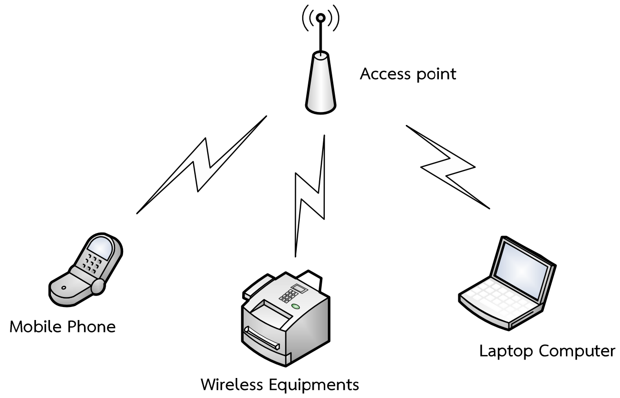
บทที่ 2
โครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย

โครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สายเป็นการสื่อสารระหว่างเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มากกว่า 2 เครื่องขึ้นไปหรือกลุ่มของเครื่องคอมพิวเตอร์ รวมถึงการติดต่อสื่อสารระหว่างคอมพิวเตอร์กับอุปกรณ์ชนิดอื่นในโครงข่าย โดยใช้คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นพาห์ในการรับส่งแพ็กเกตระหว่างกัน โดยใช้อากาศเป็นช่องสัญญาณ

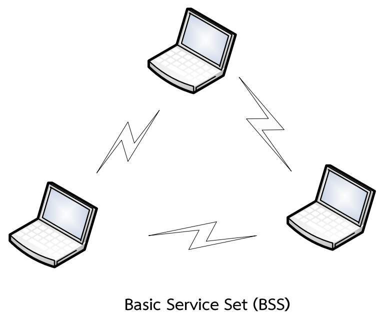
2.1 คุณลักษณะช่องสัญญาณโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย

โดยทั่วไปลักษณะการทำงานของโครงข่ายสามารถแบ่งออกเป็น 2 แบบใหญ่ๆ ด้วยกันคือ 1. โครงข่ายแบบพื้นฐาน (infrastructure) เป็นแบบที่การรับ-ส่งแพ็กเกตระหว่างคอมพิวเตอร์หรือสถานีลูกข่าย (basic service set) จะต้องผ่านจุดเข้าถึงโครงข่ายหรือสถานีฐาน (access point) ซึ่งเป็นตัวกลางในการรับ-ส่งแพ็กเกตภายในโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 โครงข่ายท้องถิ่นไร้สายแบบพื้นฐาน (infrastructure) [62],[64]

และ 2. โครงข่ายแบบแอดฮอค (ad-hoc) เป็นแบบที่การรับ-ส่งแพ็กเกตระหว่างคอมพิวเตอร์หรือสถานีลูกข่ายสามารถกระทำได้โดยตรงและเป็นอิสระแก่กันดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 โครงข่ายท้องถิ่นไร้สายแบบแอดฮอค (ad-hoc) [62],[64]

ระบบสื่อสารแบบไร้สายโดยทั่วไปสามารถแบ่งเทคนิคการร่วมใช้ช่องสัญญาณออกได้เป็น 3 กลุ่มใหญ่ๆ ดังนี้

2.1.1 การร่วมใช้ช่องสัญญาณที่ไม่มีการแข่งขัน

เทคนิคแบบนี้สถานีลูกข่ายแต่ละรายจะสามารถเข้าใช้ช่องสัญญาณได้แน่นอน โดยระบบจะทำการจัดสรรช่องสัญญาณไว้ให้สำหรับสถานีลูกข่ายแต่ละราย ซึ่งการร่วมใช้ช่องสัญญาณที่ไม่มีการแข่งขันสามารถแบ่งออกได้เป็น 4 เทคนิคใหญ่ๆ คือ 1. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบแบ่งความถี่ FDMA (frequency division multiple access), 2. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบแบ่งเวลา TDMA (time division multiple access), 3. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบแบ่งรหัส CDMA (code division multiple access) และ 4. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบแบ่งความยาวคลื่น WDMA (wavelength division multiple access) [67]-[68] ข้อดีของเทคนิคการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบนี้ คือ ระบบจะมีเสถียรภาพในทุกสภาวะปริมาณการใช้ช่องสัญญาณในโครงข่าย เพราะจะไม่เกิดปัญหาการชนกันของแพ็กเกต แต่ข้อเสียคือไม่สามารถใช้ความกว้างแถบความถี่ (bandwidth) ที่มีอยู่อย่างจำกัดให้เกิดประโยชน์สูงสุดได้ เนื่องจากว่าสถานีลูกข่ายแต่ละรายไม่ได้ใช้ช่องสัญญาณเพื่อส่งแพ็กเกตอยู่ตลอดเวลา ซึ่งจะทำให้ความกว้างแถบความถี่ไม่ถูกใช้งานอย่างเต็มที่ เพราะสถานีลูกข่ายรายอื่นจะไม่สามารถเข้าใช้ความกว้างแถบความถี่ในช่วงนั้นได้ ด้วยเหตุนี้ระบบจึงไม่สามารถรองรับปริมาณสถานีลูกข่ายจำนวนมากๆ ได้ในเวลาเดียวกัน

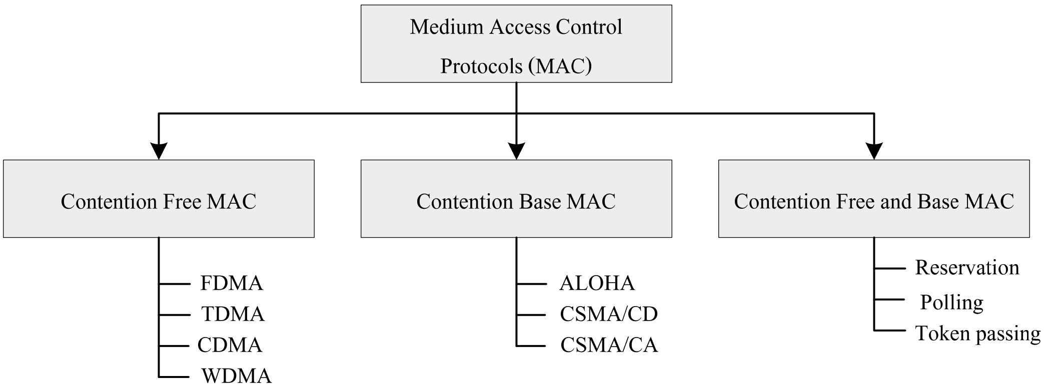
2.1.2 การร่วมใช้ช่องสัญญาณที่มีการแข่งขัน

เทคนิคการร่วมใช้ช่องสัญญาณที่มีการแข่งขัน เป็นเทคนิคที่ช่องสัญญาณจะไม่มีการกำหนดแบบแน่นอนหรือตายตัวให้กับสถานีลูกข่าย สถานีลูกข่ายทุกรายจะต้องทำการแข่งขันในเข้าใช้ช่องสัญญาณเพื่อส่งแพ็กเกต ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 แบบใหญ่ๆ ดังนี้คือ 1. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบ ALOHA (ซึ่งเป็นเทคนิคแบบแรกๆ), 2. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบ CSMA/CA (carrier sense multiple access with collision avoidance) ซึ่งเป็นเทคนิคที่พัฒนามาจาก ALOHA และ 3. การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบ CSMA/CD (carrier sense multiple access with collision detection) ข้อดีของการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบที่มีการแข่งขัน คือสามารถรองรับปริมาณสถานีลูกข่ายได้เป็นจำนวนมากและสามารถรองรับปริมาณการใช้ช่องสัญญาณที่มีการปรับเปลี่ยนอยู่ตลอดเวลาได้ แต่ข้อเสียคือเมื่อมีสถานีหรือคอมพิวเตอร์ลูกข่ายจำนวนมากส่งแพ็กเกตพร้อมๆ กัน ระบบจะขาดเสถียรภาพในการทำงาน อันเนื่องมาจากการชนกันของแพ็กเกตมากเกินไป นอกจากนี้ไม่สามารถคาดเดาเวลาประวิงในการส่งแพ็กเกตได้ จึงทำให้การร่วมใช้ช่องสัญญาณประเภทนี้ ไม่เหมาะสมกับการส่งแพ็กเกตประเภทภาพและเสียง เพราะเป็นรูปแบบการสื่อสารที่ต้องการเวลาประวิงต่ำ

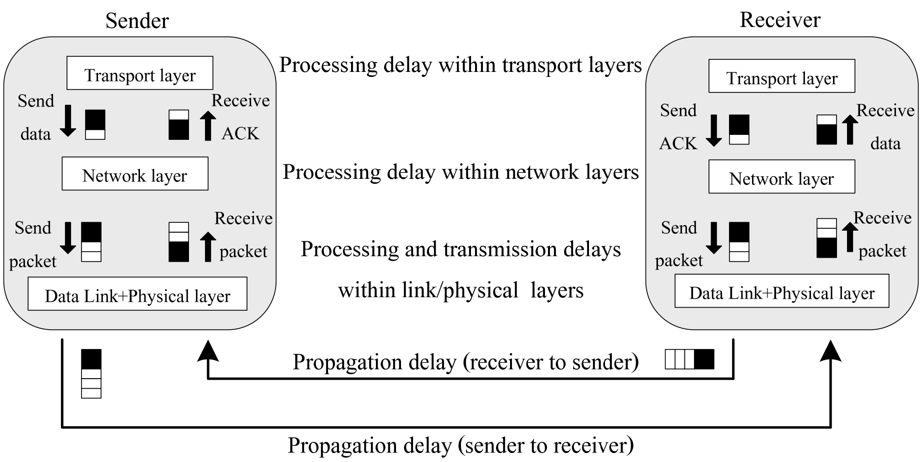
2.1.3 การร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบผสม

เทคนิคการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบผสม เป็นการนำเอาข้อดีของสองแบบแรกมารวมกัน ซึ่งจะเป็นเทคนิคที่จะต้องมีการจองช่องสัญญาณก่อนส่งแพ็กเกต ชนิดของการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบ

ผสมสามารถแบ่งได้ดังนี้คือ 1. แบบ reservation, 2. แบบ polling และ 3. แบบ token passing ซึ่งเทคนิคควบคุมการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบต่างๆ สามารถสรุปได้ดังในรูปที่ 2.3 [64]-[71] สำหรับระบบโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย มาตรฐานที่ใช้ควบคุมการส่งแพ็กเกตในชั้นกายภาพ (physical layer) และในระดับชั้นเชื่อมโยงข้อมูล (data link layer) มีหลายมาตรฐานด้วยกัน อาทิเช่น Hiper LAN, IEEE802.11, IrDA, HomeRF แต่ปัจจุบันมาตรฐานที่ถูกนำมาใช้งานมากที่สุดคือ มาตรฐาน IEEE802.11 ซึ่งเป็นมาตรฐานที่จัดตั้งขึ้นโดยสถาบัน IEEE (institute of electrical and electronic engineering) ซึ่งเป็นมาตรฐานที่ระบุถึงข้อกำหนดต่างๆ ในระดับชั้นกายภาพและในระดับชั้นเชื่อมโยงข้อมูลตามแบบจำลองของ OSI (open system interconnection) จะมีรูปแบบการส่งแพ็กเกตดังแสดงในรูปที่ 2.4 [1]-[5] และ [64]-[71]



รูปที่ 2.3 เทคนิคการร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบต่างๆ [63] [64]

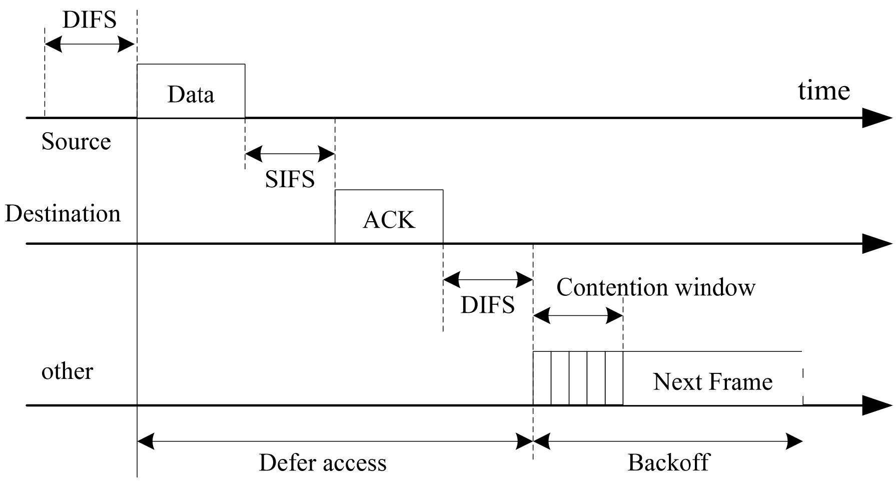


รูปที่ 2.4 มาตรฐาน IEEE802.11 ในชั้นกายภาพและชั้นเชื่อมโยงข้อมูล [67]

กฎเกณฑ์หรือวิธีการที่ใช้ควบคุมการส่งแพ็กเกตระหว่างสถานีลูกข่ายในโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย เรียกว่า **โพรโทคอล** (protocol) สำหรับโพรโทคอลในชั้นเชื่อมโยงข้อมูลจะทำหน้าที่ควบคุมการสื่อสารระหว่างคอมพิวเตอร์ให้มีความน่าเชื่อถือ ควบคุมให้การส่งแพ็กเกตมีความผิดพลาดน้อยที่สุด และควบคุมการประสานเวลา (syncronization) ในการรับส่งข้อมูลระหว่างคอมพิวเตอร์ให้สอดคล้องกัน เพื่อไม่ให้เกิดการชนกันของแพ็กเกตในโครงข่าย ซึ่งโพรโทคอลในชั้นเชื่อมโยงข้อมูล ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็นส่วนย่อยๆ ที่เรียกว่าชั้นควบคุมการร่วมใช้ช่องสัญญาณ MAC (medium access control) และชั้นควบคุมการส่งข้อมูลผ่านช่องสัญญาณ LLC (logical link control)

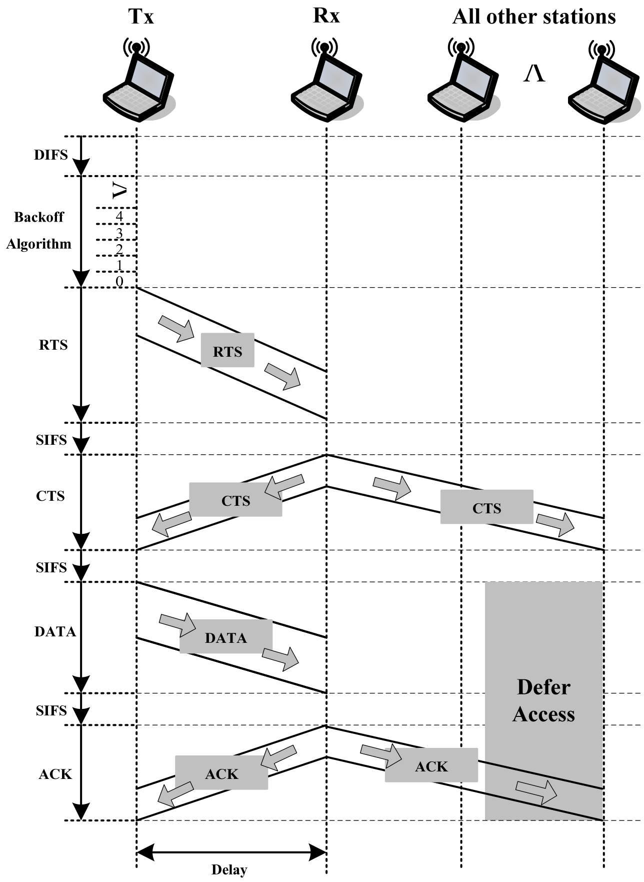
2.2 โพรโทคอล CSMA/CA

ปัจจุบันการส่งแพ็กเกตผ่านช่องสัญญาณโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย จะใช้โพรโทคอล CSMA/CA (carrier sense multiple access with collision avoidance) ซึ่งจะมีรูปแบบการส่งแพ็กเกตอยู่สองโหมดการทำงานด้วยกันคือ 1. โหมดเบสิก (basic) และ 2. โหมดส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS และ CTS (request-to-send and clear-to-send) ซึ่งโพรโทคอล CSMA/CA ในโหมดเบสิก จะมีรูปแบบการส่งแพ็กเกตดังแสดงในรูปที่ 2.5 จากรูปจะเห็นว่ากระบวนการทำงานของโพรโทคอล CSMA/CA ในโหมดเบสิก จะเริ่มจาก ก่อนที่สถานีจะส่งแพ็กเกตจะต้องทำการตรวจสอบช่องสัญญาณเสียก่อนว่าว่างหรือไม่ โดยการเช็คระดับสัญญาณของคลื่นพาห์กับจุดเข้าถึงโครงข่าย (access point) หรือสถานีข้างเคียง ในการส่งแพ็กเกตครั้งแรก สถานีจะต้องรออยู่ช่วงระยะเวลาสั้นๆ ที่เรียกว่าช่วงเวลา DIFS (distributed inter-fame space) จึงจะสามารถส่งแพ็กเกตผ่านช่องสัญญาณได้ และถ้าการส่งแพ็กเกตสำเร็จ สถานีผู้รับแพ็กเกตจะต้องส่งแพ็กเกตควบคุม ACK (acknowledgement) กลับมายังสถานีส่ง เพื่อยืนยันความถูกต้อง

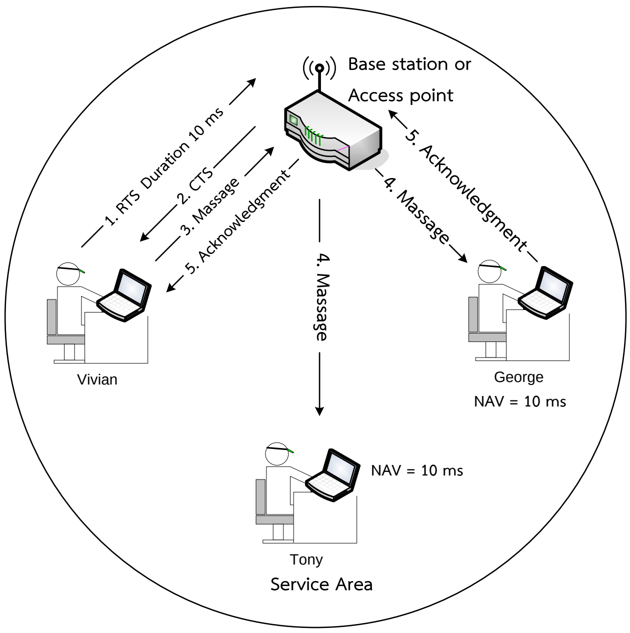


รูปที่ 2.5 กระบวนการส่งแพ็กเกตของโพรโทคอล CSMA/CA ในโหมดเบสิก [67]-[68]

ส่วนการทำงานของโพรโทคอลแบบ CSMA/CA ในโหมดส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS และ CTS แสดงได้ดังรูปที่ 2.6 และ 2.7

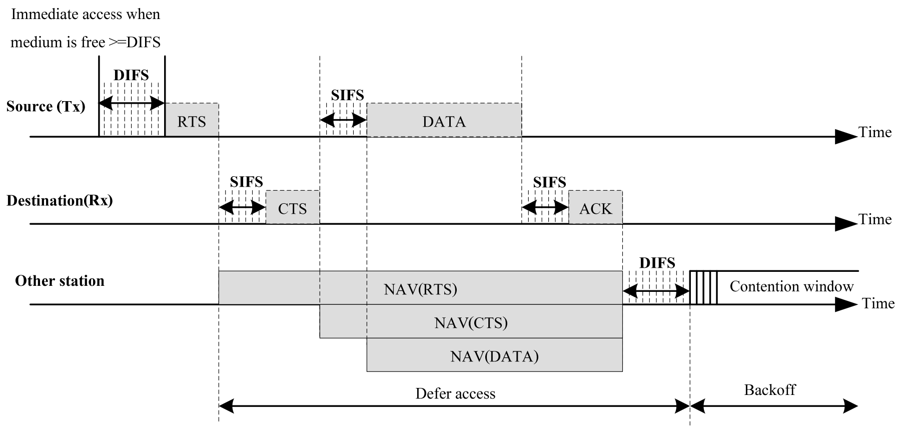


รูปที่ 2.6 โพรโทคอล CSMA/CA ในโหมดส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS/CTS [61]



รูปที่ 2.7 ลำดับการส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS/CTS และส่งค่า NAV [67]

ความแตกต่างระหว่างโหมดเบสิก กับโหมดส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS และ CTS จะอยู่ที่ลำดับการส่งแพ็กเกตในโหมด RTS และ CTS ก่อนที่สถานีจะส่งแพ็กเกตจะทำการส่งแพ็กเกตควบคุมสั้นๆ ที่เรียกว่า RTS (request-to-send) ออกไปก่อน เพื่อใช้จองช่องสัญญาณ เมื่อสถานีปลายทางได้รับแพ็กเกต RTS แล้ว จะรออยู่ช่วงระยะเวลาสั้นๆ ซึ่งเรียกว่าช่วงเวลา SIFS (short interframe space) จากนั้นสถานีปลายทางจะตอบกลับด้วยแพ็กเกตควบคุมที่เรียกว่า CTS (clear-to-send) เพื่อบอกกับสถานีที่จะส่งแพ็กเกตว่าสถานีปลายทางพร้อมที่จะรับแพ็กเกต หลังจากนั้นกระบวนการส่งแพ็กเกตข้อมูลก็จะเริ่มต้นขึ้น ซึ่งกระบวนการส่งแพ็กเกตข้อมูลจะมีรูปแบบเดียวกันกับโหมดเบสิกทุกประการ

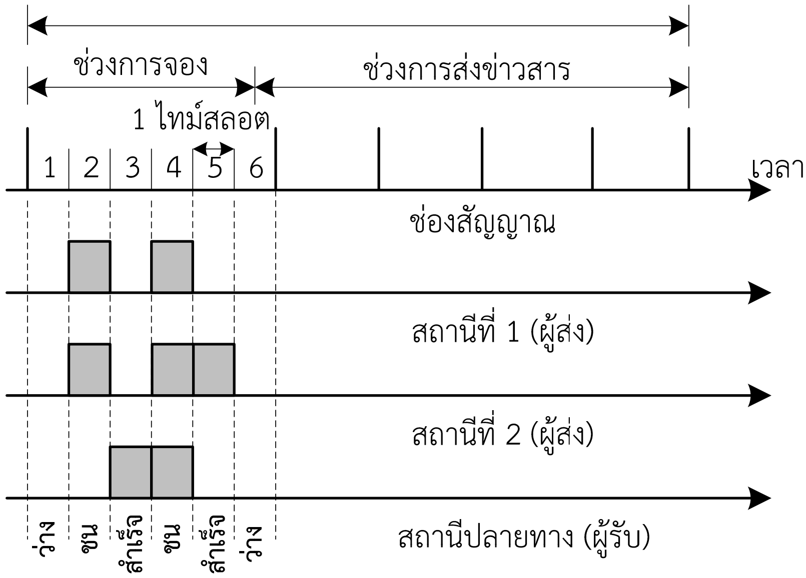


รูปที่ 2.8 กระบวนการตั้งค่า NAV ในโหมดส่งแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS/CTS [67]-[68]

ในช่วงเวลาที่ช่องสัญญาณกำลังถูกใช้ส่งแพ็กเกต สถานีอื่นๆ ที่อยู่ในบริเวณพื้นที่บริการ เมื่อได้รับแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS หรือ CTS จะต้องตั้งค่าเวลา NAV ของตัวเอง (ค่า NAV คือค่าเวลาที่ใช้หน่วงการส่งแพ็กเกตของสถานีอื่นๆ ที่ไม่ได้สิทธิในการเข้าใช้ช่องสัญญาณ ซึ่งเรียกว่า network-allocation vector timer) ค่าคาบเวลา NAV มีค่าเท่ากับช่วงเวลาตามที่ระบุไว้ในแพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS หรือ CTS ที่รับมาจากสถานีข้างเคียง เพื่อที่จะเลื่อนเวลาการเข้าใช้ช่องสัญญาณของตนเองออกไป จนกว่าค่าเวลา NAV ที่ตัวเองตั้งไว้จะหมดลง กลไกดังกล่าวนี้ใช้เพื่อหลีกเลี่ยงการชนกันของแพ็กเกตซึ่งมีชื่อเรียกว่า virtual carrier sensing ดังแสดงในรูปที่ 2.7 และ 2.8

2.3 ปัญหาการชนกันของแพ็กเกตในโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สาย

ถึงแม้โพรโทคอล CSMA/CA จะมีเทคนิคการตั้งค่าเวลา NAV (network-allocation vector timer) และใช้แพ็กเกตจองช่องสัญญาณ RTS และ CTS เพื่อหลีกเลี่ยงการชนกันของแพ็กเกต แต่อย่างไรก็ตามด้วยเหตุที่สถานีลูกข่ายทั้งหมดจะต้องทำงานประสานเวลากัน (synchronise) ตามคุณลักษณะของช่องสัญญาณที่ถูกแบ่งออกเป็นช่วงเวลาที่เท่าๆ กัน (timeslot) การชนกันของแพ็กเกตจะเกิดขึ้น ในกรณีที่มีแพ็กเกตถูกส่งมาถึงสถานีปลายทางพร้อมกันมากกว่าสองแพ็กเกตขึ้นไปในช่วงเวลาไทม์สล็อตเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.9

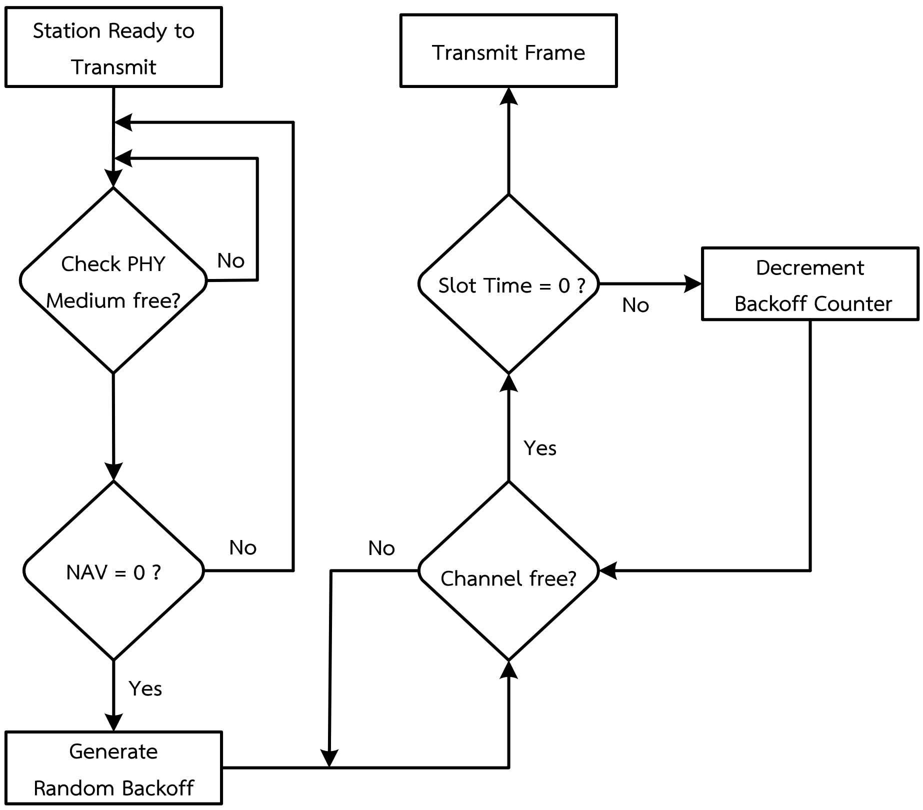


รูปที่ 2.9 ลักษณะการชนกันของแพ็กเกตที่สถานีปลายทาง [67]

โดยทั่วไปสถานะช่องสัญญาณโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สายสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงเวลาคือ 1. ช่องสัญญาณว่าง (idle period), 2. ช่องสัญญาณที่เกิดการชนกันของแพ็กเกต (collision period) และ 3. ช่องสัญญาณที่ส่งแพ็กเกตได้สำเร็จ (successful period)

2.4 หลักการใช้อัลกอริทึมแบคออฟเพื่อลดอัตราการชนกันของแพ็กเกต

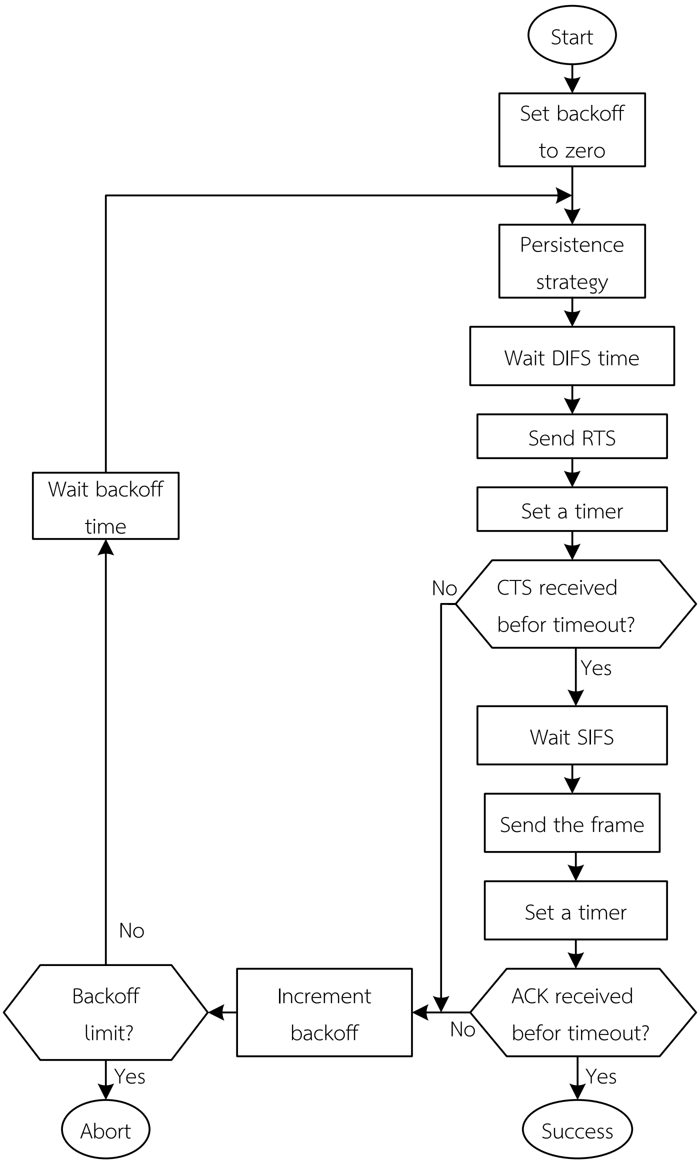
ในปัจจุบันเทคนิคหรือวิธการที่ถูกนำมาใช้เพื่อเป็นกลไกในการควบคุมความผิดพลาดของการส่งแพ็กเกตสำหรับโครงข่ายแบบใช้สาย (wired local area network) จะมีอยู่ 3 วิธีการหลักๆ คือ 1. stop-and–wait [66] , 2. go-back-N [66] และ 3. selective–repeat [66]-[67] แต่สำหรับโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สายจะใช้เทคนิคหรือวิธีการลดอัตราการชนกันของแพ็กเกตที่เรียกว่า **อัลกอริทึมแบคออฟ** (**backoff algorithm**) สถานีที่ต้องการส่งแพ็กเกตซ้ำ ก่อนส่งจะต้องเข้าสู่กระบวนการแบคออฟ (backoff process) เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการชนกันของแพ็กเกตในช่องสัญญาณแบบไม่รู้จบ ซึ่งหลักการทำงานของอัลกอริทึมแบคออฟสำหรับโพรโทคอล CSMA/CA ในโหมดเบสิกแสดงได้ดังรูปที่ 2.10 จากรูปจะเห็นว่ากระบวนการทำงานของอัลกอริทึมแบคออฟจะเริ่มจาก เมื่อสถานีลูกข่ายที่ต้องการจะส่งแพ็กเกตซ้ำ จะทำการสุ่มเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณขึ้นมาค่าหนึ่ง และทำการตรวจเช็คช่องสัญญาณ ถ้าช่องสัญญาณว่างมากกว่าช่วงเวลา DIFS (distributed interframe space) ก็จะทำการลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณลงทีละหนึ่งไทม์สล็อต (count down process) จนขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณเท่ากับศูนย์ไทม์สล็อต สถานีจึงจะสามารถส่งแพ็กเกตผ่านช่องสัญญาณได้ ส่วนการทำงานของอัลกอริทึมแบคออฟในโหมด RTS/CTS แสดงได้ดังในรูปที่ 2.11



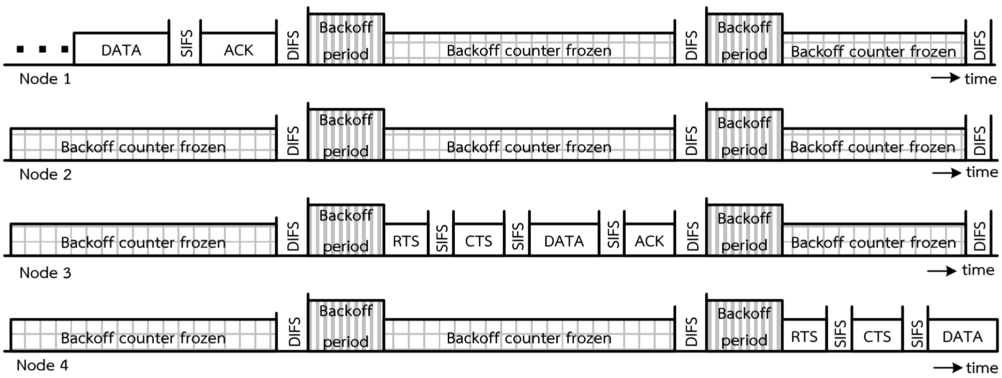
รูปที่ 2.10 การทำงานของอัลกอริทึมแบคออฟในโหมดเบสิก [67]

ในช่วงเวลาที่ช่องสัญญาณกำลังถูกใช้ส่งแพ็กเกต สถานีอื่นๆ ที่มีความประสงค์จะส่งแพ็กเกตและกำลังลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณของตนเองในกระบวนการแบคออฟ จะต้องหยุดการลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณในกระบวนการแบคออฟของตนเองไว้ชั่วขณะ (backoff counter frozen) และรอจนกว่าสถานีที่กำลังส่งแพ็กเกตได้ทำการส่งแพ็กเกตจนเสร็จสิ้น จึงจะเริ่มกระบวนการลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณในส่วนที่เหลือของตนเองใหม่ได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.12 กระบวนการลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณ จนเหลือศูนย์ไทม์สล็อตนี้ จะเป็นหลักการหน่วงเวลาที่สำคัญ เพื่อใช้ลดโอกาสหรือค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตระหว่างสองสถานีหรือมากกว่า

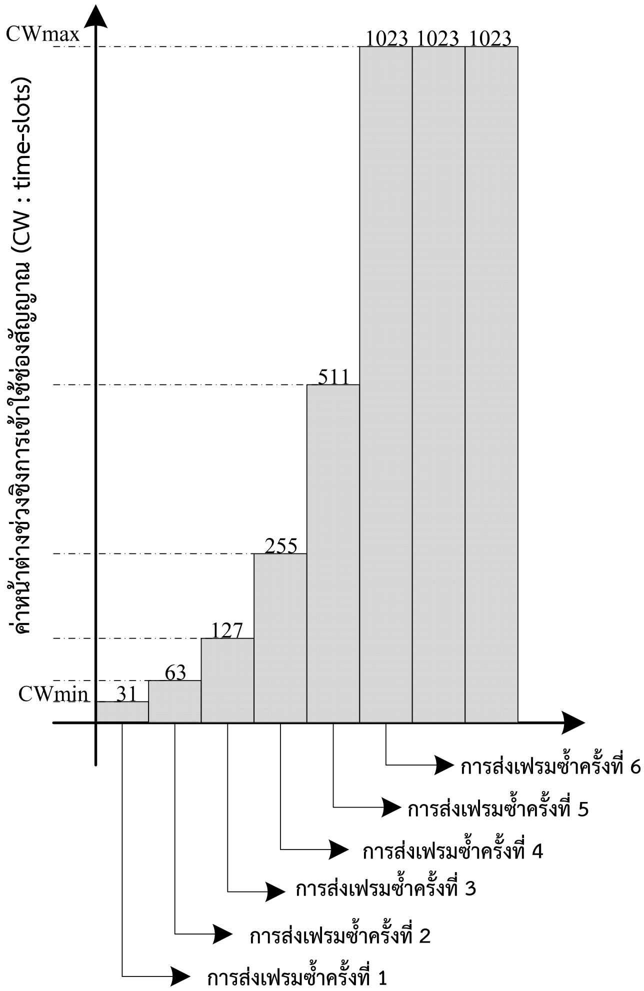
ปัจจุบันรูปแบบหรือชนิดของอัลกอริทึมแบคออฟมีหลายแบบ แต่คุณสมบัติหลักๆ ของอัลกอริทึมแบคออฟที่ดีควรจะมีคุณสมบัติดังนี้ คือมีค่าปริมาณแพ็กเกตที่ส่งผ่านช่องสัญญาณได้สำเร็จสูงสุดหรือมักจะเรียกว่าค่าวิสัยสามารถของระบบ (maximum throughput) มีค่าดีเลย์ของแพ็กเกตที่ส่งจะต้องน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ (minimum packet delay) และมีดรรชนีค่าความเสมอภาคการร่วมใช้ช่องสัญญาณสูงสุด หรือให้ใกล้เคียงกับหนึ่งมากที่สุด (fairness index) อัลกอริทึมแบคออฟที่ถือว่าเป็นแบบแรกๆ ก็คือ BEB อัลกอริทึม (binary exponential backoff algorithm) [6], [11]-[32] ซึ่งเป็นอัลกอริทึมที่นิยมนำมาใช้เปรียบเทียบสมรรถนะกับอัลกอริทึมแบคออฟที่ถูกพัฒนาขึ้นมาใหม่ และที่สำคัญอัลกอริทึมแบคออฟที่ถูกพัฒนาขึ้นมาใหม่ยังคงใช้แนวคิดของ BEB อัลกอริทึมเป็นแนวทางในการพัฒนา



รูปที่ 2.11 การทำงานของอัลกอริทึมแบคออฟในโหมด RTS/CTS [67]



รูปที่ 2.12 การหยุดลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณไว้ชั่วขณะ [67]



รูปที่ 2.13 การเพิ่มขึ้นของขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณที่สัมพันธ์กับจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำของ BEB อัลกอริทึม [61], [67]-[68]

หลักการทำงานเบื้องต้นของ BEB อัลกอริทึม จะเริ่มจากสถานีที่ต้องการจะส่งแพ็กเกตซ้ำ ต้องทำการเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณแบบสุ่ม ซึ่งการสุ่มเลือกครั้งแรกจะเลือกช่วงของขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณที่น้อยที่สุดก่อน (CW_{min}) และถ้าการส่งแพ็กเกตซ้ำในครั้งแรกไม่สำเร็จ ในการส่งแพ็กเกตซ้ำครั้งที่สองและครั้งถัดๆ ไป ขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณจะเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งเท่าตัว เพื่อที่จะลดค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตในช่องสัญญาณ ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเพิ่มขึ้นของหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณกับจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำสูงสุดของ BEB อัลกอริทึมแสดงได้ดังรูปที่ 2.13 ซึ่งอัตราการเพิ่มขึ้นของขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณกับจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำของ BEB อัลกอริทึมจะเป็นดังสมการ

$$CW_i = CW_{\min} \times 2^i \tag{2.1}$$

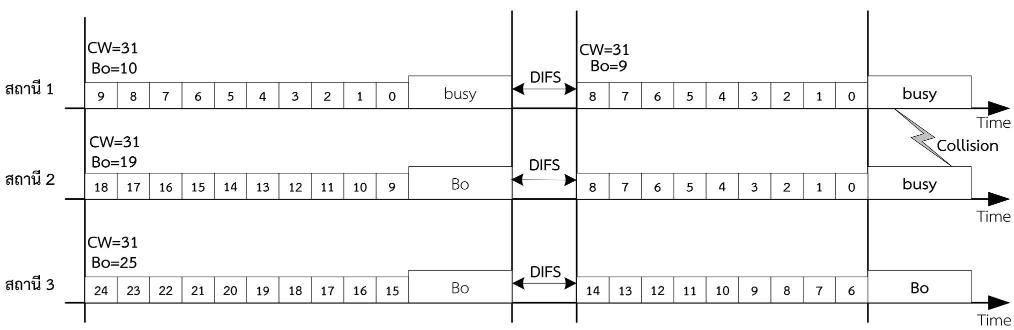
$$m = \frac{CW_{\max}}{CW_{\min}} \tag{2.2}$$

โดยที่ i = 0, 1, 2, 3, ...m เมื่อ i คือจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำหรือจำนวนแบคออฟสเตจและ m คือจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำสูงสุด จากรูปที่ 2.13 จะเห็นว่าขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณ จะเข้าสู่ค่าสูงสุดเท่ากับ 1024 ไทม์สล็อต เมื่อจำนวนการส่งแพ็กเกตซ้ำตั้งแต่ครั้งที่ 6 เป็นต้นไปและจะคงที่อยู่ที่ค่านี้จนกว่าจะส่งแพ็กเกตได้สำเร็จ หลังจากแพ็กเกตส่งสำเร็จขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณ จะถูกตั้งใหม่โดยกลับไปที่ค่าเริ่มต้น (CW_{min}) ซึ่งขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณต่ำสุดจนถึงสูงสุด เป็นค่าที่สามารถกำหนดได้ เพื่อไม่ให้ค่าเวลาประวิงของแพ็กเกตที่ส่งมีค่ามากเกินไป (transmitted packet delay) ในงานวิจัย [6]-[19] ได้แสดงค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกต (p) ของ BEB อัลกอริทึมดังสมการ

$$p = 1-(1-\tau)^{n-1} \tag{2.3}$$

$$\tau = \frac{2}{CW_{Average}+1} \tag{2.4}$$

เมื่อ p คือค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตม, τ คือค่าความน่าจะเป็นที่สถานีจะส่งแพ็กเกตซ้ำ หลังจากที่ลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณจนเป็น 0 ไทม์สล็อต, $CW_{Average}$ คือค่าเฉลี่ยของขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณและ n คือจำนวนสถานีทั้งหมดที่อยู่ในพื้นที่บริการ จากสมการที่ 2.3 และ 2.4 ถ้าจำนวนสถานีคงที่ แต่เปลี่ยนขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณให้มีค่ามากขึ้น จะทำให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตมีค่าน้อยลง และในทางตรงกันข้าม ถ้ากำหนดให้จำนวนขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณคงที่ และเปลี่ยนจำนวนสถานีให้เพิ่มมากขึ้น จะเห็นว่าค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตจะมีค่าเพิ่มขึ้นเช่นกัน ฉะนั้นพอสรุปเบื้องต้นได้ว่าจำนวนสถานีและจำนวนไทม์สล็อตของหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณ มีผลต่อค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกต แต่อย่างไรก็ตามถึงแม้เทคนิคของ BEB อัลกอริทึมจะใช้วิธีสุ่มเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณ เพื่อลดค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกต แต่ถ้าจำนวนสถานีตั้งแต่สองสถานีขึ้นไปทำการสุ่มเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณได้ค่าที่เท่ากันจะส่งผลให้กระบวนการลดขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณจนเหลือศูนย์ไทม์สล็อต ที่ช่วงเวลาเดียวกัน ก็จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตอยู่ดี อย่างเช่นสถานีที่ 1 และสถานีที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 การชนกันของแพ็กเกตในกรณีที่สถานีสุ่มเลือกได้ขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณที่เท่ากันของอัลกอริทึม BEB [61]

เมื่อจำนวนสถานีลูกข่ายในพื้นที่บริการมีจำนวนมากขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกต ในกรณีที่สุ่มเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณได้ค่าที่เท่ากัน ก็จะเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกัน ซึ่งข้อด้อยหลักๆ ของ BEB อัลกอริทึมสามารถสรุปได้ดังนี้ คือ

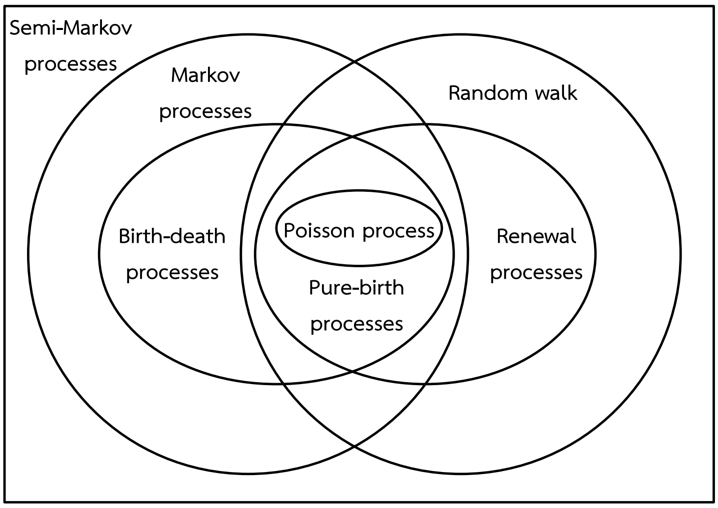
- จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตถ้าจำนวนสถานีตั้งแต่สองสถานีขึ้นไปทำการสุ่มเลือกขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมในช่องสัญญาณได้ค่าที่เท่ากัน
- ถ้าจำนวนสถานีเพิ่มมากขึ้นจะส่งผลให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดการชนกันของแพ็กเกตเพิ่มมากขึ้นด้วยเช่นกัน
- ค่าการประวิงเวลาของแพ็กเกตที่ส่งจะเพิ่มมากขึ้นตามจำนวนสถานีและจำนวนไทม์สล็อตของขนาดหน้าต่างการช่วงชิงร่วมใช้ช่องสัญญาณที่แต่ละสถานีสุ่มเลือกได้

ด้วยปัญหาดังที่ได้กล่าวมานี้ งานวิจัยในปัจจุบันจึงมุ่งเน้นที่จะออกแบบและพัฒนาอัลกอริทึมแบคออฟที่สามารถลดข้อด้อยของอัลกอริทึม BEB แต่ถึงอย่างไรก็ตามยังไม่มีอัลกอริทึมแบคออฟแบบใดที่สามารถลดข้อด้อยของอัลกอริทึม BEB ได้หมดทุกประการ สำหรับงานวิจัยนี้ได้พัฒนาและออกแบบอัลกอริทึมแบคออฟแบบใหม่ที่มีสมรรถนะที่ดีกว่าอัลกอริทึมแบคออฟที่มีอยู่เดิม

2.5 กระบวนการปัวซง

โดยทั่วไปโครงข่ายระบบสื่อสารสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบใหญ่ๆ ด้วยกันคือ 1. โครงข่ายแบบเซอร์กิตสวิทช์ (circuit-switched network) และ 2. โครงข่ายแบบแพ็กเกตสวิทช์ (packet-switched network) การจำลองโครงข่ายระบบสื่อสารส่วนมากจะใช้ทฤษฎีตัวแปรสุ่มและกระบวนการเฟ้นสุ่ม (random variables and stochastic process) เพื่อวิเคราะห์หาสมรรถนะของระบบ เช่น การจำลองอัตราการเรียกเข้าของระบบโทรศัพท์ต่อชั่วโมง หรือการจำลองอัตราการส่งแพ็กเกตผ่านช่องสัญญาณต่อนาที เป็นต้น แต่กระบวนการเฟ้นสุ่มที่ใช้จำลองในระบบสื่อสารจะมีหลายรูปแบบด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 2.15 [65] ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาเฉพาะโครงข่ายท้องถิ่นแบบไร้สายที่เป็นแบบแพ็กเกตสวิทช์ที่อยู่ในเทอมของการส่งแพ็กเกตหรือแพ็กเกตได้สำเร็จในช่วงระยะเวลาที่พิจารณา จากรูปที่ 2.15 จะเห็นว่าทฤษฎีที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการจำลองระบบสื่อสารของกระบวนการเฟ้นสุ่มแบบอื่นๆ คือ **กระบวนการปัวซง (poisson process)**

คุณลักษณะที่สำคัญของกระบวนการเฟ้นสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวซงคือ 1. จำนวนครั้งที่จะส่งแพ็กเกตได้สำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง เป็นอิสระกับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในอดีตหรือในช่วงเวลาอื่น 2. ค่าความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตส่งได้สำเร็จหนึ่งครั้ง จะเกิดขึ้นในช่วงเวลาที่สั้นมากและไม่สัมพันธ์กับจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาอื่นหรือนอกช่วงเวลาที่สนใจ 3. อัตราการเข้ามาของแพ็กเกตต่อช่วงเวลาจะสั้นมาก จนสามารถกำหนดได้ว่ามีแพ็กเกตเข้ามาได้ช่วงเวลาละหนึ่งแพ็กเกตเท่านั้น 4. ค่าความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตส่งสำเร็จได้มากกว่าหนึ่งครั้งในช่วงเวลาที่สนใจ มีค่าน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้ และ 5 แพ็กเกตที่เข้ามา ในแต่ละช่วงเวลาจะเป็นแบบลำดับไม่มีการเหลื่อมล้ำกัน (nonoverlapping intervals)



รูปที่ 2.15 ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการเฟ้นสุ่มแบบต่างๆ ที่ใช้จำลองโครงข่ายการสื่อสาร [65]

กระบวนการปัวซงเป็นกระบวนการที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา (a point process) ที่พิจารณาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจในช่วงเวลา t วินาที (t-second) ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการแจงแบบปัวซงคือการแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) ที่มีการกำหนดขอบเขตในการพิจารณา ถ้ากำหนดให้ค่าความน่าจะเป็นที่ส่งแพ็กเกตได้สำเร็จ *k* ครั้งในช่วงเวลา t วินาที และให้อัตราการเข้ามาของแพ็กเกตมีการแจกแจงแบบปัวซง จะเป็นดังสมการ

$$P_K(t) = P(k \text{ success in t seconds}) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!};\, k = 0, 1, 2, \ldots n \tag{2.5}$$

โดยที่ λ คืออัตราการเข้ามาของแพ็กเกต (the rate of arrivals per unit time) และ n คือจำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด (the number of trials) ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution function) ของกระบวนการเฟ้นสุ่มแบบปัวซง จะเป็นดังสมการ

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)U(x - x_i) \tag{2.6}$$

โดยที่ $U(x)$ คือฟังก์ชันบันไดหนึ่งหน่วย (unit step function) [68]

$$U(x) = \begin{cases} 1; & \text{for } x \geq 0 \\ 0; & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

ถ้าพิจารณาในสภาวะคงตัว (normalizing condition) จะได้ว่า

$$F(\infty) = 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1 \tag{2.8}$$

จากสมการที่ 2.8 หมายถึงผลรวมค่าความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นทั้งหมดจะเท่ากับหนึ่ง โดยทั่วไปการหาค่าเฉลี่ยการแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่องตามเวลา (expectation or the mean value a random variable) จะมีสมการพื้นฐานคือ

$$E(N) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(N = i)$$

$$E[g(N)] = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)P(N = i) \tag{2.9}$$

จากสมการที่ 2.9 จะได้ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบปัวซงเป็น

$$E(P) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} = nP \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} P^k (1-P)^{n-k-1} \tag{2.10}$$

จากสมการที่ 2.10 กำหนดให้ $n \to \infty, P \to 0, nP \to \lambda t$ สุดท้ายจะได้ค่าเฉลี่ยการแจกแจงแบบปัวซงคือ

$$E(P) = \lambda t \tag{2.11}$$

หรือหาค่าเฉลี่ยการแจกแจงแบบปัวซง สามารถหาได้โดยใช้นิยามของการหาค่าเฉลี่ยแบบไม่ต่อเนื่องคือ

$$E\{P(t)\} = \overline{P}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda t) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t \tag{2.12}$$

สำหรับความแปรปรวนการแจกแจงแบบปัวซงหาได้จากโมเมนต์ลำดับที่สอง

$$\sigma_x^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E(X^2) - E(X)^2 \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} Var(P) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k} - (nP)^2 \\ &= nP \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n-1}{l} P^l (1-P)^{n-l-1} - (nP)^2 \\ &= nPP(n-1) + nP - (nP)^2 = nP(1-P) \end{aligned} \tag{2.14}$$

จากสมการที่ 2.14 กำหนดให้ลิมิตของตัวแปรลู่เข้าสู่ $n \to \infty, P \to 0, nP \to \lambda t$ สุดท้ายจะได้ความแปรปรวนการแจกแจงแบบปัวซงเป็น

$$Var(P) = \lambda t \tag{2.15}$$

หรือค่าความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซง สามารถหาได้โดยใช้นิยามของการหาค่าความแปรปรวนแบบไม่ต่อเนื่องคือ

$$Var\{P(t)\} = E\{(P(t) - \overline{P}(t))^2\}$$

และ
$$E\{P(t)(P(t)-1)\}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)P_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda t)^2\frac{(\lambda k)^{k-2}}{(k-2)!}=(\lambda t)^2 \qquad (2.16)$$

สุดท้ายค่าความแปรปรวนการแจกแจงแบบปัวซงคือ

$$\begin{aligned}Var\{P(t)\}&=E\{(P(t)-\overline{P}(t))^2\}=E\{P(t)(P(t)-1)\}+\overline{P}(t)+(\overline{P}(t))^2\\&=(\lambda t)^2+(\lambda t)-(\lambda t)^2=\lambda t\end{aligned} \qquad (2.17)$$

และฟังก์ชันกำเนิด (the probability-generating function) ของการแจกแจงแบบปัวซงคือ

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}}{k!}(\lambda tz)^k=e^{-\lambda t(1-z)} \qquad (2.18)$$

โดยพื้นฐานแล้วสมการที่ 2.5 เป็นค่าความน่าจะเป็นที่ส่งแพ็กเกตได้สำเร็จ *k* ครั้งในช่วงเวลา t วินาที ในช่องสัญญาณแบบไม่มีความจำ (memory less channel) ซึ่งหมายถึงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในอนาคตจะขึ้นอยู่เฉพาะเหตุการณ์ปัจจุบันเท่านั้น เหตุการณ์ในอดีตไม่มีผล ค่าความน่าจะเป็นสะสมของอัตราการเข้ามาของแพ็กเกต (the accumulated number of arrivals) ในแต่ละช่วงเวลา $t_1\le t_2\le t_3\le\Lambda\ \le t_N\le t_{N+1}$ คือ

$$\begin{aligned}&P[X_{tN+1}=k_{tN+1}/X_{t1}=k_{t1},X_{t2}=k_{t2},\mathrm{K}\ ,X_{tN}=k_{tN}]\\&=P[X_{tN+1}=k_{tN+1}/X_{tN}=k_{tN}]\end{aligned} \qquad (2.19)$$

จากสมการที่ 2.19 ทำให้ทราบว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของอัตราการเข้ามาของแพ็กเกตจะพิจารณาเฉพาะแพ็กเกตที่เข้ามาก่อนหน้านี้เท่านั้น จากสมการที่ 2.5 ถ้ากำหนดค่าเริ่มต้นที่ไม่มีแพ็กเกตอยู่ในระบบคือ *k*=0 จะได้

$$P_0(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!};k=0$$

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \qquad (2.20)$$

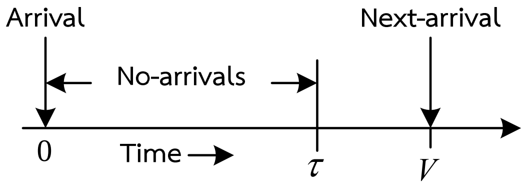
ให้ τ เป็นช่วงเวลาแบบสุ่มครั้งแรกที่มีแพ็กเกตเข้ามาในระบบ หลังจากที่กำหนดให้เวลาเริ่มต้นพิจารณาที่ t = 0 ดังแสดงในรูปที่ 2.16 จากรูปที่ 2.16 ค่าความน่าจะเป็นที่จะมีแพ็กเกตแรกเข้ามาที่เวลา τ คือ

$$\overline{F_\tau}(t)=\Pr[\text{no arrival in }(0,t)]=P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

$$F_\tau(t)=\Pr[1^{st}\text{ event in happens before time }t]=1-P_0(t)=1-e^{-\lambda t} \qquad (2.21)$$

จากสมการที่ 2.21 ฟังก์ชันความหนาแน่นค่าความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตแรกจะเข้ามา (probability density function of time to first event) คือ

$$f_\tau(t)dt=P[t<\tau\le t+dt]=\frac{d}{dt}F_\tau(t)=\lambda e^{-\lambda t}dt;\quad t\ge 0 \qquad (2.22)$$



รูปที่ 2.16 ช่วงเวลาอัตราการเข้ามาของแพ็กเกตแรก [65]

จากสมการที่ 2.21 และ 2.22 จะเห็นว่าเป็นการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลแบบลบ และมีค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนเป็น

$$E(\tau) = \int_{t=0}^{\infty} t f_\tau(t) dt = \frac{1}{\lambda} \tag{2.23}$$

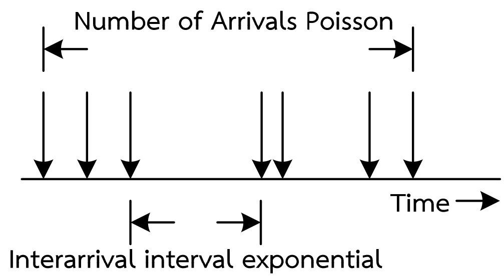
$$Var(\tau) = \int_{t=0}^{\infty} (t - E\{\tau\})^2 f_\tau(t) dt = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.24}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนแพ็กเกตที่เข้ามาแบบปัวซงกับช่วงเวลาหรือระยะห่างของเวลาที่แพ็กเกตเข้ามาแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลดังแสดงในรูปที่ 2.17 สำหรับโครงข่ายแบบแพ็กเกตสวิตท์รูปแบบแพ็กเกตที่เข้ามาในระบบจะเป็นแบบปัวซงที่ไม่ต่อเนื่องทางเวลา ส่วนช่วงระยะเวลาที่แต่ละแพ็กเกตเข้ามาในระบบจะเป็นแบบลำดับที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่ต่อเนื่องทางเวลา ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณแพ็กเกตที่เข้ามากับช่วงระยะเวลาของแต่ละแพ็กเกตเป็นอิสระต่อกันทางสถิติ จากรูปที่ 2.17 ความน่าจะเป็นที่จะมีแพ็กเกตเข้ามาในช่วงเวลา $t + \Delta t$ และกำหนดให้ค่า Δt มีค่าน้อยมาก จนทำให้มีเพียงแค่หนึ่งแพ็กเกตเท่านั้น ที่สามารถเข้ามาได้ในแต่ละช่วงเวลา Δt ($\lambda \Delta t \leq 1$) ดังสมการ

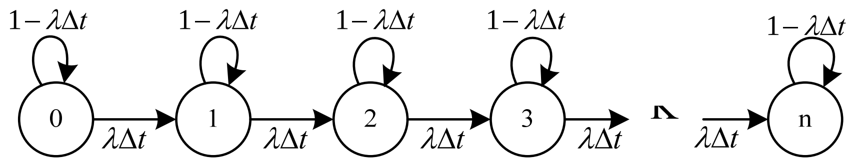
$$P_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + O(\Delta t) \tag{2.25}$$

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + O(\Delta t) \tag{2.26}$$

$$P_2(\Delta t) = O(\Delta t); \quad i \geq 2 \tag{2.27}$$



รูปที่ 2.17 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปัวซงกับเอ็กซ์โพเนนเชียล [65]



รูปที่ 2.18 อัตราการเข้ามาของแพ็กเกตในกระบวนการแบบปัวซง [65]

จากสมการที่ 2.25-2.27 ถ้าช่วงเวลา Δt มีค่าน้อยมาก จนทำให้อัตราการเข้ามาได้ครั้งละหนึ่งแพ็กเกตเท่านั้น และถ้ามีแพ็กเกตเข้ามามากกว่าหนึ่งในช่วงเวลา Δt จะไม่สนใจซึ่งก็คือ $\lim_{\Delta t \to 0}[O(\Delta t)/\Delta t) = 0$ สามารถแสดงแผนภาพลำดับการเปลี่ยนสเตจดังในรูปที่ 2.18 จากรูปกำหนดให้แต่ละสเตจเป็นอิสระแก่กัน การหาค่าความน่าจะเป็นที่ระบบจะอยู่ที่สเตจ $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$,... $P_n(t)$ ดังสมการ

อันดับแรกในกรณีที่ $n = 0$

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P[\text{no arrivals in } (0, t+\Delta t)] \\ &= P[\text{no arrivals in } (0, t)] \times P[\text{no arrivals in } (t, t+\Delta t)] \\ &= P_0(t)(1-\lambda\Delta t) \end{aligned} \tag{2.28}$$

ในกรณีที่ $n > 0$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P[\text{no arrivals in } (0, t+\Delta t)] \\ &= P[n \text{ arrivals in } (0, t)] \times P[\text{no arrivals in } (t, t+\Delta t)] + \\ &\quad P[(n-1) \text{ arrivals in } (0, t)] \times P[\text{one arrivals in } (t, t+\Delta t)] \\ &= P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \end{aligned} \tag{2.29}$$

จัดสมการที่ 2.28 และ 2.29 ใหม่จะได้

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t); \qquad n = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t); \qquad n > 0 \tag{2.31}$$

สมการที่ 2.30 กับ 2.31 เรียกว่าสมการ differtial difference ซึ่งจะถูกใช้มากในทฤษฎีคิว (queuing theory) สามารถเขียนสมการ 2.31 ให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ได้เป็น

$$\frac{dP(t)}{dt} = \Lambda P(t) \tag{2.32}$$

โดยที่ $P(t) = (P_0(t), P_1(t), ...P_n(t),...)^T$ และ Λ คือ เมทริกซ์กำเนิดที่มีค่าน้อยมาก (infinitesimal generator matrix)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & \Lambda \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$

คำตอบของสมการที่ 2.31 กับ 2.32 ใช้วิธีแก้สมการแบบ Kolmogorov forward differential equation จะได้คำตอบเป็น

$$P_1(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)}{1!} = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.33}$$

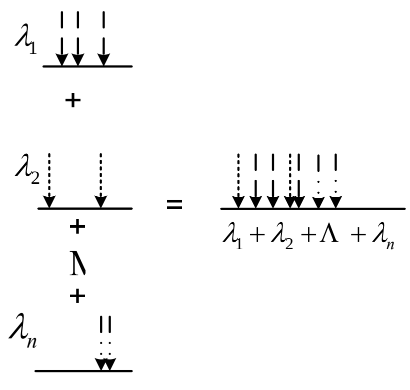
$$P_2(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^2}{2!} \tag{2.34}$$

$$P_3(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^3}{3!} \tag{2.35}$$

$$\mathrm{M}$$

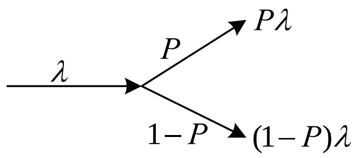
$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{2.36}$$

สมการที่ 2.33 ถึง 2.36 คือคำตอบของสมการที่ 2.5 นั่นเอง การรวมและการแบ่งค่าความน่าจะเป็นของกระบวนการปัวซง (adding and splitting poisson process) ถ้านิยามให้เหตุการณ์ในแต่ละช่วงเวลา Δt ที่แพ็กเกตเข้ามาเป็นอิสระแก่กัน (independent poisson process) คือ λ_1, λ_2 ,... λ_n การรวมอัตราการเข้ามาของกระบวนการปัวซงแสดงได้ดังรูปที่ 2.19

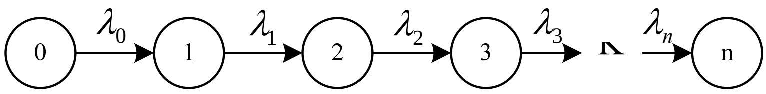


รูปที่ 2.19 การรวมอัตราการเข้ามาของแพ็กเกตในกระบวนการปัวซง [65]

จากรูปที่ 2.19 ซึ่งก็คือ $\lambda_{\mathrm{Total}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \mathrm{K} + \lambda_n$ และในทางกลับกันการแบ่งอัตราการออกไปของกระบวนการปัวซงแสดงได้ดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 การแบ่งอัตราการเข้ามาของกระบวนการปัวซง [65]



รูปที่ 2.21 กระบวนการเข้ามาอย่างเดียวของแพ็กเกต [65]

จากรูปที่ 2.18 ถ้าไม่พิจารณาส่วนที่อยู่กับที่ (self-transitions) ก็จะเป็นระบบที่พิจารณาเฉพาะอัตราการเข้ามาอย่างเดียวหรือ pure birth process ดังในรูปที่ 2.21 การวิเคราะห์กระบวนการเข้ามาอย่างเดียว อันดับแรกพิจารณาในกรณีที่ $n = 0$

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P[\text{no arrivals in } (0, t+\Delta t)] \\ &= P[\text{no arrivals in } (0, t)] \times P[\text{no arrivals in } (t, t+\Delta t)] \\ &= P_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t) \end{aligned} \tag{2.37}$$

และในกรณีที่ $n > 0$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P[\text{no arrivals in } (0, t+\Delta t)] \\ &= P[n \text{ arrivals in } (0, t)] \times P[\text{no arrivals in } (t, t+\Delta t)] + \\ &\quad P[(n-1) \text{ arrivals in } (0, t)] \times P[\text{one arrivals in } (t, t+\Delta t)] \\ &= P_n(t)(1-\lambda_n \Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t \end{aligned} \tag{2.38}$$

จัดสมการที่ 2.37 และ 2.38 ใหม่และกำหนดให้ลิมิต $\Delta t \to 0$ สมการที่ได้จะอยู่ในรูปแบบ Kolmogonov forward differential equations คือ

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t); \qquad n = 0 \tag{2.39}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t); \qquad n > 0 \tag{2.40}$$

ในสภาวะคงตัว (normalizing condition) ผลรวมค่าความน่าจะเป็นทุกสเตจเท่ากับหนึ่ง

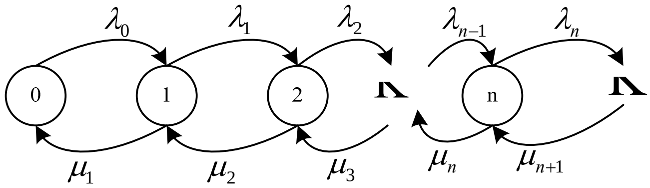
$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \tag{2.41}$$

สามารถเขียนสมการ 2.40 ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้เป็น

$$\frac{dP(t)}{dt} = \Lambda P(t) \tag{2.42}$$

โดยที่ $P(t) = (P_0(t), P_1(t), \ldots P_n(t), \ldots)^T$ และ Λ คือ เมทริกซ์กำเนิดที่มีค่าน้อยมาก (infinitesimal generator matrix)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 & \Lambda \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{bmatrix}$$



รูปที่ 2.22 กระบวนการ เกิด-ตาย [65]

ในกรณีที่อัตราการเข้ามาและออกไปของแพ็กเกตในกระบวนการปัวซงเท่ากัน และอยู่ในสภาวะคงตัว ที่เรียกว่าขบวนการ เกิด-ตาย (birth and death process) สามารถจำลองระบบได้ดังในรูปที่ 2.22 การวิเคราะห์กระบวนการ เกิด-ตาย อันดับแรกพิจารณาในกรณีที่ $n = 0$

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P[0 \text{ in system at time } t\ ] \times P[\text{no arrivals in } (t, t+\Delta t)] + \\ &\qquad P[1 \text{ in system at time } t\ ] \times P[\text{departure in } (t, t+\Delta t)] \\ &= (1 - \lambda_0 \Delta t) P_0(t) + \mu_1 \Delta t P_1(t) \end{aligned} \tag{2.43}$$

และในกรณีที่ $n > 0$

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) &= P[n \text{ in system at time } t\ ] \\ &\qquad \times P[\text{neither arrivals nor departures in}(t, t+\mathit{\Delta} t)/n \text{ in system}] \\ &\qquad + P[n\text{ -1 in system at time } t\ ] \\ &\qquad \times P[\text{one arrival in } (t, t+\Delta t)/n-1 \text{ in system}] \\ &\qquad + P[n+1 \text{ in system at time } t\ ] \\ &\qquad \times P[\text{one departure in } (t, t+\Delta t)/n+1 \text{ in system}] \\ &= (1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t) P_n(t) + \lambda_{n-1} \Delta t P_{n-1}(t) + \mu_{n-1} \Delta t P_{n+1}(t) \end{aligned} \tag{2.44}$$

จากสมการที่ 2.44 สมมติให้เทอม $1 - \lambda_n \Delta t - \mu_n \Delta t \cong (1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_n \Delta t)$ และกำหนดลิมิตให้ $\Delta t \to 0$ จะได้สมการ

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t); \qquad n = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t); \qquad n > 0 \tag{2.46}$$

สามารถเขียนสมการ 2.46 ให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ได้เป็น

$$\frac{d\mathrm{P}(t)}{dt} = M\mathrm{P}(t) \tag{2.47}$$

โดยที่ $\mathrm{P}(t) = (P_0(t), P_1(t), \ldots P_n(t), \ldots)^T$ และ M คือ เมทริกซ์กำเนิดที่มีค่าน้อยมาก (infinitesimal generator matrix)

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_0 & -\lambda_1 - \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 - \mu_2 & \mu_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 - \mu_3 & \mu_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ถ้าระบบอยู่ในสภาวะคงตัว นั่นคือเทอม $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ สมการ 2.45 และ 2.46 สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\lambda_0 P_0(t) = \mu_1 P_1(t) \tag{2.48}$$

$$(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) = \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \tag{2.49}$$

และ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \tag{2.50}$$

เรียกสมการที่ 2.48 และ 2.49 ว่าสมการในสภาวะสมดุลหรือในสภาวะคงตัว (global balance equation or equilibrium equation) ซึ่งหมายถึง the right-hand side (RHS) is the probability of entering state *n* จะเท่ากับ the left-hand side (LHS) is the probability of leaving state *n* จากสมการที่ 2.48 และ 2.49 ถ้าพิจารณาแบบไม่ต่อเนื่อง

$$(\lambda_n + \mu_n)P_n = \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} \tag{2.51}$$

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \tag{2.52}$$

และ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{2.53}$$

และความสัมพันธ์ระหว่างสเตจเริ่มต้นกับสเตจสุดท้ายคือ

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \tag{2.54}$$

จาก normalizing condition จะได้

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right]^{-1} = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right]} \tag{2.55}$$

ซึ่งกระบวนการ เกิด-ตาย (birth and death process) ที่มีอัตราการเข้ามาแบบปัวซงและมีอัตราการให้บริการหรืออัตราการออกไปแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลคือพื้นฐานที่สำคัญของการจำลองโครงข่ายระบบสื่อสารโดยใช้ทฤษฎีคิว (Queuing theory)