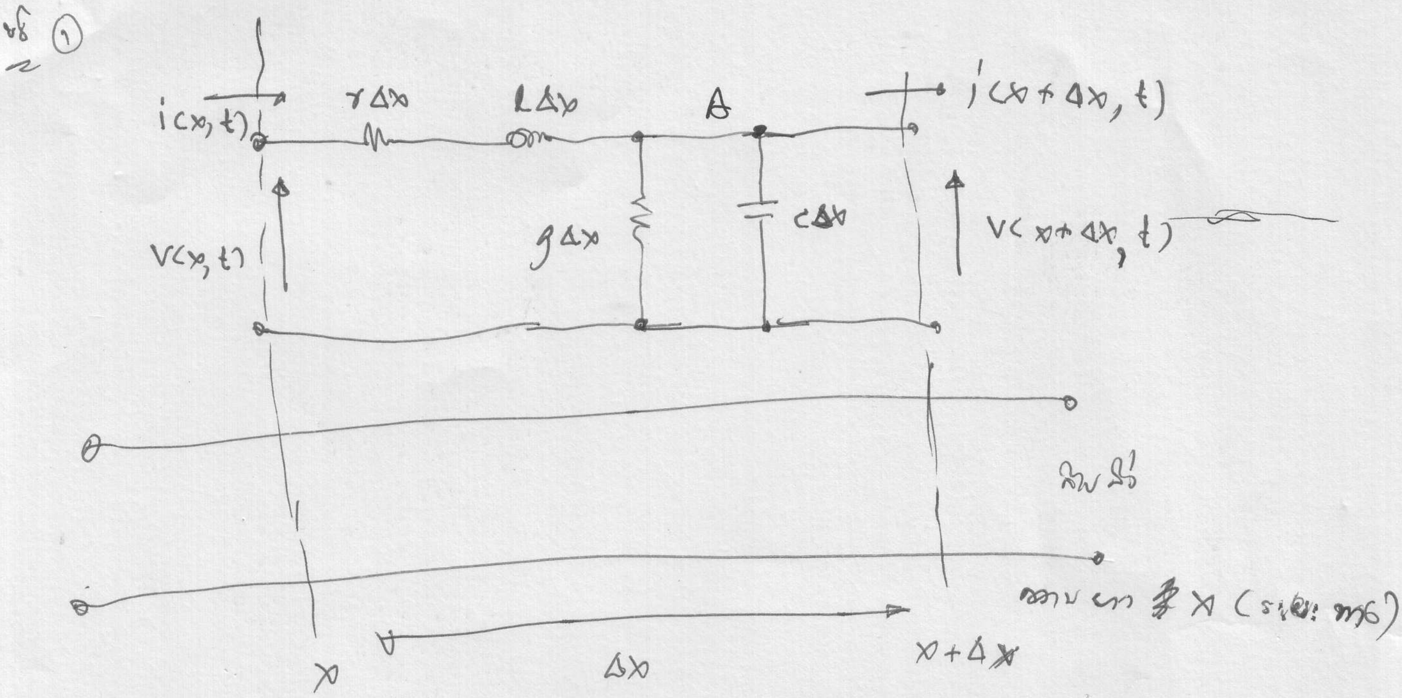
สายส่ง (Transmission Line)

เฉลย กลางภาค 2/2558

ข้อ (1)



ใช้ KVL

$$v(x,t) - l\,\Delta x\,\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) - r\,\Delta x\, i(x,t) - v(x+\Delta x,t) = 0$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\frac{v(x,t) - v(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = r\, i(x,t) + l\,\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) \quad \text{—— (1)}$$

ได้

$$\Delta v(x,t) = v(x,t) - v(x+\Delta x,t)$$

$$-\Delta v(x,t) = v(x+\Delta x,t) - v(x,t) \quad \text{—— (2)}$$

แทน (2) ลงใน (1) และกำหนดลิมิตให้เข้าสู่ 0

$$\lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta v(x,t)}{\Delta x} = r\, i(x,t) + l\,\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) \quad \text{—— (3)}$$

จาก (3) จะได้สมการ อนุพันธ์ ของสายส่ง

$$-\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = r\, i(x,t) + l\,\frac{\partial}{\partial t} i(x,t) \quad \text{—— (4)}$$

ในทำนองเดียวกัน → จะผูกค่ากฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ ที่ Node A

จะพบว่า | กระแสไหลเข้า node (+)
ออก (−)

$$i(x,t) - C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} v(x+\Delta x,t) - g\Delta x\, v(x+\Delta x,t) - i(x+\Delta x,t) = 0 \quad —— (5)$$

เมื่อจัดรูปสมการใหม่

$$\frac{i(x,t) - i(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = g\, v(x+\Delta x,t) + C\frac{\partial}{\partial t} v(x+\Delta x,t) \quad —— (6)$$

ให้

$$\Delta i(x,t) = i(x+\Delta x,t) - i(x,t) \quad —— (7)$$

กระแสที่เปลี่ยนไป (เพิ่มขึ้นไปตามความยาวสายส่งที่จุด $x+\Delta x$ เมื่อเทียบกับจุด x) เมื่อแทนค่า

$$v(x+\Delta x,t) = v(x,t) + \Delta v(x,t) \quad \text{และให้ limit } \Delta x \to 0$$

จะได้

$$\lim_{\Delta x\to 0} -\frac{\Delta i(x,t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{ g[v(x,t) + \Delta v(x,t)] + C\frac{\partial}{\partial t}[v(x,t) + \Delta v(x,t)]\right\} \quad —— (8)$$

แทนค่า $\Delta v(x,t)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} -\frac{\Delta i(x,t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{ g\,v(x,t) + C\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) - \Delta x\left[g\,r\,i(x,t) + l\frac{\partial}{\partial t}i(x,t)\right] + C\left[r\frac{\partial}{\partial t}r(x,t) + l\frac{\partial^2}{\partial t^2}i(x,t)\right]\right\}$$

จะได้สมการ ~~ผลต่าง~~ มูลฐานของสายส่งที่สอง —— (9)

$$-\frac{\partial}{\partial x} i(x,t) = g\,v(x,t) + C\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \quad —— (10)$$

สมการ (4) และ (10) คือสมการพื้นฐานของสายส่ง

$$-\frac{\partial}{\partial x} v(x,t) = r\, i(x,t) + l \frac{\partial}{\partial t} i(x,t) \quad \text{(11)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} i(x,t) = g\, v(x,t) + c \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) \quad \text{(12)}$$

ถ้าแปลงให้อยู่ในรูปทางเดียว แทนกัน ทำการดิฟเฟอเรนเชียล อนุพันธ์สมการ (11) เทียบกับตัวแปร x

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = r \frac{\partial}{\partial x} i(x,t) + l \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} i(x,t) \quad \text{(13)}$$

แทนค่า $\frac{\partial}{\partial x} i(x,t)$ จาก (12) ลงใน (13) จะได้

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = rg\, v(x,t) + (rc + lg) \frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) \quad \text{(14)}$$

ในทำนองเดียวกัน อนุพันธ์สมการ (12) เทียบกับตัวแปร x

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x,t) = g \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) + c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} v(x,t) \quad \text{(15)}$$

แทน (11) ลงใน (15) จะได้

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x,t) = rg\, i(x,t) + (rc + lg) \frac{\partial}{\partial t} i(x,t) + lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(x,t) \quad \text{(16)}$$

ตาม สมการ (14) และ (16) สามารถเขียนได้ว่า

$$r = 0 \quad \text{และ} \quad g = 0$$

แทนค่า r และ g ลงใน (14) และ (16) จะได้ว่า

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,t) = lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(x,t) \quad \text{——— \#}$$

และ

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x,t) = lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(x,t) \quad \text{——— \#}$$

(2)

$$V(x,t) = V_0 \cos\beta(x - ut)$$

$V_0 = 5$ V

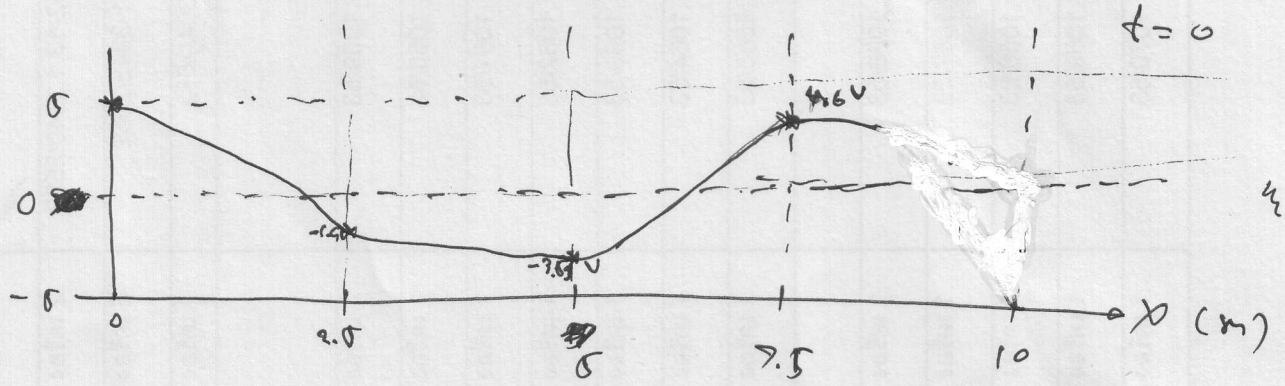
$\beta = \frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

$u = 2.5\times10^{-8}$ m/sec

at $t = 0$

$$V(x,0) = 5\cos 45^\circ\left[x - (2.5\times10^{-8})(0)\right]$$

$$V(x,0) = 5\cos 45^\circ(x)$$



at $x = 0$ m

$$V(x,0) = 5\cos 0^\circ = 5 \text{ V}$$

at $x = 2.5$ m

$$V(x,0) = 5\cos(45^\circ \times 2.5)$$

$$= -1.913 \text{ V}$$

at $x = 5$ m

$$V(x,0) = 5\cos(45^\circ \times 5)$$

$$= -3.53 \text{ V}$$

$x = 9.6$ m

$$V(x,0) = 5\cos(4\pi \times 9.6) = 4.16\ V$$

$x = 10$ m

$$V(x,0) = 5\cos(4\pi \times 10)$$

$$V(x,0) = 0$$

$t = 4\times10^{-6}$ s

$$V(x, 4\times10^{-6}) = 5\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[x - (2.5\times10^{-8} \times 4\times10^{-6})\right]$$

$$V(x,t) = 5\cos\left[4\pi\left(x - 1\times10^{-6}\right)\right]$$

$x = 0$

$$V(x,t) = 5\cos\left[4\pi(0 - 1\times10^{-6})\right]$$

$$V(x, 4\times10^{-6}) = 5\cos\left(4\pi \times 1\times10^{-6}\right)$$

$$V(x, 4\times10^{-6}) = 5\ V$$

$x = 2.5$ m

$$V(x, 4\times10^{-6}) = 5\cos\left[4\pi(2.5 - 1\times10^{-6})\right]$$

$$= 5\cos(11\pi - 4\times10^{-6})$$

$$= -1.913\ V$$

$x = 5$ m

$$V(x, 4\times10^{-6}) = 5\cos\left[4\pi(5 - 10^{-6})\right]$$

$$= -3.535\ V$$

ที่ x = 9.8 m

$$V(x, 4\times10^{-9}) = 5\cos[45(7.8 - 10^{-6})]$$

$$= 4.619 \quad V$$

ที่ x = 10 m

$$V(x, 4\times10^{-9}) = 5\cos[45(10 - 10^{-6})]$$

$$= 7.52\times10^{-9} V.$$

ที่ t = 1.6×10^{-8}

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos(45(x - 2.5\times10^{-8}\times1.6\times10^{-8}))$$

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos[45(x - 4\times10^{-16})]$$

ที่ x = 0 m

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos[45(0 - 4\times10^{-16})]$$

$$= 5 \quad V$$

ที่ x = 2.8 m

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos[45(2.8 - (4\times10^{-16}))]$$

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = -1.913 \quad V$$

ที่ x = 5.0 m ที่เวลา t = 4×10⁻¹⁶ s

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos\left[4\pi\left(5 - 4\times10^{-16}\right)\right]$$

$$= -3.535 \text{ V}$$

ที่ x = 7.5 m ที่เวลา t = 4×10⁻¹⁶ s

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos\left[4\pi\left(7.5 - 4\times10^{-16}\right)\right]$$

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 4.619 \text{ V}$$

ที่ x = 10 m ที่เวลา t = 4×10⁻¹⁶ s

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 5\cos\left[4\pi\left(10 - 4\times10^{-16}\right)\right]$$

$$V(x, 1.6\times10^{-8}) = 0 \text{ V}$$

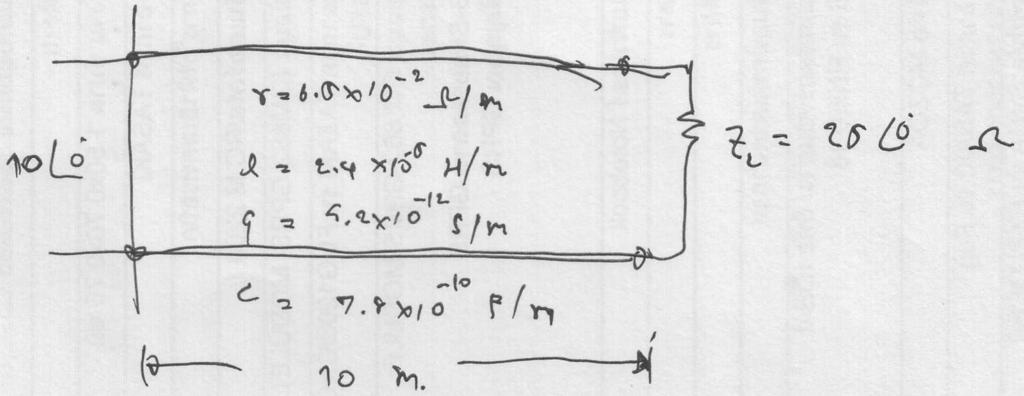
ลาก plot graph ได้ดังนี้

	V(x, t)				
	0 m	2.5 m	5 m	7.5	10
t = 0	5 V	-1.913 V	-3.53 V	4.619 V	≈ 0 V 3.52 V
$t = 4\times10^{-9}$ s	5 V	-1.913	-3.535	4.619	≈ 0 V 3.52 V
$t = 1.6\times10^{-8}$ s	5 V	-1.913	-3.53	4.619	0 V.

(9)

(3)

$f = 1\ MHz$



จงหา แรงดันที่ ปลายทางหรือ

วิธีทำ

$$z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{(r+j\omega l)}{(g+j\omega c)}}$$

$$r + j\omega l = r + j2\pi f L = 6.5\times10^{-2} + j\,2\pi(1\times10^{6})(2.4\times10^{-5})$$

$$r + j\omega l = 0.065 + j\,150.79\ \Omega = 150.79\angle 89.97\ \Omega/m$$

$$g + j\omega c = 9.2\times10^{-12} + j\,2\pi f c = 9.2\times10^{-12} + j\,2\pi(1\times10^{6})(7.8\times10^{-10})$$

$$g + j\omega c = 9.2\times10^{-12} + j\,4.90\times10^{-3}\ S/m$$

$$= 4.9\times10^{-3}\angle 89.99\ S/m$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{150.79\angle 89.97}{4.9\times10^{-3}\angle 89.99}} \cong \sqrt{30612.24\angle 0^\circ}$$

$$z_0 = 175\ \Omega$$ ← [illegible]

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{(r+j\omega l)(g+j\omega c)}$$

$$\gamma = \sqrt{(180\angle 89.57)(4.5\times10^{-3}\angle 89.99)}$$

$$\gamma = \sqrt{0.735\angle 179.56} \simeq \sqrt{0.735\angle 180}$$

$$\gamma = \sqrt{(-0.735+j0)}$$

$$\gamma = \sqrt{(-0.735+j0)}$$

$$\gamma = \sqrt{(-0.735+j0)} = \sqrt{(0.735)}$$

$$\gamma = 0.8573$$

$$\gamma = \sqrt{0.735\angle 180/2}$$

$$\gamma = 0.8573\angle 90^\circ = 0+j0.8573$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\therefore \quad \alpha = 0 \quad \text{and} \quad \beta = 0.8573$$

α = attenuation constant

β = phase constant.

যেহেতু V_2 প্রান্তে সম্পূর্ণ সমন্বয় করা আছে তাই

$$\rho_L = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$Z_L = 25\angle 0 = 25 + j0$$

$$|Z_L| = 25 \ \Omega$$

$$\rho_L = \frac{25 - 125}{25 + 125} = -0.75$$

$$V(s) = V_1 e^{-sz} \left(1 + \rho_L e^{-2sz}\right)$$

$$V_1 = 10\angle 0^\circ = 10 + j0 = 10 \ V$$

$$V(0) = 10 e^{-s(0)z} \left(1 + (-0.75) e^{-2s(0)z}\right)$$

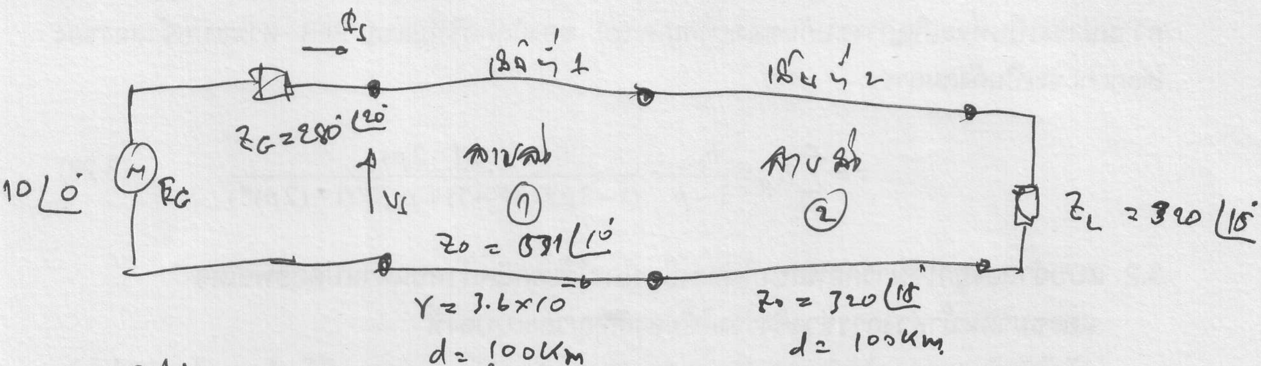
$$V(0) = 2.5 \ V_1$$

$$V(z) = 10 e^{(0+j0.8573)(z)} \left[1 + (-0.75) e^{-2(0+j0.8573)(z)}\right]$$

$$V(z) = 10 e^{j1.7146} \left(1 - 0.75 e^{-j3.425}\right)$$

$$V(z) = 10\left(e^{j1.7146} - 0.75 e^{-j1.7146}\right)$$

ข้อ ④ สายส่ง 2 เส้น



วิธีทำ

สายส่ง ① $Z_0 = 531\angle 10°\ \Omega$

$$\gamma = 3.6\times10^{-6} + j\,6.11\times10^{-6}\ /m$$

$$d_1 = 100\ km = 100000\ m$$

สายส่ง ②

$$Z_0 = 320\angle 15°, \quad d = 100\ km$$

วิธีทำ

หา ρ ของสายส่งเส้นที่ ②

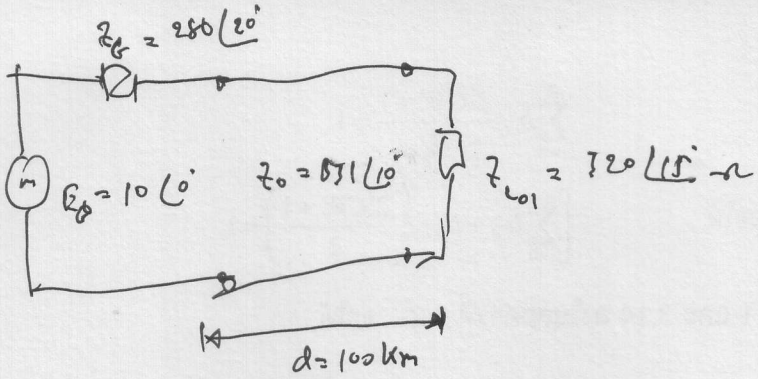
$$\rho_{L2} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{320\angle 15 - 320\angle 15}{320\angle 15 + 320\angle 15}$$

$$\rho_{L2} = 0$$

ที่ปลายสายส่ง ① จะมี Z_{L01} เป็น load

$$Z_{L01} = Z_0 \frac{1 + \rho_{L2} e^{-2\gamma s}}{1 - \rho_L e^{-2\gamma s}}$$

$$Z_{L01} = 320\angle 15 \frac{1 + (0)e^{-2\gamma s}}{1 - (0)e^{-2\gamma s}} = 320\angle 15°\ \Omega$$



$$\rho_{L1} = \frac{Z_{L01} - Z_0}{Z_{L01} + Z_0} = \frac{320\angle 15° - 531\angle 10°}{320\angle 15° + 531\angle 10°}$$

$$\rho_{L1} = \frac{309.05 + j\,82.822 - 522.93 - j\,92.207}{309.05 + j\,82.822 + 522.93 + j\,92.207}$$

$$\rho_{L1} = \frac{-213.88 - j\,9.385}{832.02 + j\,175.029} = \frac{214.048\angle -177.44°}{850.23\angle 11.87°}$$

$$\rho_{L1} = 0.2519\angle -189.35°$$

$$\rho_G = \frac{Z_G - Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{280\angle 20° - 531\angle 10°}{280\angle 20° + 531\angle 10°}$$

$$\rho_G = \frac{263.113 + j\,98.96 - 522.93 - j\,92.207}{263.113 + j\,98.96 + 522.93 + j\,92.207}$$

$$\rho_G = \frac{-259.817 + j\,3.553}{786.043 + j\,189.969} = \frac{259.84\angle 179.21°}{808.20\angle 13.44°}$$

$$\rho_G = 0.321 \angle 165.77^\circ$$

สมการแรงดัน ~~ของ~~กระแส ที่ ระยะทาง x

$$V(x) = E_G \frac{Z_0}{Z_G + Z_0} \cdot \frac{e^{-\gamma x} + \rho_{L1} e^{-\gamma(2d - x)}}{1 - \rho_G \rho_{L1} e^{-2\gamma d}}$$

$$d = 100\,Km = 100 \times 10^{3}\ m.$$

$$\frac{Z_0}{Z_G + Z_0} = \frac{531 \angle 10^\circ}{280 \angle 20^\circ + 531 \angle 10^\circ} = \frac{531 \angle 10^\circ}{808.20 \angle 13.44^\circ}$$

$$\frac{Z_0}{Z_G + Z_0} = 0.657 \angle -3.44^\circ$$

$$\rho_G \rho_{L1} = 0.2577 \angle -189.35 \times 0.321 \angle 165.77 = 0.0807 \angle -23.58^\circ$$

$$\gamma = 3.6 \times 10^{-6} + j\, 6.11 \times 10^{-6} \ /m$$

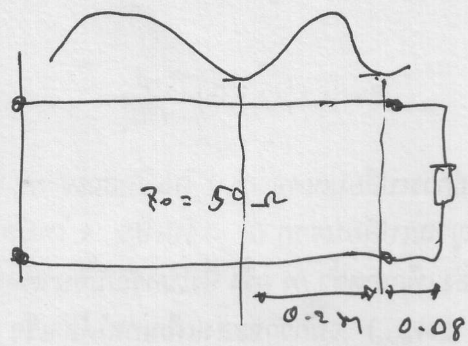
$$V(x) = 10 \angle 0^\circ \times 0.657 \angle -3.44^\circ \times \frac{e^{-(3.6 \times 10^{-6} + j\, 6.11 \times 10^{-6}) x} + 0.2577 \angle -189.35\, e^{\gamma(2d - x)}}{1 - 0.0807 \angle -23.58\, e^{-2\gamma(100000)}}$$

$$I(x) = E_G \frac{1}{Z_G + Z_0} \times \frac{e^{-\gamma x} - \rho_L e^{-\gamma(2d - x)}}{1 - \rho_G \rho_L e^{-2\gamma d}}$$

$$I(x) = \frac{10 \angle 0^\circ}{808.20 \angle 13.44} \times \left[\quad \right]$$

ข้อ 5

สายส่งไร้การสูญเสีย $\qquad Z_0 = 50\ \Omega$



sol^n

$$Z_0 = R_0 = 50\ \Omega$$

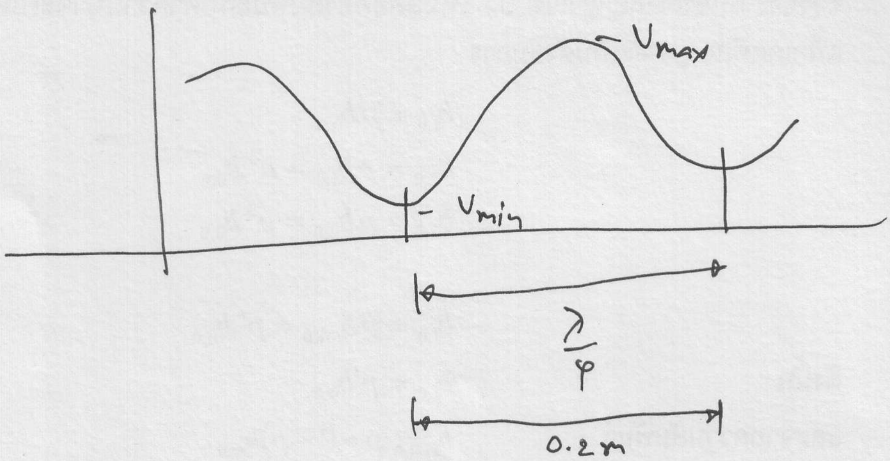
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$\alpha = 0 \rightarrow$ เป็นสายส่งไร้การสูญเสีย

$\gamma = j\beta \rightarrow$ เหลือการลดทอนเชิงเฟส

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

บนสายส่งไร้การสูญเสีย $\qquad V_{min} \rightarrow V_{max} = \frac{\lambda}{4}$



$S = \frac{V_{max}}{V_{min}}$ = อัตราส่วนคลื่นนิ่ง $= 9$

$$9 = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

$$|\rho_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{9-1}{9+1} = \frac{8}{10} = 0.8$$

ความสัมพันธ์ Impedance กับ

$$Z(s) = R_0 \frac{1 + j\,damps}{1 + j3\,damps}$$

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

แทนค่า

$$0.8 = \frac{Z_L - 50}{Z_L + 50}$$

$$0.8(Z_L + 50) = Z_L - 50$$

$$0.8Z_L + 40 = Z_L - 50$$

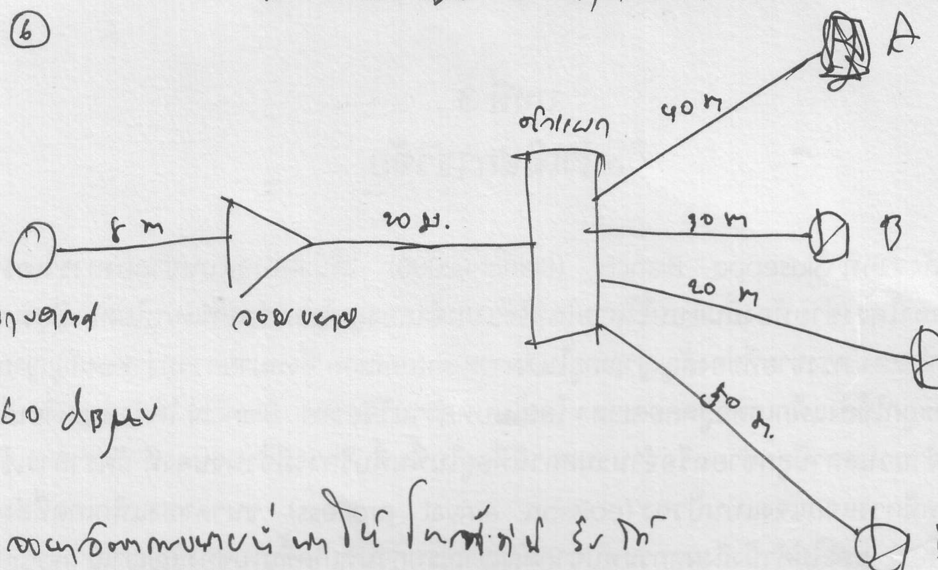
$$40 + 50 = Z_L - 0.8Z_L$$

$$90 = 0.2Z_L$$

$$Z_L = \frac{90}{0.2} = 450\ \Omega$$

การลดทอน ~~ทอ~~ 20 dB/100 m

ข้อ 6



ระดับสัญญาณที่ต้องการให้ได้ในแต่ละจุด คือ

65-80 dBμV

$$dBmW + dB = dBmW$$
$$dBW + dB = dBW$$
$$dBV + dB = dBV$$
$$dB\mu V + dB = dB\mu V$$

หา การลดทอน จาก สายอากาศถึง Amplifier

$$Loss = \frac{20\ dB}{100} \times 8\ m = 1.6\ dB$$

~~Loss~~ จะเหลือ สัญญาณก่อนเข้าขยาย Amp

$$60\ dB\mu V - 1.6\ dB = 58.4\ dB\mu V.$$

Loss ของสายที่ A

$$\frac{20\ dB}{100} \times 60\ m = 12\ dB$$

เหลือสัญญาณที่ A → $58.4\ dB\mu V - 12\ dB = 46.4\ dB\mu V$

Loss ที่เครื่อง B

$$\frac{20\,dB}{100} \times 50\,m = 10\,dB$$

เหลือสัญญาณที่ B

$$58.4\,dB\mu V - 10\,dB = 48.4\,dB\mu V$$ — ⓑ

Loss ที่เครื่อง C

$$\frac{20\,dB}{100} \times 40\,m = 8\,dB$$

เหลือสัญญาณที่ C $= 58.4\,dB\mu V - 8\,dB$

$= 50.4\,dB\mu V$

Loss ที่จุด D $\quad \frac{20\,dB}{100} \times 70\,m = 14\,dB$

เหลือสัญญาณที่จุด D $= 58.4\,dB\mu V - 14\,dB$

$= 44.4\,dB\mu V$

∴ เหลือสัญญาณที่จุด A $= 46.4\,dB\mu V$

B $= 48.4\,dB\mu V$

C $= 50.4\,dB\mu V$

D $= 44.4\,dB\mu V$

จะเห็นว่า จุด D ต่ำสุด $44.4\,dB\mu V$

ต้องการให้ จุด D มีค่าอยู่ในช่วง $65-80\,dB\mu V$ → ∴ ต้องขยายเพิ่ม

η ΠΔ [illegible] = 65 − 44.4 = 20.6 dBμV

∴ [illegible] D = 65 dBμV ——— [illegible]

για A [illegible] = 46.4 + 20.6 = 67 dBμV ——— [illegible]

για B [illegible] = 48.4 + 20.6 = 69 dBμV ——— [illegible]

για C [illegible] = 50.4 + 20.6 = 71 dBμV ——— [illegible]
