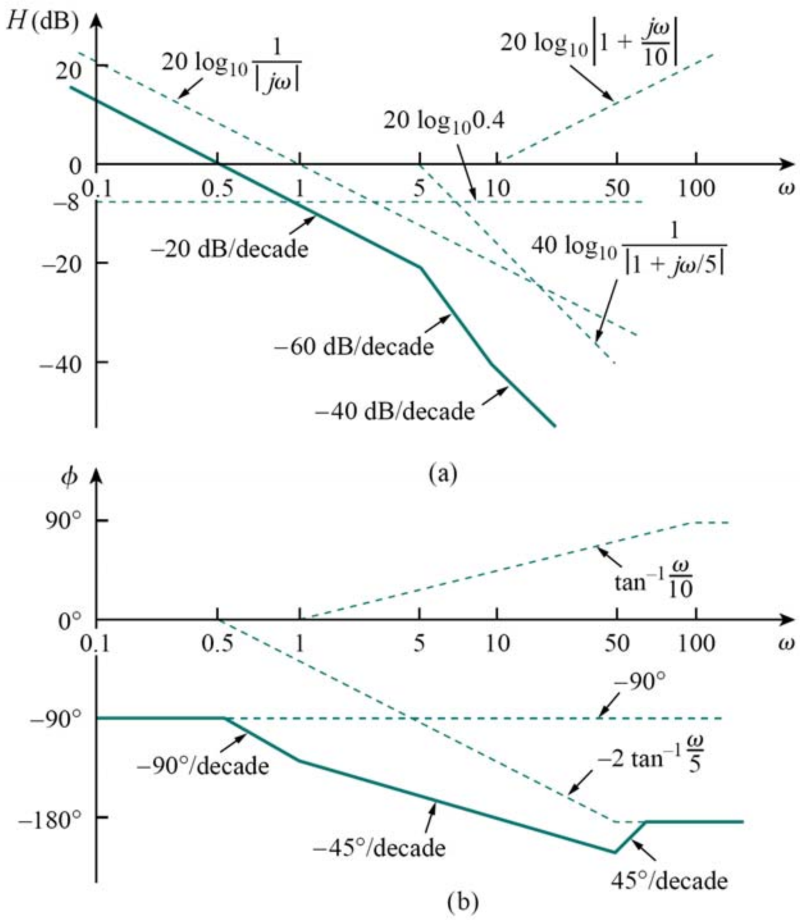
สำหรับ ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$T_{dB}=20\log 0.4+20\log\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|-20\log j\omega-40\log\left|1+\frac{j\omega}{5}\right| \tag{10.31}$$

และ

$$\phi=0^\circ+\tan^{-1}\frac{\omega}{10}-90^\circ-2\tan^{-1}\frac{\omega}{5} \tag{10.32}$$

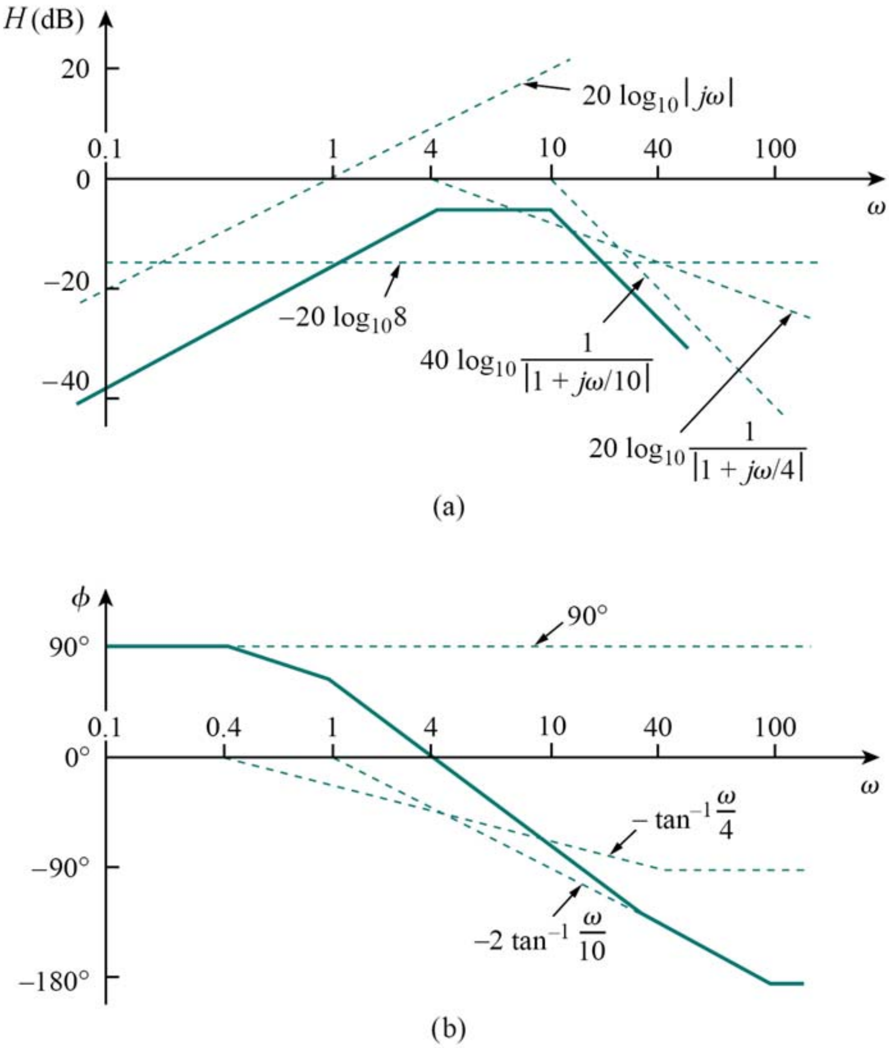
ความถี่มุมของฟังก์ชันถ่ายโอนมี 2 ค่า คือ ω = 5, 10 rad/s ซึ่งความถี่โพลอยู่ที่ ω = 5 rad/s มีความชันของขนาดเท่ากับ -40 dB/decade และมีเฟส เท่ากับ 90 deg/decade รูปที่ 10.28 แสดงกราฟโบเดพร็อต ซึ่งรูป (a) แสดงกราฟขนาด และ (b) แสดงกราฟดฟสของฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ 10.29



รูปที่ 10.28 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.7 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{50s}{(s+4)(s+10)^2} \tag{10.33}$$



รูปที่ 10.29 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.8 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{s+1}{s^2 + 60s + 100} \tag{10.34}$$

วิธีทำ

จากสมการที่ 10.34 แทนค่า $s = j\omega$ และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{(1/100)(1 + j\omega)}{1 + (j\omega 6/10) + (j\omega/10)^2} \tag{10.35}$$

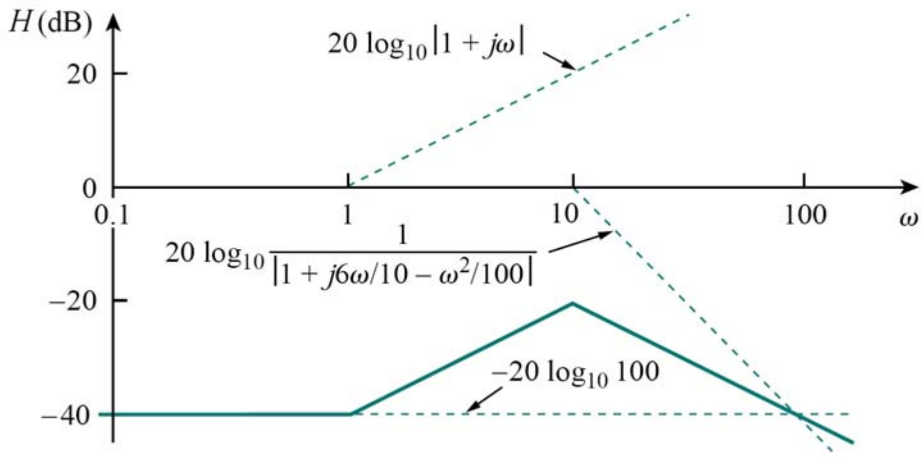
สำหรับสมการกำลังสองของโพล, ω_n = 10 rad/s ซึ่งทำหน้าที่เป็นความถี่มุม ดังนั้น ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

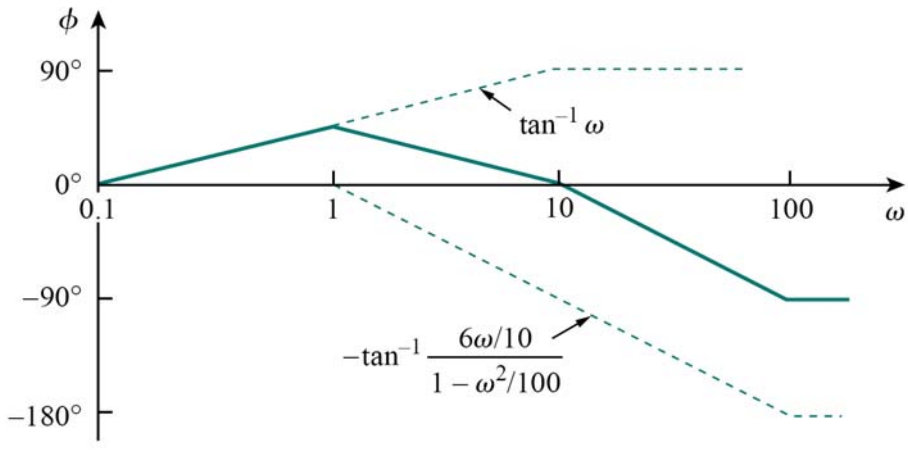
$$T_{dB} = -20\log 100 + 20\log\left|1 + j\omega\right| - 20\log\left|1 + \frac{j\omega 6}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right| \tag{10.36}$$

และ

$$\phi = 0^\circ + \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left|\frac{\omega 6/10}{1-(\omega^2/10)}\right| \tag{10.37}$$

รูปที่ 10.30 แสดงกราฟโบเดพร็อต ซึ่งรูป (a) แสดงกราฟขนาด และ (b) แสดงกราฟดฟสของฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ 10.34

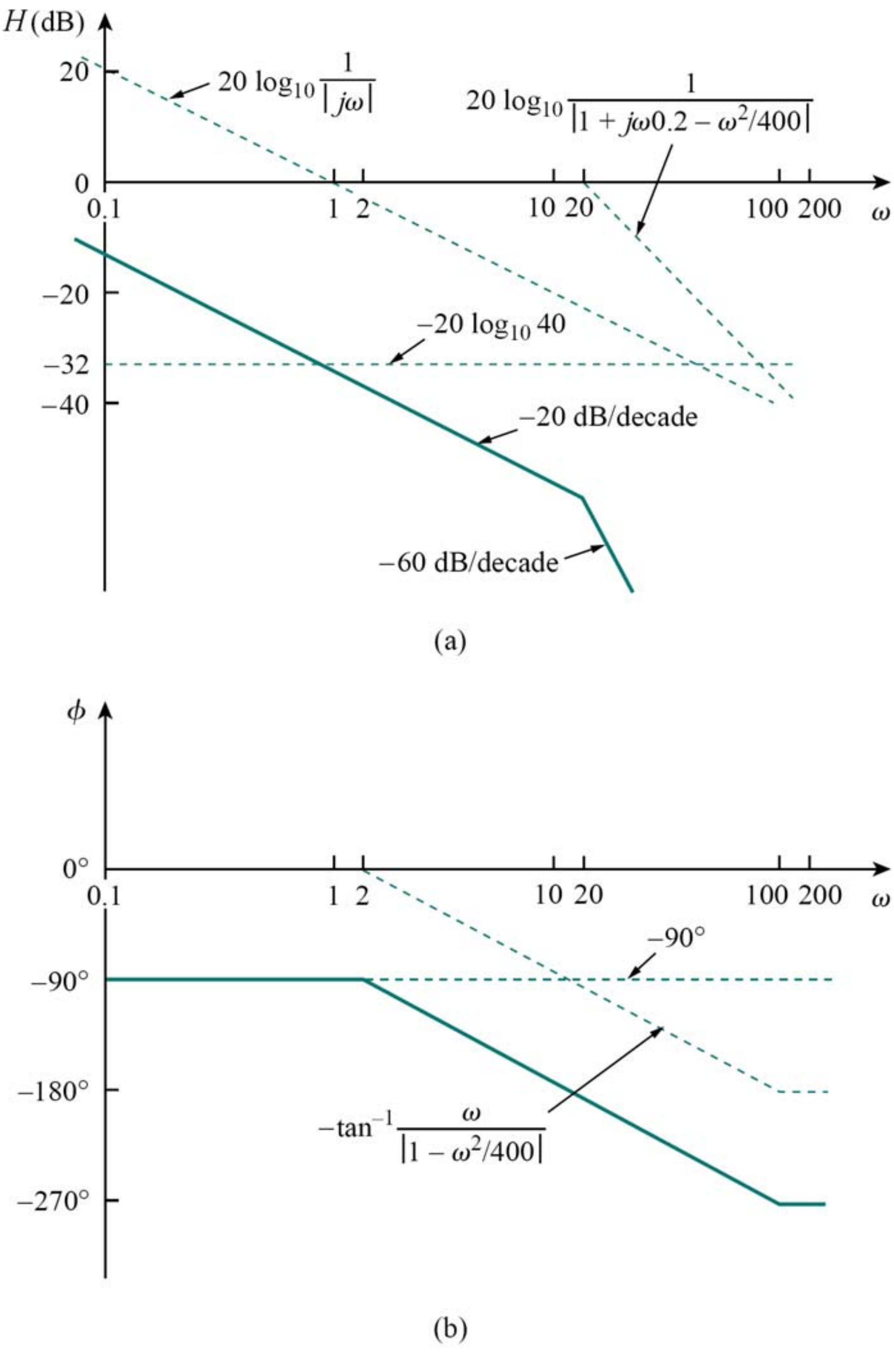




รูปที่ 10.30 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

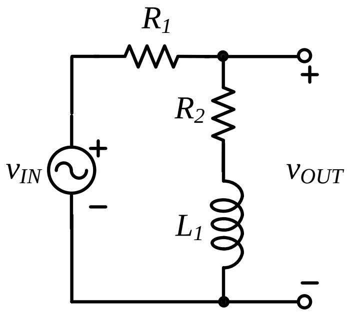
ตัวอย่างที่ 10.9 จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{10}{s(s^2 + 80s + 400)} \tag{10.38}$$



รูปที่ 10.31 Bode plot (a) magnitude plot, (b) phase plot

ตัวอย่างที่ 10.10 จงพร็อตกราฟโบเดของวงจรในรูปที่ 10.33 กำหนดให้ $R_1 = R_2 = 10k\Omega$ และ $L_1 = 1mH$



รูปที่ 10.32 วงจร RL อนุกรม

วิธีทำ

ฟังชันถ่ายโอนของวงจรรูปที่ 10.32 มีค่าเท่ากับ

$$|T(s)| = \frac{v_{OUT}}{v_{IN}}(s) = \frac{R_2 + sL}{R_1 + R_2 + sL} \tag{10.39}$$

$$|T(s)| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{1 + j\omega \dfrac{L}{R_2}}{1 + j\omega \dfrac{L}{R_1 + R_2}} \tag{10.40}$$

ดังนั้น อัตราขยายของวงจรมีค่าเท่ากับ

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{10.41}$$

จากสมการที่ 10.40 จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$T(j\omega) = \frac{0.5[1 + (j\omega/10)]}{1 + (j\omega/20)} \tag{10.42}$$

ขนาดและเฟสที่ได้จากของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

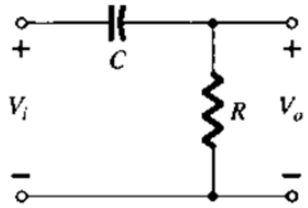
$$T_{dB} = 20\log 0.5 + 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{10}\right| - 20\log\left|1 + \frac{j\omega}{20}\right| \tag{10.43}$$

และ

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{20} \tag{10.44}$$

10.4. Low-Frequency analysis bode plot

รูปที่ 10.33 แสดงวงจร RC high pass filter ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรเท่ากับ



รูปที่ 10.33 วงจร RC high pass filter

$$\frac{v_{OUT}}{v_{IN}} = \frac{R}{R + XC} \tag{10.45}$$

ขนาดของผลการตอบสนองความถี่ของวงจรมีค่าเท่ากับ

$$\left|\frac{v_{OUT}}{v_{IN}}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + XC^2}} \tag{10.56}$$

ณ. ที่ความถี่กำลังที่เอาต์พุตลดลงครึ่งหนึ่งหมายถึง แรงดันของสัญญาณที่โหลดถูกลดลงครึ่งหนึ่ง เนื่องจาก R = XC ดังนั้น อัตราขยายของวงจรมีค่าเท่ากับ

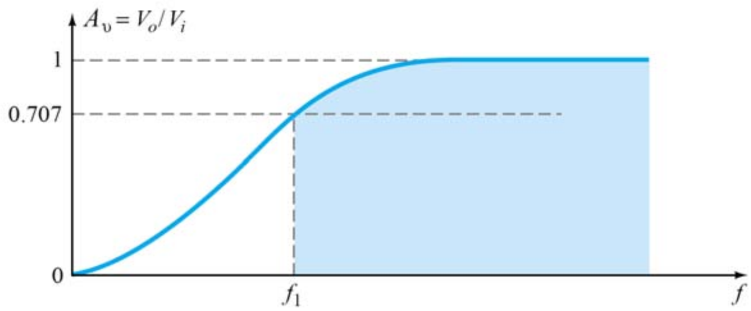
$$\left|\frac{v_{OUT}}{v_{IN}}\right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10.47}$$

$$= 0.707$$

เมื่อแปลงให้อยู่ในหน่วยเดซิเบล อัตราขยายมีค่าเท่ากับ

$$Av(dB) = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB \tag{10.48}$$

ณ. ที่แรงดันเอาต์พุตเท่ากับอินพุต (v_{OUT} = v_{IN}) อัตราขยายของวงจรมีค่าเท่ากับ



รูปที่ 10.34 Frequency response of RC high pass filter circuit

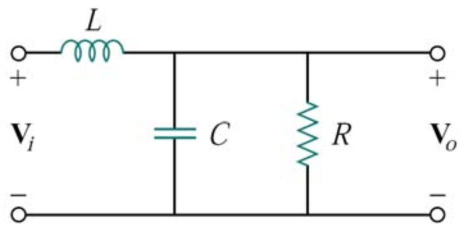
แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ω_2 มีค่ามากกว่า ω_1 อยู่กี่ decade

   (ก) ω_1 = 0.1 rad/s, ω_2 = 1,000 rad/s

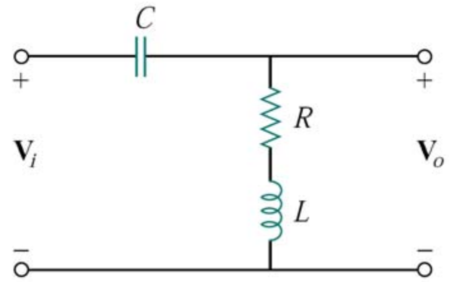
   (ข) ω_1 = 200 rad/s, ω_2 = 1,000 rad/s

2. จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน *T(s)* ของวงจรในรูปที่ p10.1



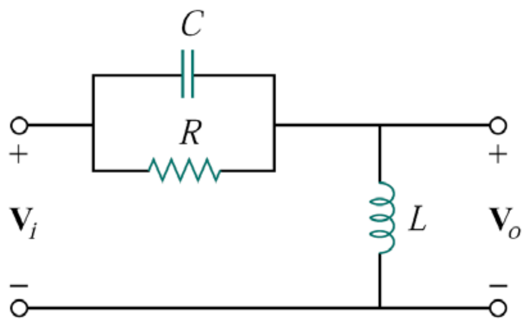
รูปที่ p10.1

3. จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน *T(s)* ของวงจรในรูปที่ p10.2



รูปที่ p10.2

4. จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน *T(s)* ของวงจรในรูปที่ p10.3



รูปที่ p10.3

5. จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

6. จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s+1)}$$

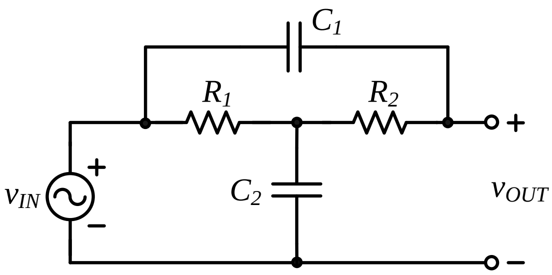
7. จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

$$T(s) = \frac{s}{s^2 + 10s + 100}$$

8. จงพร็อตกราฟโบเดของฟังก์ชันถ่ายโอนต่อไปนี้

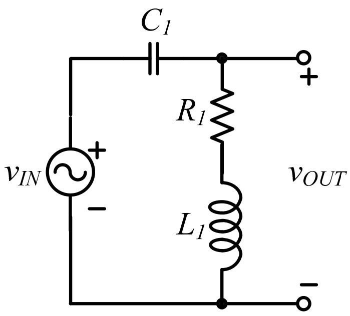
$$T(s) = \frac{50(s+1)}{s(s^2 + 10s + 10,000)}$$

9. จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน *T(s)* และเขียนโบเดพร๊อตของวงจรในรูปที่ p10.4



รูปที่ p10.4

10. จงหาฟังก์ชันถ่ายโอน *T(s)* และเขียนโบเดพร๊อตของวงจรในรูปที่ p10.5



รูปที่ p10.5

เอกสารอ้างอิง

1. Robert Boylestad and Louis Nashelsky, “Electronic Devices and Circuit Theory”
2. Richard C. Dorf and James A. Svaboda, “Introduction to Electric Circuit”