

บทที่ 3

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์
Electric Flux Density, Gauss's Law and Divergence



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

จากการทดลองของฟาราเดย์ ทำให้ทราบว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่ออกจากประจุไฟฟ้าค่าหนึ่ง จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประจุไฟฟ้าค่านั้น ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ไฟฟ้า φ กับประจุไฟฟ้า Q คือ

$$\varphi = Q$$

นั่นคือ ฟลักซ์ไฟฟ้า 1 คูลอมป์หรือ 1 เส้น เกิดประจุ 1 C สำหรับความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า \bar{D} นั้นเป็นเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางไปตามแนวเส้น ฟลักซ์ที่จุดสังเกต และมีขนาดเท่าจำนวนเส้นฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่เล็กๆ อันหนึ่ง ซึ่งตั้งฉากกับแนวเส้นฟลักซ์ คิดต่อหน่วยพื้นที่เล็กๆนั้น

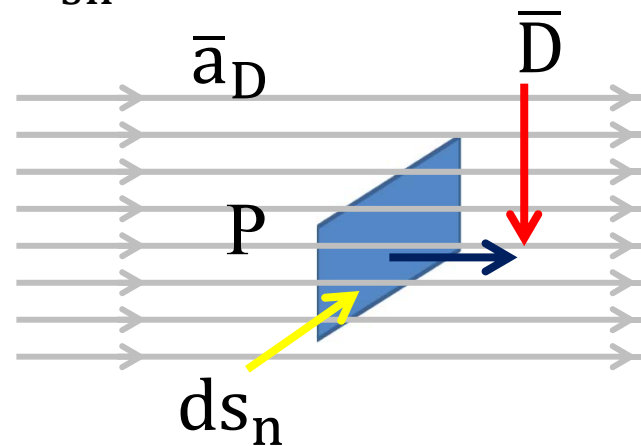


บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

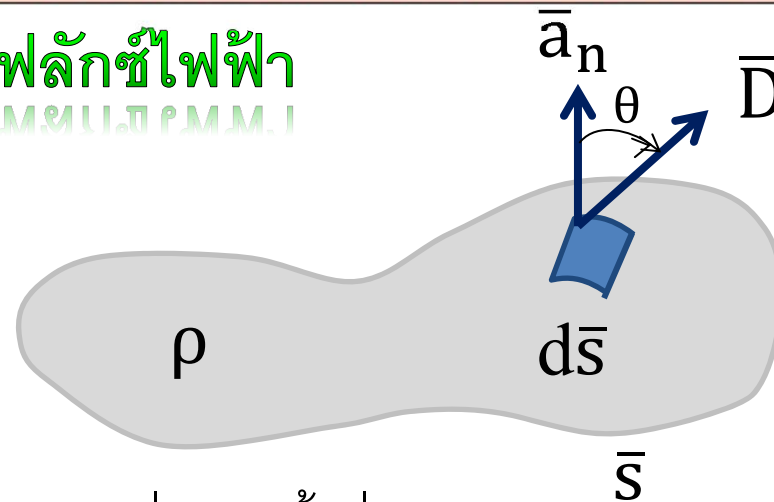
ถ้าให้ \vec{a}_D เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนวเส้นฟลักซ์ตรงจุดสังเกตและให้ $d\phi$ เป็นจำนวนเส้นฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่เล็กๆ dS_n ซึ่งตั้งฉากกับ \vec{a}_D ดังรูป จะได้ว่า

$$\vec{D} = \left[\frac{d\phi}{dS_n} \right] \vec{a}_D \quad \text{C/m}^2$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า



ในการหาค่าฟลักซ์ $d\phi$ ซึ่งผ่านพื้นที่ ds ตามรูป จะนิยามให้ $d\bar{s}$ เป็นพื้นที่ชนิด
เวกเตอร์ (VECTOR AREA) มีขนาดเป็น ds และมีเวกเตอร์หน่วยเป็น \bar{a}_n ซึ่ง
ตั้งฉากกับ ds แสดงสมการได้ดังนี้

$$d\phi = D (ds \cdot \cos \theta) = \bar{D} \cdot d\bar{s}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

ในเมื่อ \bar{D} เป็นเวกเตอร์ ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผิว $d\bar{s}$ โดยการอินทิเกรตสมการข้างต้น จะได้ปริมาณฟลักซ์ไฟฟ้า φ_s ที่ผ่านพื้นที่ S ใดๆเป็น

$$\varphi_s = \int_s \bar{D} \cdot d\bar{s} \quad (C)$$

ตัวอย่าง

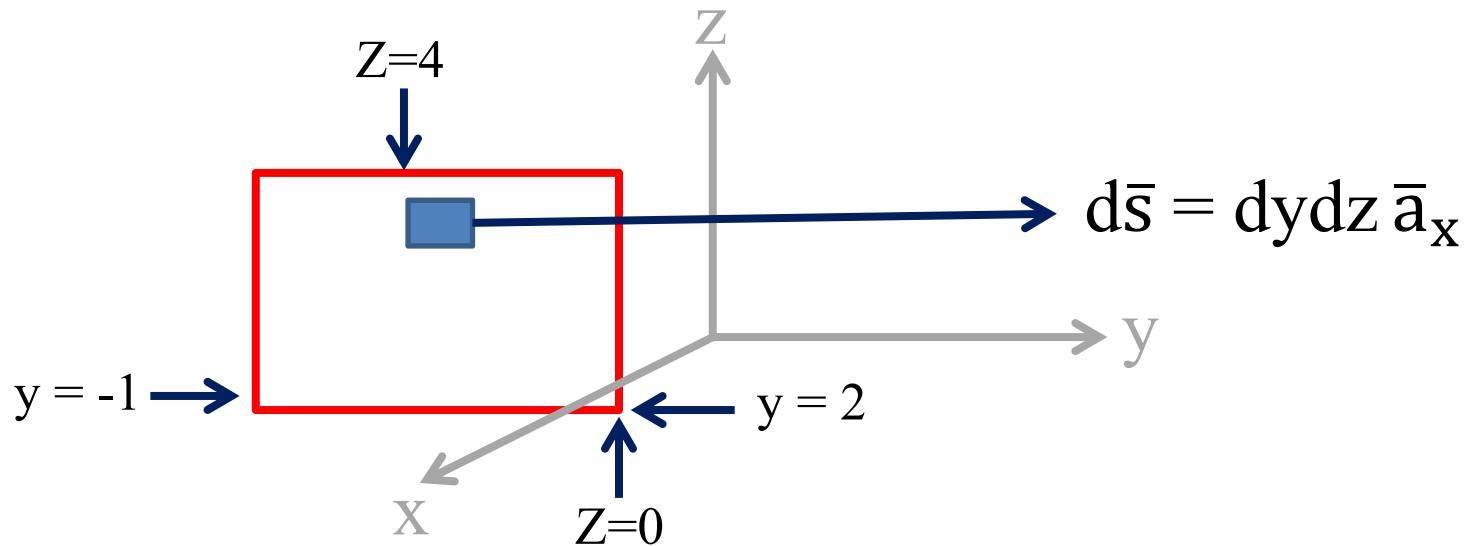
ค่าความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า $\bar{D} = 2xy \bar{a}_x + 3yz \bar{a}_y + 4xz \bar{a}_z$ จงหาปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่ส่วนหนึ่งของระยะทาง $x=3$ ในช่วง $-1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

ตัวอย่าง



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

วิธีทำ

จากสูตร $\varphi_s = \int_s \bar{D} \cdot d\bar{s}$

โดยที่ $d\bar{s} = dydz \bar{a}_x$

$$\therefore \bar{D} \cdot d\bar{s} = (2xy) dydz$$

$$= 2(3) \left[\frac{y^2}{2} \right] (z) \Big|_0^4$$

$$= 36 \text{ C } \text{Ans}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

ตัวอย่าง กำหนด $\bar{D} = 4x \bar{a}_x + 3y^2 \log z \bar{a}_y - 2x^4 \sin y \cos z^3 \bar{a}_z$

จงหาปริมาณฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่ส่วนหนึ่งของระนาบ $x = -2$ ในช่วง
 $-1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 4$

วิธีทำ $\varphi_s = \int_s \bar{D} \cdot d\bar{s}$, $\bar{D} \cdot d\bar{s} = 4x \, dydz$

$$\varphi = \int_0^4 \int_{-1}^2 4x \, dy \, dz = \int_0^4 4(-2) y_{-1}^2 \, dz$$

$$= -8(2-1) \int_0^4 dz = -24 z_0^4 = -24 (4)$$

$$= -96 \text{ C } \text{Ans}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

ตัวอย่าง จงหาฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่ขนาด 1 m^2 ซึ่งตั้งฉากกับแกน x ที่ $x = 3$ เมื่อ กำหนดให้ $\bar{D} = 10x \bar{a}_x \text{ (C/m}^2\text{)}$

วิธีทำ

$$\varphi = \bar{D} \cdot d\bar{r}$$

$$= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} 10x \, dy \, dz$$

$$= 30 \text{ C} \quad \text{Ans}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

กฎนี้เป็นผลมาจากการทดลองของฟาราเดย์ มีใจความว่า “ฟลักซ์ไฟฟ้าผลรวมที่พุ่งออกจากพื้นที่ผิวปิด (Closed surface) ผิวใดผิวหนึ่งจะมีค่าเท่ากับประจุผลรวมที่ถูกล้อมโดย พื้นผิวปิดผิวนั้น”

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q_{enc}$$

ประจุที่ถูกล้อมโดยพื้นที่ผิวปิดในกรณีต่างๆมีดังนี้

$$Q_{enc} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n Q_i & \text{เมื่อมีประจุดจุดหลายตัวในผิวปิด} \\ \int \rho_L dL & \text{เมื่อมีประจุดเส้นภายในผิวปิด} \\ \int \rho_s ds & \text{เมื่อมีประจุดแผ่นภายในผิวปิด} \\ \int \rho_v dV & \text{เมื่อมีประจุดเชิงปริมาตรภายในผิวปิด} \end{cases}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

ตัวอย่าง ▶ ประจุชนิดจุด 3 ประจุ คือ $Q_1 = 30 \text{ nC}$, $Q_2 = 150 \text{ nC}$,
 $Q_3 = -70 \text{ nC}$ ถูกครอบคลุมโดยพื้นที่ผิว S ฟลักซ์สุทธิที่ผ่าน S คือเท่าใด

วิธีทำ ▶

$$\begin{aligned}\varphi &= Q_{\text{enc}} \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ &= 30 \text{ nC} + 150 \text{ nC} + (-70) \text{ nC} \\ &= 110 \text{ nC} \quad \text{Ans}\end{aligned}$$



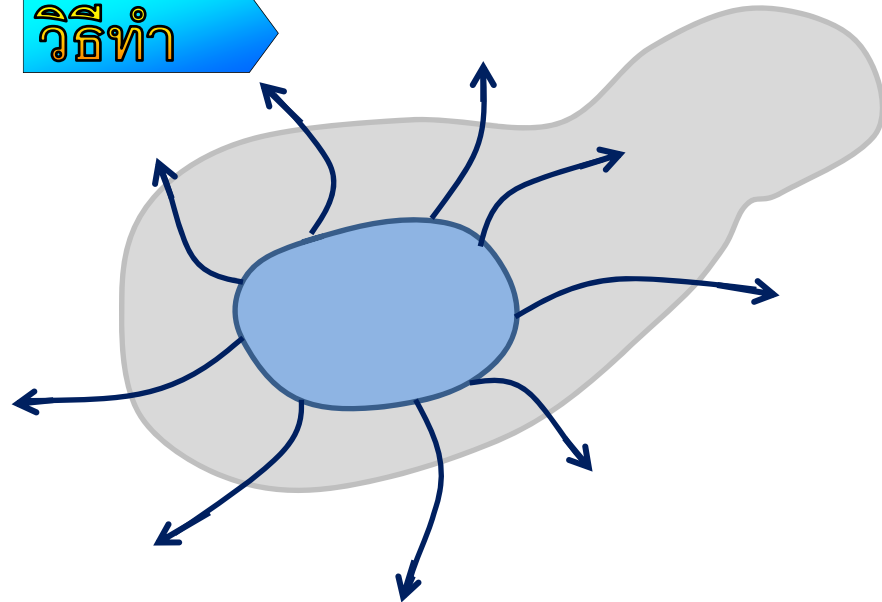
บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

ตัวอย่าง

ประจุที่กระจายตัวในรูปของระนาบ \vec{a}_x รัศมี 2 m ด้วยความหนาแน่น $\rho_s = 50 \text{ (C/m}^2\text{)}$ มีฟลักซ์ไฟฟ้าจำนวนเท่าใดที่ผ่านผิวปิด S ดังรูป

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\phi &= Q = \int \rho_s ds \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 50 \rho dp d\theta \\ &= 50 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 d\theta \\ &= 50 \theta \Big|_0^{2\pi} (2-0) \\ &= 100 (2\pi - 0) \\ &= 200\pi \text{ C Ans}\end{aligned}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ผิวแบบเกาส์ชนิดพิเศษ (Special Gaussian Surface)

ผิวแบบนี้มีคุณสมบัติพิเศษดังนี้

1. เป็นพื้นผิวปิด
2. \bar{D} ที่จุดต่างๆบนผิวมีทิศทางตั้งฉากหรือสัมผัสกับผิว
3. \bar{D} ต้องมีขนาดเท่ากันที่ทุกจุด ซึ่ง \bar{D} ตั้งฉากกับผิว

\bar{D} : ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

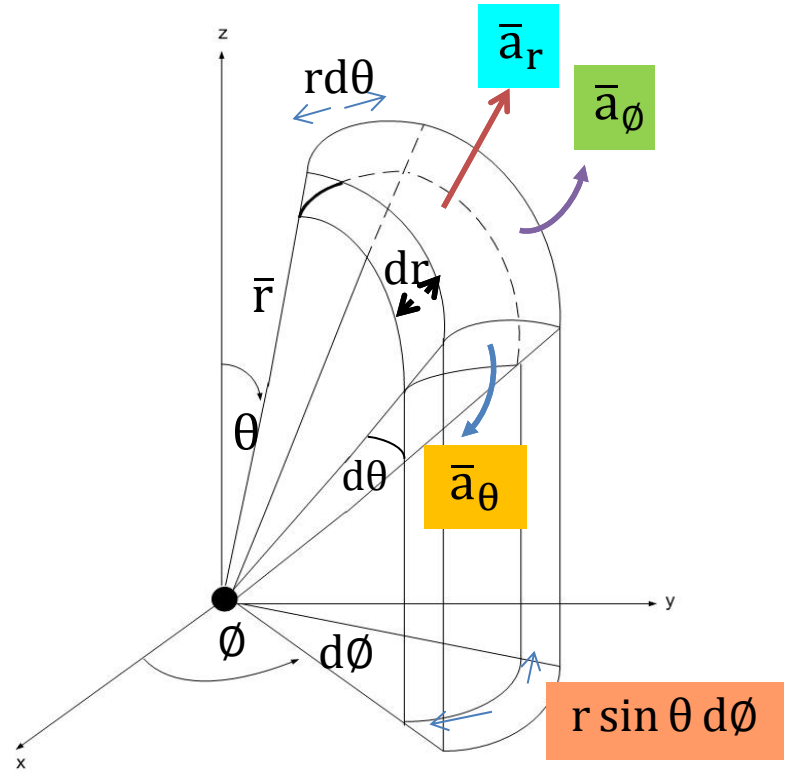
ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับความเข้มสนามไฟฟ้า

พิจารณาประจุชนิดจุด Q วางอยู่ที่จุดเริ่มแกนถ้าให้ผิวแบบเกาส์เป็นผิวทรงกลมซึ่งมีรัศมี r และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดเริ่มแกนดังรูป จะเห็นว่ามีสภาพสมมาตรแบบทรงกลมทำให้ความหนาแน่นของฟลักซ์คือ \vec{D} มีขนาดคงตัวที่ผิวทรงกลมและมีทิศทางตั้งฉากกับผิวทรงกลมดังกล่าว (มีทิศทางตามเวกเตอร์หน่วย \vec{a}_r) ที่ทุกๆจุดโดยการใช้อีกฎของเกาส์ จะได้ว่า



บทที่ 3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

ความสัมพัทธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับความเข้มสนามไฟฟ้า



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับความเข้มสนามไฟฟ้า

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \oint_S D \cdot ds = D(\oint_S ds)$$
$$= D (4\pi r^2) = Q$$


$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

และเมื่อเขียนเป็นเวกเตอร์จะได้ $\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \bar{a}_r$

เราจะได้ความสัมพันธ์ $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ความสัมพันธ์นี้เป็นจริงเสมอไม่ว่าสนามจะเกิดจากประจุจุดหรือประจุนิดอื่นใดก็ตาม



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

 ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับความเข้มสนามไฟฟ้า
ไดเวอร์เจนซ์

พิกัดฉาก
$$\text{div } D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right)$$

พิกัดทรงกระบอก
$$\text{div } D = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

พิกัดทรงกลม
$$\text{div } D = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์



ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้ากับความเข้มสนามไฟฟ้า

ห.ก. ๑๙๗๗ ม.ค. ๑๓ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๒ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๓ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๔ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๕ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๖ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๗ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๘ น.๑. ๑๙๗๗ ๑๙ น.๑. ๑๙๗๗ ๒๐ น.๑.

จากสนามไฟฟ้า \vec{E} เนื่องจากประจุเชิงปริมาตรซึ่งมีความหนาแน่นเป็น ρ และมีสมการ

$$\vec{E} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon r^2} \vec{a}_r$$

และจาก $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ จะได้สมการ $\vec{D} = \int_V \frac{\rho_v dv}{4\pi r^2} \vec{a}_r \quad \text{C/m}^2$



บทที่3 ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์และไดเวอร์เจนซ์

จบเนื้อหา

