# บทที่ 8
## สนามแม่เหล็กคงตัว
## The Steady Magnetic Field

# บทที่ 9
## แรงแม่เหล็ก สารแม่เหล็ก และความเหนี่ยวนำแม่เหล็ก
## Magnetic Forces, Material and Inductance

# บทที่ 10
## สนามที่แปรตามเวลาและสมการของแมกซ์เวลล์
## Time-Varying Fields and Maxwell's Equations

## การเคลื่อนที่ของประจุ

ความเร็วไหลเลื่อน (Drift Velocity) เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเข้มสนามไฟฟ้า

$$U=\mu E$$

เมื่อ $\mu$ เป็นความคล่องตัว (Mobility) มีหน่วยเป็น $m^2/v \cdot s$

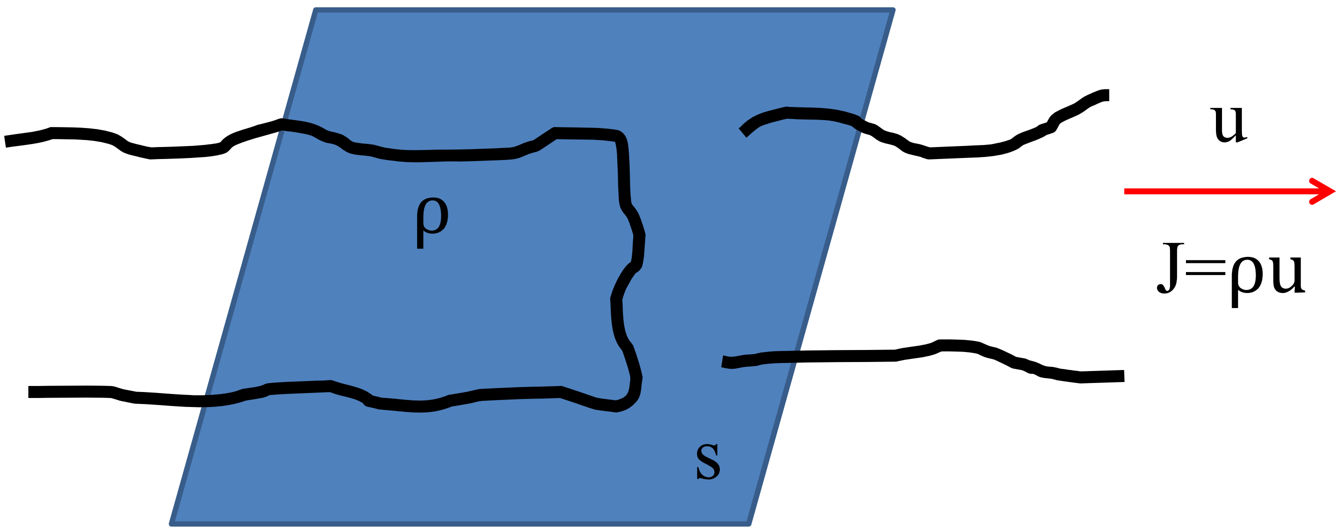
## ความหนาแน่นของการแสการพา (Convection Current Density)

กระแสการพา (Convection Current) มีความหนาแน่น

$$J=\rho U \qquad A/m^2$$

## ความหนาแน่นของการแสการพา (Convection Current Density)

เมื่อ ρ เป็นความหนาแน่น



## ความหนาแน่นของการแสการนำ (Conduction Current Density)

กระแสการนำ เกิดเมื่อใส่สนามไฟฟ้าภายในภาคตัดขวางที่อยู่กับขนาดของตัวนำ ความหนาแน่นกระแสแทนด้วย

$$J=\rho U \qquad (A/m^2)$$

ซึ่งจากความสัมพันธ์ $U=\mu E$ จะได้

$$J= \sigma E$$

เมื่อ $\sigma = \rho\mu$ เป็น สภาพนำ (conductivity) ของวัตถุ มีหน่วยเป็นซีเมนส์ต่อเมตร (s/m)

## ความหนาแน่นของการแสการนำ (Conduction Current Density)

**ตัวอย่าง** ความเข้มสนามไฟฟ้าและความหนาแน่นกระแสมีค่าเท่าไรในตัวนำเงินที่มีความเร็วไหลเลื่อน (Drift Velocity) $6.0\times 10^{-4}$ m/s สำหรับเงิน $\sigma = 61.7\ \mathrm{Ms/m}$ และ $\mu = 5.6\times 10^{-3}\mathrm{m^2/v\cdot s}$

**วิธีทำ**

$$E=\frac{U}{\mu}=\frac{6.0\times10^{-4}}{5.6\times10^{-3}}\ \frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{m^2/v\cdot s}}=1.07\times 10^{-1}\ \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}}$$

$$J=\sigma E = 61.7\,\frac{\mathrm{Ms}}{\mathrm{m}}\times 1.07\times 10^{-1}\,\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{m}} \qquad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m^2}}$$

$$= 61.7\times 10^{6}\times 1.07\times 10^{-1} = 6.6\times 10^{6}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m^2}}$$ **Ans**

## ความหนาแน่นของการแสการนำ (Conduction Current Density)

**ตัวอย่าง** ความหนาแน่นกระแสและความเข้มสนามไฟฟ้าของอลูมิเนียมที่ความเร็วไหลเลื่อน $5.3\times 10^{-4}$ m/s เป็นเท่าไร

อลูมิเนียม $\sigma = 3.82 \times 10^{7}\,\frac{s}{m}$ สภาพนำ $\mu = 0.0014\,\frac{m^2}{v\cdot s}$

**วิธีทำ**

$$J = \rho u \;=\; \frac{\sigma}{\mu}u \;=\; \frac{3.82\times 10^{7}\,\frac{s}{m}}{0.0014\,\frac{m^2}{v\cdot s}} \times 5.3 \times 10^{-4}\,\frac{m}{s} = 1.45\times 10^{7}\,\frac{A}{m^2}$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{1.45 \times 10^{7}\,\frac{A}{m^2}}{3.82 \times 10^{7}\,\frac{s}{m}} = 3.79\times 10^{-1}\,\frac{V}{m}$$ **Ans**

## กฎของแอมแปร์และสนามแม่เหล็ก

แผ่นกระแสที่มีขนาดอนันต์ สำหรับการเปลี่ยนทิศใดๆ ของแผ่นกระแส

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{k} \times \vec{a}_n$$

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

อินทิกรัลเชิงเส้นของส่วนประกอบในแนวสัมผัสของความแรงของสนามแม่เหล็กรอบเส้นวง (Closed Path) จะมีค่าเท่ากับ กระแสที่ถูกล้อมรอบโดยเส้นทางปิด

$$\oint Hdl = I_{enc}$$

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

กฎของแอมแปร์เพื่อหา $\vec{H}$ เนื่องมาจากเส้นกระแส I เป็นเส้นตรงและมีความยาวอนันต์

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}\emptyset$$

ความสัมพันธ์ของ J และ H (Relationship of J and H)ความหนาแน่นกระแส J

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

ความสัมพันธ์ของฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ (Magnetic Flux Density $\vec{B}$)ความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

พิกัดฉาก

$$\nabla\times \bar{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\bar{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\bar{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\bar{a}_z$$

พิกัดทรงกระบอก

$$\nabla\times \bar{H} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\bar{a}_\rho + \left[\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right]\bar{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right]\bar{a}_z$$

พิกัดทรงกลม

$$\nabla\times \bar{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(H_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi}\right]\bar{a}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right]\bar{a}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta}\right]\bar{a}_\phi$$

## กฎของแอมแปร์ (Ampere’s Law)

$\mu = \mu_0 \mu_r$ คือ เพอร์มิบิลิตี (Permeability)ของตัวกลาง B คือ เทสลา(tesla)

$\tau = \frac{w}{m}$ เพอร์มิลิตีของสุญญากาศ $\mu_0$ มีค่าเป็นตัวเลขคือ $4\pi \times 10^{-7}\ \frac{H}{m}$

เพอร์มิบิลิตีสัมพันธ์ $\mu_r$ของตัวกลางเป็นจำนวนที่ไม่มีหน่วย

ฟลักซ์แม่เหล็ก $\Phi$ ตลอดพื้นผิว

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \qquad \text{(wb)}$$

มีหน่วยเป็น เวเบอร์ (weber) wb

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

**ตัวอย่าง** จงหาฟลักซ์ที่ผ่านส่วนหนึ่งของระนาบ $\varnothing = \frac{\pi}{4}$ ถูกกำหนดขนาด $0.01 < \rho < 0.05$ และ $0 < Z < 2\ \text{m}$ เส้นกระแสขนาด 2.50 A วางตามแนวแกน Z ในทิศ $\vec{a}_z$

**วิธีทำ**

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu\frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\varnothing$$

$$d\vec{s} = d\rho dz\,\vec{a}_\varnothing$$

$$\int_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \Phi$$

$$\Phi = \int_0^2\int_{0.01}^{0.05}\mu\frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\varnothing d_\rho d_z \vec{a}_\varnothing = \frac{2\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{0.05}{0.01}$$

$$= 1.61\times 10^{-6}\ \text{Wb}$$ หรือ $1.61\ \mu\text{Wb}$ **Ans**

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

ฟลักซ์แม่เหล็ก $\Phi$ ทั้งหมดที่ผ่านเข้าพื้นที่ผิวปิดและออกจากผิวปิดดังนั้น สนาม E จะไม่มีแหล่งกำเนิดหรือโหลดซึ่งสามารถแสดงนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ คือ

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์ A นิยาม คือ

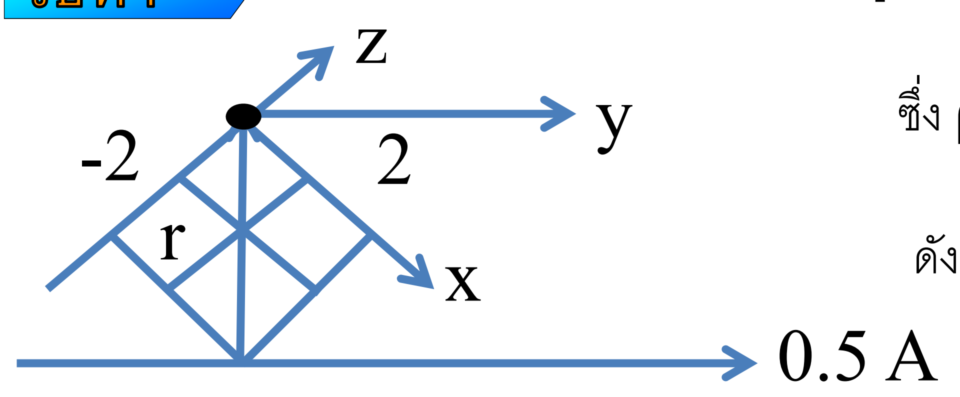
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

หน่วยของ A คือ Wb/m หรือ T· m

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

**ตัวอย่าง** เส้นกระแสขนาด 0.5 A ในทิศ $\vec{a}_y$ ขนานกับแกน y ที่ $x = 2$ m, $Z = -2$ m ดังรูป จงหา H ที่จุดกำเนิด

**วิธีทำ**




ใช้สูตรของ H เนื่องจากเส้นกระแสตรงยาว $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{a}_\phi$

ซึ่ง $\rho = 2\sqrt{2}$ และ (ใช้กฎมือขวา) $\vec{a}_\phi = \frac{\vec{a}_x + \vec{a}_z}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $\vec{H} = \frac{0.5}{2\pi(2\sqrt{2})}\left[\frac{\vec{a}_x + \vec{a}_z}{\sqrt{2}}\right]$

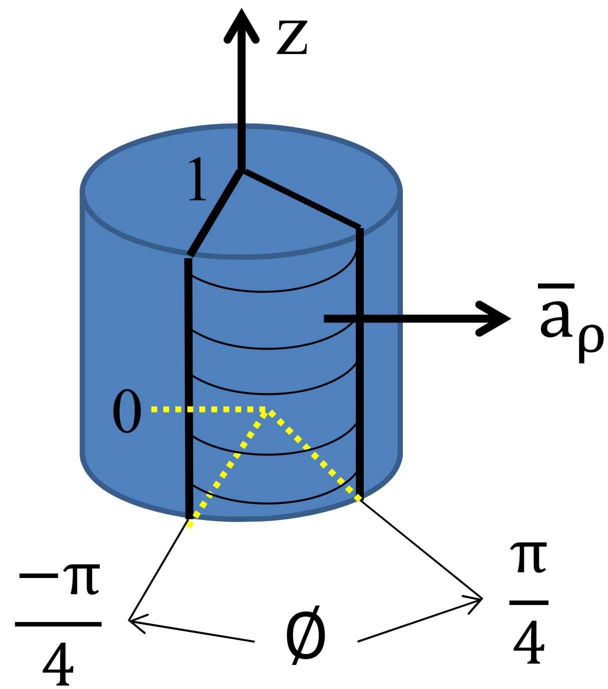
$= (0.0281)\left(\frac{\vec{a}_x + \vec{a}_z}{\sqrt{2}}\right)$ A/m **Ans**

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

**ตัวอย่าง** สนามตามแนวรัศมี

$$\vec{H} = \frac{2.39\times10^6}{\rho}\cos\emptyset\,\bar{a}_\rho \qquad (A/m)$$

มีอยู่สูญญากาศ จงหาฟลักซ์แม่เหล็ก $\emptyset$ ผ่านพื้นผิว ที่กำหนดโดย $\frac{-\pi}{4} \le \emptyset \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le z \le 1m$ ดังรูป



## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

**วิธีทำ**

$$\overline{B} = \mu_0 \overline{H} = \frac{3.00}{\rho} \cos\phi \, \bar{a}_\rho \quad (T)$$

$$\Phi = \int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{3.00}{\rho} \cos\phi \, \bar{a}_\rho\right] \cdot \left[\rho d\phi dz \bar{a}_\rho\right]$$

$$= 4.24 \quad Wb$$ **Ans**

## กฎของแอมแปร์ (Ampere's Law)

**วิธีทำ**

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad (\mathrm{H/m})$

$$\Phi = \int_s \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(-\theta) = \text{-}\sin\theta$$

$$\therefore \sin\frac{-\pi}{4} = \text{-}\sin\frac{\pi}{4} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Phi = 3.00 \int_0^1 \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\emptyset \;\, d\emptyset\, dz$$

$$= 3\int_0^1 \sin\emptyset \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dz$$

$$= 3\int_0^1 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] dz$$

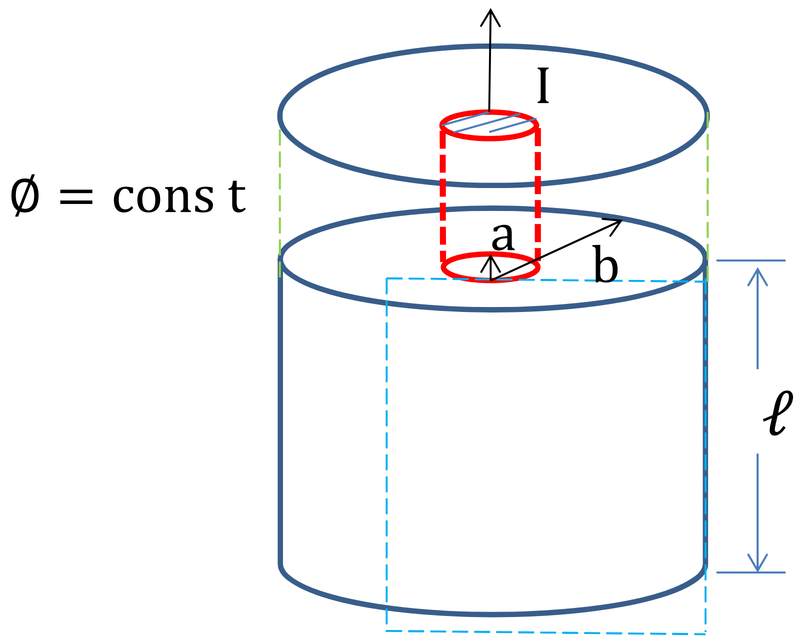
$$= 3\sqrt{2}\, Z \,|_0^1$$

$$= 3 \times 1.414$$

$$= 4.24 \quad \mathrm{Wb} \quad \textbf{Ans}$$

## ความเหนี่ยวนำ (Inductance)

**ตัวอย่าง** จงหาความเหนี่ยวนำต่อความยาวของตัวนำโคแอกเซียล ดังแสดงในรูป



## ความเหนี่ยวนำ (Inductance)

**วิธีทำ** ระหว่างตัวนำ

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\bar{a}_\emptyset \quad ,\bar{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}\bar{a}_\emptyset$$

กระแสตัวนำทั้งสองถูกเชื่อมโยงโดยฟลักซ์ที่ข้ามพื้นผิว $\emptyset =$ ค่าคงที่สำหรับความยาว $\ell$

$$\lambda = \int_0^\ell \int_a^b \frac{\mu_o I}{2\pi\rho}\, d\rho dz$$

$$\lambda = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi}\ell n\frac{b}{a}$$

และ $$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_o}{2\pi}\ell n\frac{b}{a} \qquad (H/m) \quad \textbf{Ans}$$

## กระแสกระจัด (Displacement Current)

เคิร์ลของ H จะพบว่ามีค่าเท่ากับความหนาแน่นของกระแส $J_C$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_C + \bar{J}_D \quad \text{ที่} \quad \bar{J}_D \equiv \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

## อัตราส่วนของ $\bar{J}_C$ ต่อ $\bar{J}_D$ (Ratio of $\bar{J}_C$ to $\bar{J}_D$)

วัสดุบางชนิดไม่ได้เป็นทั้งตัวนำและไดอิเล็กตริกที่ดี ดังนั้นจึงมีทั้งกระแสนำ( $\bar{J}_C$) และกระแสกระจัด ( $\bar{J}_D$)

$$\bar{J}_t = \bar{J}_C + \bar{J}_D = \sigma\bar{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\bar{E}) = \sigma\bar{E} + j\omega\varepsilon\bar{E}$$

ดังนั้น

$$\frac{\bar{J}_C}{\bar{J}_D} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

## อัตราส่วนของ $\bar{J}_C$ ต่อ $\bar{J}_D$ (Ratio of $\bar{J}_C$ to $\bar{J}_D$)

**ตัวอย่าง** พื้นที่หน้าตัดรูปทรงกลมของตัวนำอันหนึ่งมีรัศมี 1.5 mm. นำกระแส$I_c = 5.5\sin(4$

$10^{10}t)$ (μA) จงหาขนาดของความหนาแน่นกระแสกระจัด

($\bar{J}_D$) ถ้า $\sigma = 35$ Ms/m และ $\varepsilon_r = 1$

**วิธีทำ**

$$\frac{J_C}{J_D} = \frac{\sigma}{\mu\varepsilon} = \frac{3.50 \times 10^7}{(4 \times 10^{10})\left(10^{-9}/36\pi\right)} = 9.90 \times 10^7$$

$\boxed{J = \frac{I}{A}}$ เฉพาะขนาด

ดังนั้น $$J_D = \frac{(5.5 \times 10^{-6})/\pi(1.5 \times 10^{-3})^2}{9.90 \times 10^7} \quad A/m^2$$

$$= 7.86 \times 10^{-3} \ \mu A/m^2$$ **Ans**

## สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation)

แสดงสมการแมกซ์เวลล์ทั่วๆไป

| แบบจุด | แบบอินทิกรัล |
|---|---|
| $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_c + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ | $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \left[\bar{J}_c + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right] \cdot d\bar{s}$ (Ampere's Law) |
| $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ | $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_s \left[-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right] \cdot d\bar{s}$ (Faraday's Law; fixed) |
| $\nabla \cdot \bar{D} = \rho$ | $\oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_s \rho \cdot d\bar{v}$ (Gauss's Law) |
| $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ | $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$ (Nonexistence of monopole) |

## สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation)

แสดงสมการแมกซ์เวลล์ในสุญญากาศ

| แบบจุด | แบบอินทิกรัล |
|---|---|
| $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_c + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ | $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \left[\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right] \cdot d\bar{s}$ (Ampere's Law) |
| $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ | $\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_s \left[-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right] \cdot d\bar{s}$ (Faraday's Law; fixed) |
| $\nabla \cdot \bar{D} = 0$ | $\oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = 0$ (Gauss's Law) |
| $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ | $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0$ (Nonexistence of monopole) |

## สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation)

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ $\bar{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z)\bar{a}_y$ ในสุญญากาศ จงหา $\bar{D}$, $\bar{B}$ และ $\bar{H}$ จงสเก็ตซ์ $\bar{E}$ และ $\bar{H}$ ที่ $t = 0$

**วิธีทำ** $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon_o E_m \sin(\omega t - \beta z)\bar{a}_y$ **Ans**

สมการของแมกซ์เวลล์ $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ ได้

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_m \sin(\omega t - \beta z) & 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

หรือ
$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z)\bar{a}_x$$

## สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation)

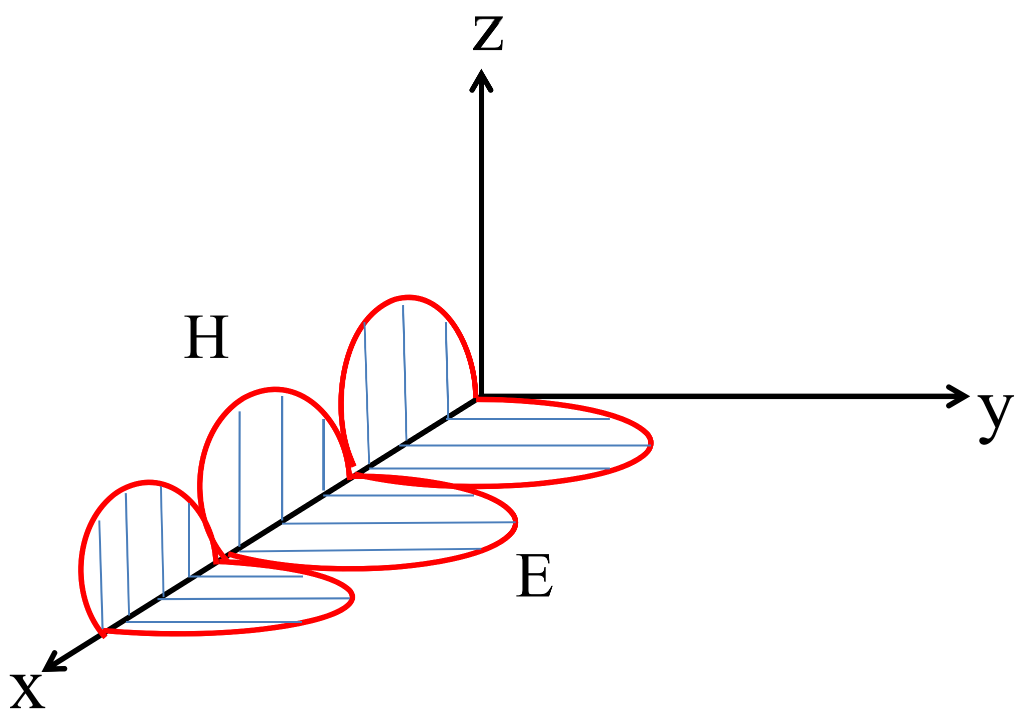
**ต่อ** อินทิเกรตได้ $\bar{B} = \frac{-\beta Em}{\omega}\sin(\omega t - \beta z)\bar{a}_x$ **Ans**

ถ้าไม่คำนึงถึงค่า อินทิเกรตที่ได้ซึ่งเป็นค่าคงที่ของสนามสถิต จะได้

$\bar{B} = \mu\bar{H}$

$$\bar{H} = \frac{-\beta Em}{\omega\mu_0}\sin(\omega t - \beta z)\bar{a}_x$$

## สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equation)




**Ans**


Engineering Electromagnetics 6502009
Telecommunications Nakhon Pathom Rajabhat University

# จบเนื้อหา