บทที่4

พลังงานและศักย์ไฟฟ้า

Energy and Potential

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

ถ้านำประจุ Q_1 (C) เข้าไปวางในสนามไฟฟ้า ซึ่งมีความเข้ม $\vec{E}$ (v/m) จะพบว่ามีแรงทางไฟฟ้ากระทำต่อ Q_1 เป็น

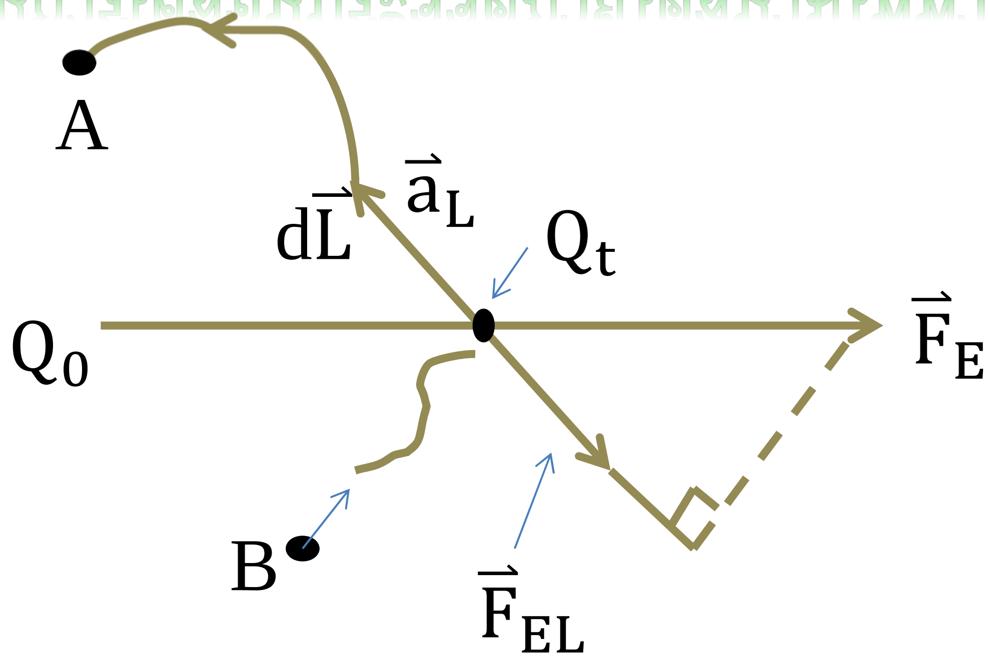
$$\vec{F}_E = Q_1\vec{E} \quad (N)$$

ในการหาค่างานที่เราต้องทำเพื่อเคลื่อนย้ายประจุ Q_1 ไปเป็นระยะทาง $d\vec{L}$ ซึ่งมีทิศทางแทนด้วยเวกเตอร์หน่วย $\vec{a}_L$ ดังแสดงในรูปและมีกระทำเป็น

$$\vec{F}_{applied} = (\vec{F}_E \cdot \vec{a}_L)\vec{a}_L$$

$$= (Q_1\vec{E} \cdot \vec{a}_L)(\vec{a}_L)$$

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า



และงานที่เราต้องทำเพื่อเคลื่อนย้าย Q_1 ไปในระยะทาง $d\vec{L}$ จะเป็น

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

$$d\omega = (\vec{F}_{appplied}) \cdot d\vec{L} - \left(Q\vec{E} \cdot \vec{a}_L\right)(\vec{a}_L \cdot \vec{a}_L)$$

$$= -Q_1 \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$\therefore d\omega = -Q_1 \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (J)$$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $d\omega > 0$ แสดงว่าเราต้องทำงานเพื่อต้านแรงจากสนามไฟฟ้า แต่ถ้ามี $d\omega < 0$ แสดงว่าเราได้งานจากสนามไฟฟ้า ซึ่งส่งแรงมาเคลื่อนย้ายประจุของเราไป

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

ข้อสังเกต 2. $d\vec{L}$ เป็นระยะการจัดชนิดเวกเตอร์ (vecter disdlacement) มีนิพจน์ในระบบต่างๆ ดังนี้

$$d\vec{L} = d_x\vec{a}_x + d_y\vec{a}_y + d_z\vec{a}_z \longrightarrow \text{คาร์ทีเซียล}$$

$$d\vec{L} = d_\rho\vec{a}_\rho + \rho d\emptyset\vec{a}_\emptyset + d_z\vec{a}_z \longrightarrow \text{ทรงกระบอก}$$

$$d\vec{L} = d_r\vec{a}_r + rd\theta\vec{a}_\theta + r\sin\theta d\emptyset\vec{a}_\emptyset \longrightarrow \text{ทรงกลม}$$

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

งานผลรวมที่เราต้องทำในการเคลื่อนย้ายประจุ Q_1 จากจุด A ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นไป ยังจุด B ซึ่งเป็นจุดสุดท้าย จะมีค่าเป็น

$$w_{BA} = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{L} \quad (J)$$

ในกรณี $\vec{E}$ เป็นสนามไฟฟ้าสถิตินี้ จะพบว่างาน w_{BA} ไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทางที่ใช้ในการเคลื่อนย้ายประจุ Q_1 จากจุด A ไปยังจุด B ดังนั้น ถ้าตัวนำประจุเคลื่อนที่ตามเส้นทางที่เป็นวงปิด (closed path) จะพบว่างานที่เราต้องทำมีค่าเป็นศูนย์

นั้นคือ สนามไฟฟ้าสถิต$\vec{E}$มีคุณสมบัติเป็นสนามอนุรักษ์ (converratield field) และผลจากนี้คือ

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$ ทุกเส้นทางปิดที่ใช้

ข้อสังเกต 3.สัญลักษณ์ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L}$ เรียก อินทิกรัลเส้นปิดหรือ การไหลเวียน

ข้อสังเกต 4. โดยการใช้ทฤษฎีบทของสโตกส์ร่วมกับสมการสุดท้าย สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\nabla \times \vec{E} = 0$ เมื่อ $\vec{E}$ เป็นสนามอนุรักษ์ สมการ $\nabla \times \vec{E} = 0$ นั้นเป็นผลให้ $\vec{E}$ มีชื่อเรียกอีกอย่างว่า “สนามไม่หมุน” (In notation Field)

พลังงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุจุดภายใต้สนามไฟฟ้า

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\varepsilon_r = 2.26, \vec{E} = 2xy\vec{a}_x + (x^2y)\vec{a}_z (v/m)$ ให้หาค่างานในการเคลื่อนประจุ Q=2C จากจุด $A(1,3,-2)$ ไปยังจุด $B(2,-1,1)$

วิธีทำ

$$Q = 2C$$

$$\vec{E} = (2xy)\vec{a}_x + (x^2y)\vec{a}_z$$

$$d\vec{L} = d_x\vec{a}_x + d_y\vec{a}_y + d_z\vec{a}_z$$

$$W=-2\left[\int_1^2 2xydx + \int_{-2}^1 x^2\,ydz\right] \quad = 6\,J$$ **Ans**

ความต่างศักย์ไฟฟ้า

นิยาม ความต่างศักย์(ในหน่วยโจทย์หรือ V) ระหว่างจุด A กับ B(เขียนแทนด้วย V_{AB})ในสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ มีค่าเท่ากับงาน (J) ที่เราต้องทำเพื่อให้เคลื่อนย้ายประจุ 1 C จากจุด B ไปยังจุด A เมื่อเขียนในรูปสูตรจะได้

$$V_{AB} = W_{AB}|_{Q_+=1} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{L} \qquad (V, J/c)$$

ข้อสังเกต 5. เนื่องจาก $\vec{E}$ เป็นสนามอนุรักษ์ คือ มีคุณสมบัติตามสมการ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{L}_1 = 0$ ดังนั้น ถ้าเราเคลื่อนย้ายประจุ Q_r ตามเส้นทางที่เป็นวงปิดซึ่งผ่านจุด A,B,C เราจะพิสูจน์ได้ว่า

$$U_{AB} = V_{AC} - V_{BC}$$

ศักย์ไฟฟ้า

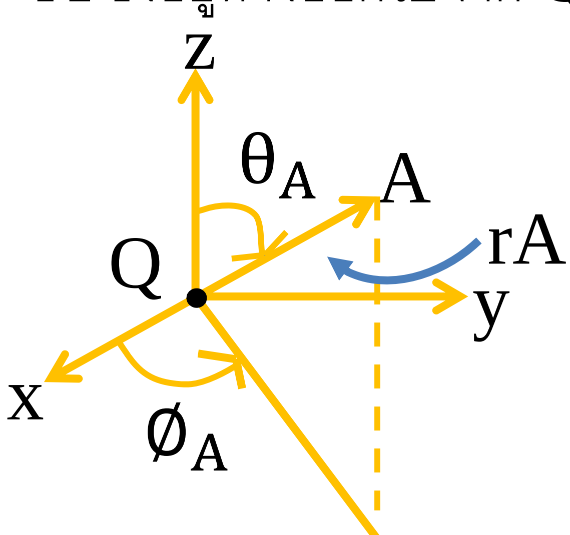
ถ้าความต่างศักย์ V_{AB} เป็นผลต่างระหว่างค่าศักย์ V_A ซึ่งวัดได้ที่จุด A กับค่าต่างศักย์ V_B ซึ่งวัดได้ที่จุด $\vec{B}$ คือให้ $V_{AB} = V_A - V_B$ เราจะต้องกำหนดจุดอ้างอิง (reference point) จุดหนึ่ง เช่น จุด C ซึ่งเราถือว่ามีค่าศักย์ $(V_C = 0)$ เพราะวัดค่าศักย์ที่จุด A หรือจุด B เทียบกับจุด C ดังนั้น "ศักย์" หรือ "ศักย์สมบูรณ์" จึงมีความหมายระหว่างจุดใดจุดหนึ่งกับจุดอ้างอิงนี้ค่าศักย์เป็นศูนย์นั่นเอง

ในกรณีสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ เนื่องจากประจุชนิดจุด Q หรือเนื่องจากระบบของประจุใดๆในปริมาตรที่มีขนาดไม่เป็นอนันต์ เราสามารถกำหนดให้จุดที่ระยะห่างอนันต์เป็นจุดอ้างอิง ซึ่งมีค่าศักย์เป็นศูนย์ได้ กล่าวคือ ศักย์ของจุด A ใดๆจะเป็นไปตามสมการ

ศักย์ไฟฟ้า

$$V_A = V_{A\infty} = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{L} \qquad \text{(v)}$$

ถ้าให้ประจุชนิดจุด Q วางอยู่ที่จุดเริ่มแกนของระบบโคออร์ดิเนททรงกลมดังรูปศักย์ของจุด A ซึ่งอยู่ห่างออกไปจาก Q เป็นระยะทาง rA จะมีค่าเป็น



$$V_A = V_{A\infty} = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{L}$$

$$= -\int_{\infty}^{r1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

ศักย์ไฟฟ้า

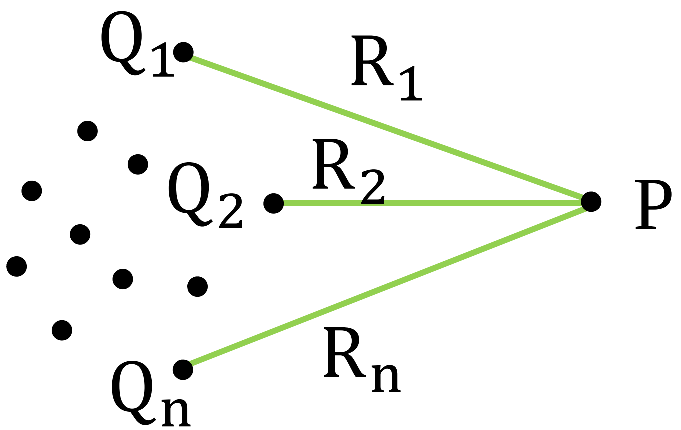
ดังนั้น ศักย์ของจุดๆในสนามประจุชนิดจุด Q จะเป็น

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (v)$$

โดยที่ R เป็นระยะห่างจากตำแหน่งของประจุ Q ไปยังจุดที่เราต้องการหาค่า V จาก สมการนี้ เราพบว่า $V_\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \infty}$ หรือจุดที่ระยะห่างอนันต์จากประจุQ มีค่าศักย์เป็นศูนย์ตรงกับที่ควรจะเป็น

ระบบของประจุชนิดจุดจำนวนมาก

ในรูปค่าศักย์ผลรวมที่จุด P เนื่องจากประจุชนิดจุด $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ มีค่าเป็น (ในอวกาศว่าง)

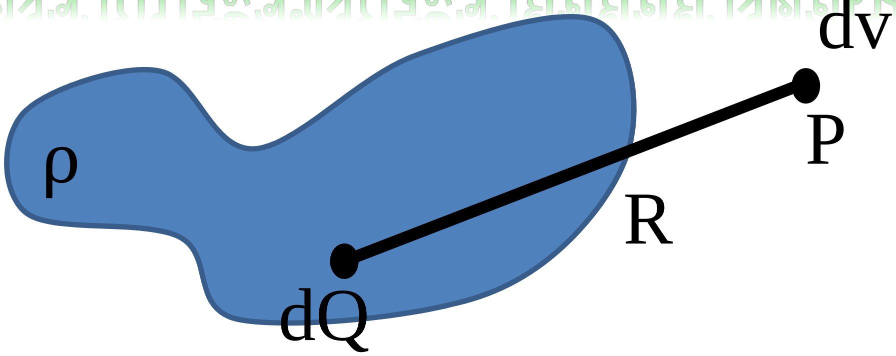


$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\varepsilon_0 R_n}$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}$$

$V = 0$ ของระบบประจุระบบนี้อยู่ที่ระยะห่างอนันต์

สนามศักย์เนื่องจากประจุซึ่งกระจายอยู่อย่างต่อเนื่อง



ในกรณีที่ประจุกระจายกันอยู่อย่างต่อเนื่องภายในปริมาตร ซึ่งมีขนาดไม่เป็นอนันต์และมีความหนาแน่นเป็น $\rho\ c/m^3$ ดังรูป จะได้ศักย์ dv ที่จุด P เนื่องจากประจุส่วนย่อย $dQ=\rho dv$ ในปริมาตร dv เป็น

$$dv=\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R}=\int\frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

สนามศักย์เนื่องจากประจุซึ่งกระจายอยู่อย่างต่อเนื่อง

และได้ศักย์ผลรวมที่จุด P เป็น

$$V = \int \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (v)$$

จุดอ้างอิง(ศักย์ $V = 0$)ของระบบประจุนี้อยู่ที่ระยะอนันต์

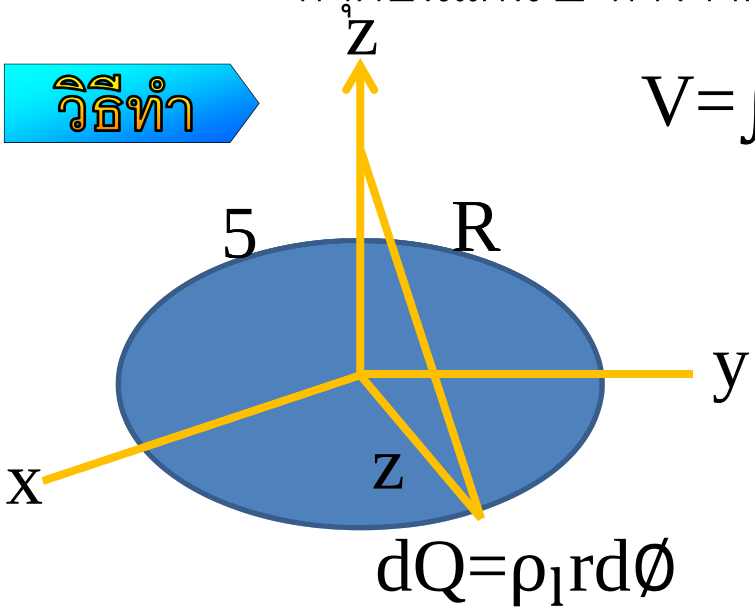
กรณีพิเศษ เมื่อประจุกระจายอยู่บนพื้นผิวแผ่นใดแผ่นหนึ่ง ซึ่งมีขนาดกว้างยาวไม่เป็นอนันต์ โดยมีความหนาแน่นเป็น $\rho_s\ c/m^3$ เมื่อประจุกระจายอยู่ตามเส้นโค้งหรือเส้นตรงใดเส้นตรงหนึ่ง ซึ่งไม่ติดต่อไปถึงระยะอนันต์ โดยมีความหนาแน่นเป็น $\rho_L\ c/m$ จะได้

$$V = \int_s \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0 R} ds \text{ และ } V = \int_l \frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

สนามศักย์เนื่องจากประจุซึ่งกระจายอยู่อย่างต่อเนื่อง

ตัวอย่าง ประจุ 40 nC กระจายสม่ำเสมอรอบวงแหวน รัศมี 2m จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุดบนแกน z ห่างจากระนาบของทรงวงแหวน 5m

วิธีทำ



$$V=\int_l \frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ โดยที่ } \frac{Q}{2\pi\rho} = \frac{40\times10^{-9}}{2\pi(2)} = \frac{10^{-8}}{\pi}$$

$$R = \sqrt{29}\text{ m},\ dl = rd\emptyset = 2d\emptyset$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{(10^{-8}/\pi)(2)}{4\pi\left(\frac{10^{-9}}{36\pi}\right)\sqrt{29}} d\emptyset = 66.9 \text{ v}$$ **Ans**

ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ กับ ศักย์ V

ถ้าจุด A และ B อยู่ใกล้กันมาก ทำให้ได้ $\overline{BA} = d\overline{L}$ แล้วจากสูตร $V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\overline{L}$ จะได้ความต่างศักย์ระหว่าง A กับ B เป็น dv=-$\vec{E}$, dL=$(\nabla v) \cdot d\overline{L}$ ดังนั้น เราจึงสรุปว่า

$$\vec{E} = -\nabla V$$

นั้นคือ ถ้าเรารู้ลักษณะการแปรค่าสนาม V เทียบกับตัวแปรโควอร์ดิเนท เราก็จะสามารถหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ได้จากค่าลบของเกรเดียนท์ ของ V

ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ กับ ศักย์ V

ข้อสังเกต 6. เนื่องจากเกรเดียนของสนามใดสนามหนึ่ง เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์ (พื้นผิวซึ่งประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งมีศักย์เท่ากัน) ของสถานะนั้นและมีทิศชี้ไปในแนวที่ค่าศักย์เพิ่มขึ้นด้วยอัตราสูงสุด ดังนั้นสมการ $\vec{E} = -\nabla V$ จึงบอกเราว่าสนามไฟฟ้าเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์ของ V และมีทิศชี้ไปในแนวที่ศักย์ลดลงด้วยอัตราสูงๆ (คือ ชี้จากผิวที่มีศักย์สูงไปยังผิวที่มีศักย์ต่ำ)

ข้อสังเกต 7. ผิวสมศักย์ไฟฟ้า V จะตั้งฉากกับแนวเส้นแรงของสนามไฟฟ้าที่ทุกๆจุดในกรณีสนามเนื่องจากประจุ จุด Q เรารู้ว่าเส้นแรงของ $\vec{E}$ เป็นเส้นรัศมีพุ่งออกจาก Q ดังนั้น ผิวสมศักย์ในกรณีนี้ จึงเป็นบรรดาพื้นผิวทรงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ Q และมีรัศมีต่างๆกันนั้นเอง

เกรเดียนต์ของศักย์ไฟฟ้า

เกรเดียนท์ของสนามสเกลาร์ P (เขียนแทนด้วย ′gred P′)เป็นเวกเตอร์ในแนวทิศทางอันหนึ่ง ซึ่งทำให้อนุพันธ์ของ P เทียบกับระยะทางในแนวทิศนั้นมีค่าสูงสุด และเวกเตอร์ดังกล่าวมีขนาดเท่ากับค่าอนุพันธ์สูงสุดนั้นเอง เมื่อเขียนเป็นสูตรจะได้

$$\text{gred } P = \bar{a}_n \left[\frac{dP}{dn}\right]$$

$\bar{a}_n$ = เวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับผิวสมศักย์(equipotential surface) ของ P และมีทิศชี้ไปในแนว $\bar{d}_n$ ซึ่งมี P มีค่าเพิ่มขึ้นสูงสุด

$\dfrac{dP}{dn}$ = ค่าอนุพันธ์สูงสุดของ P เทียบระยะทาง

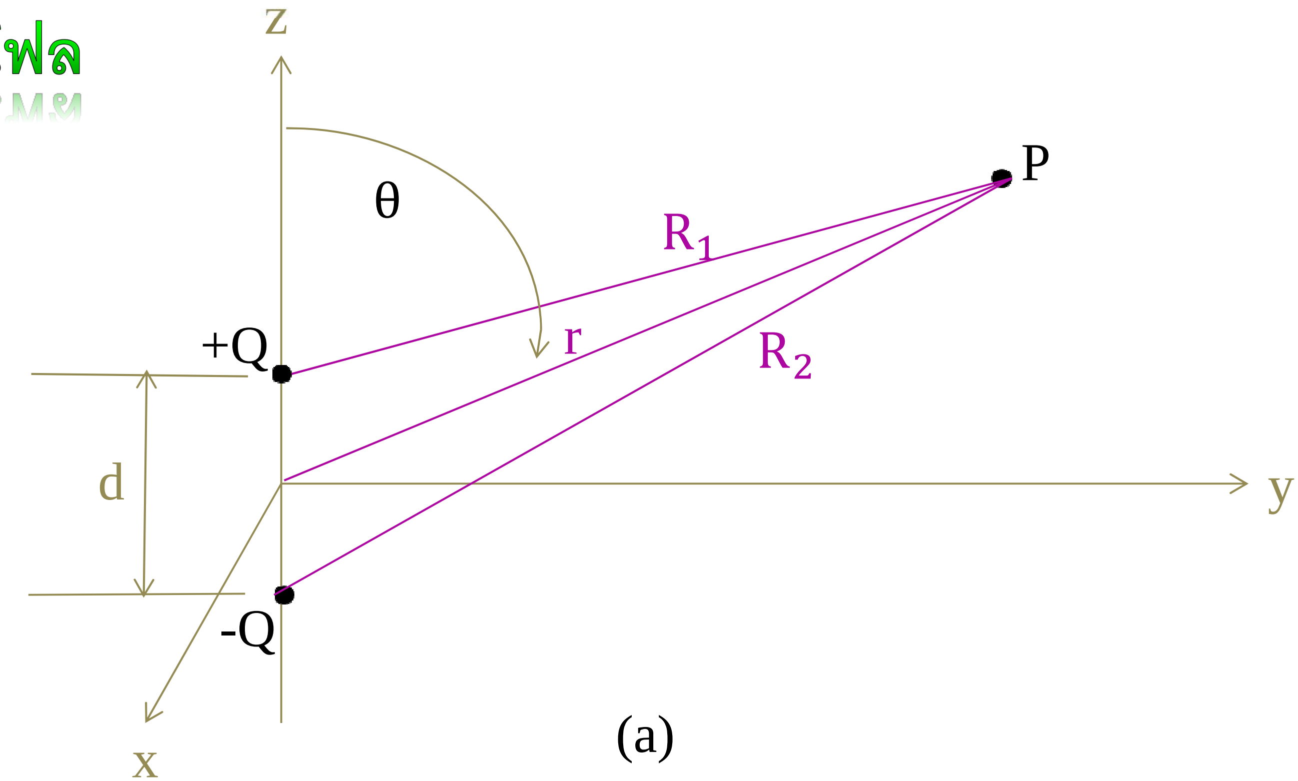
เกรเดียนต์ของศักย์ไฟฟ้า

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\bar{a}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\bar{a}_z$$ (พิกัดฉาก)

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial \rho}\bar{a}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \phi}\bar{a}_\phi + \frac{\partial P}{\partial z}\bar{a}_z$$ (พิกัดทรงกระบอก)

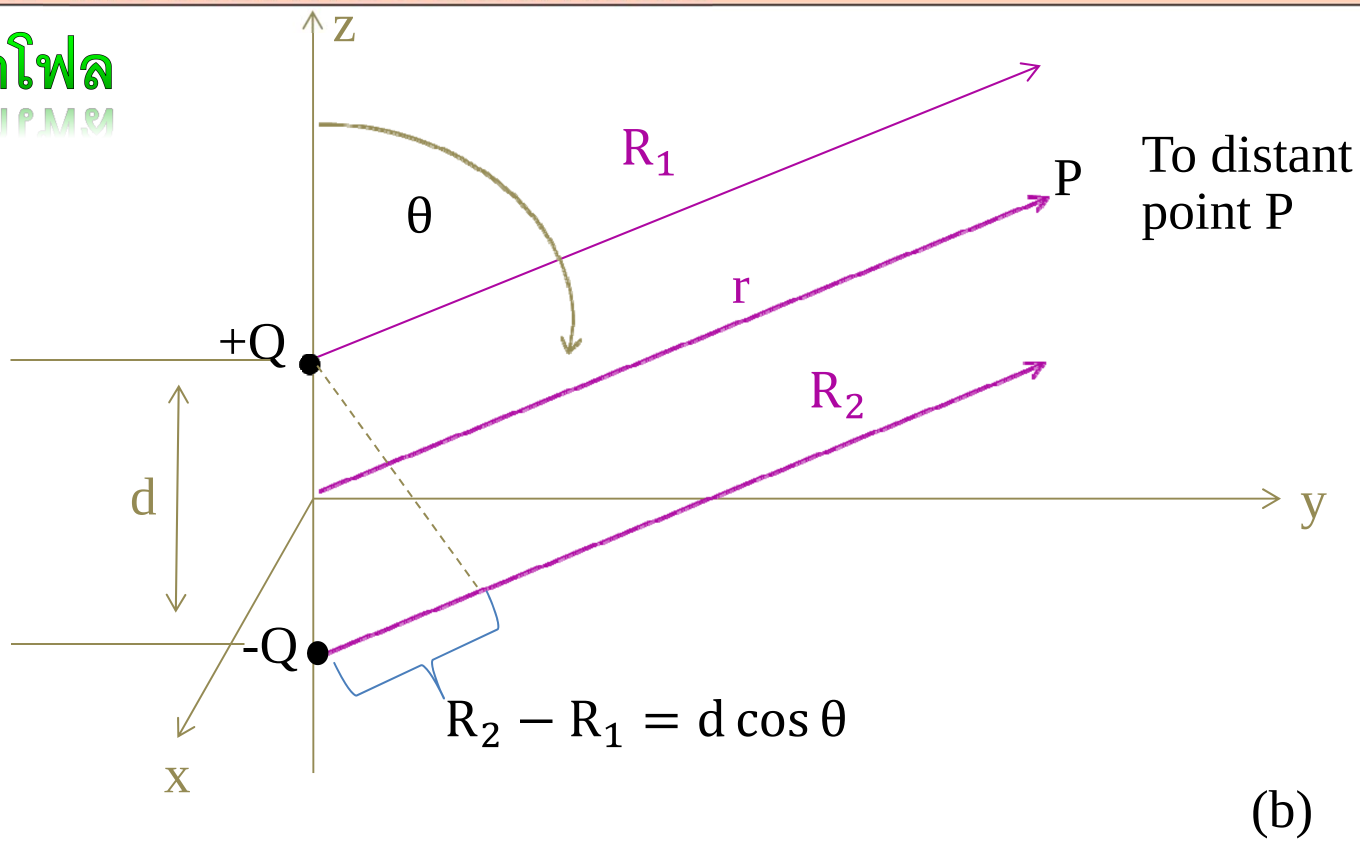
$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial r}\bar{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}\bar{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi}\bar{a}_\phi$$ (พิกัดทรงกลม)

ไดโพล



(a)

ไดโพล



จบเนื้อหา