

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

แสงและการแพร่กระจายคลื่น

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1. ทฤษฎีแสงเบื้องต้น
2. กฎของสเนลล์
3. ท่อนำคลื่นทรงกระบอก

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายทฤษฎีแสงเบื้องต้นได้
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายกฎของสเนลล์ได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถอธิบายคุณลักษณะและโครงสร้างของท่อนำคลื่นแสงทรงกระบอกได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. วิธีสอน

- 1.1 วิธีสอนแบบบรรยาย
- 1.2 วิธีสอนแบบอภิปราย
- 1.3 วิธีสอนแบบค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเอง

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

- 2.1 ผู้สอนบรรยายเนื้อหาเกี่ยวกับ ทฤษฎีแสงเบื้องต้น เงื่อนไขการเดินทางของแสง ผ่านตัวกลางไดอิเล็กทริกทรงกระบอก ยานความยาวคลื่นแสงที่ใช้งาน สมการคลื่นและพารามิเตอร์ที่สำคัญของคลื่นแสง องค์ประกอบเบื้องต้นระบบสื่อสารทางแสง
- 2.2 ผู้สอนมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน
- 2.3 มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนทำการบ้าน
- 2.4 มีการมอบหมายหัวข้อให้ผู้เรียนได้ไปอ่านล่วงหน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนรายวิชา การสื่อสารทางแสง
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
4. เครื่องคำนวณ

การวัดผลและการประเมินผล

1. การเข้าชั้นเรียน ความตรงต่อเวลา และความตั้งใจในระหว่างเรียน
2. การส่งแบบฝึกหัด การบ้านและการนำเสนอรายงาน
3. การสอบกลางภาค
4. การสอบปลายภาค
5. การค้นคว้าเพิ่มเติมตามหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย

บทที่ 1

แสงและการแพร่กระจายคลื่น

ระบบการสื่อสารคือการส่งข้อมูลข่าวสารจากจุดหนึ่งไปยังจุดอื่น ๆ โดยมีช่องสัญญาณเป็นสื่อกลางในการส่งผ่านข้อมูล ระบบการสื่อสารแบ่งออกเป็นสองแบบใหญ่ ๆ แบบแรกคือช่องสื่อสารแบบใช้สาย (wired communication) การส่งข้อมูลจะใช้สายส่งสัญญาณที่เป็นตัวนำ เช่น ทองแดง เงิน อะลูมิเนียม หรือโลหะผสม และสายส่งสัญญาณประเภทเส้นใยนำแสง และแบบที่สองคือการสื่อสารแบบไร้สาย (wireless communication) ช่องสัญญาณจะเป็นอากาศ (air) บรรยากาศ (free space) หรือน้ำ (under water) สำหรับเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ จะเน้นเฉพาะการสื่อสารแบบมีสายที่ใช้สายส่งสัญญาณประเภทเส้นใยนำแสง (optical fiber) การใช้คลื่นแสงย่านที่ตามองเห็นได้เพื่อส่งข้อมูลข่าวสารมีมาตั้งแต่อดีตเช่น การใช้แสงจากกองไฟ แสงสะท้อนจากกระจกเงา หรือแสงจากหลอดไฟบนอาคาร เพื่อส่งข่าวสารในกองทัพและแจ้งเตือนภัยแนวหินโสโครกให้กับเรือในทะเล เป็นต้น

จากอดีตจนถึงปัจจุบันวิวัฒนาการ การสื่อสารโดยใช้แสงก็มีมาอย่างต่อเนื่อง จนถึงปี ค.ศ. 1880 อเล็กซานเดอร์ เกรแฮมเบล (Alexander Graham Bell) ทำการทดลองใช้แสงส่งข้อมูลประเภทเสียงได้สำเร็จที่ระยะทาง 200 เมตร แต่ถึงอย่างไรก็ตามการส่งข้อมูลได้ในระยะทางจำกัด เพราะมีการลดทอนกำลังงานคลื่นแสงในช่องสัญญาณสูง รูปแบบการสื่อสารต้องเป็นแบบระดับแนวเส้นตรง (line of sight) เท่านั้น และไม่สามารถใช้ได้กับระบบสื่อสารแบบเคลื่อนที่ (mobile communication) และเทคโนโลยีอุปกรณ์ออปโตอิเล็กทรอนิกส์ที่ใช้ในภาคส่งและภาครับยังไม่สามารถทำงานได้ที่ความถี่ย่านแสงระดับ 10^{12} ถึง 10^{14} Hz ฉะนั้นการเลือกใช้คลื่นพหุย่านคลื่นวิทยุ คลื่นไมโครเวฟ หรือคลื่นมิลลิเมตรเวฟดูจะเหมาะสมกว่า

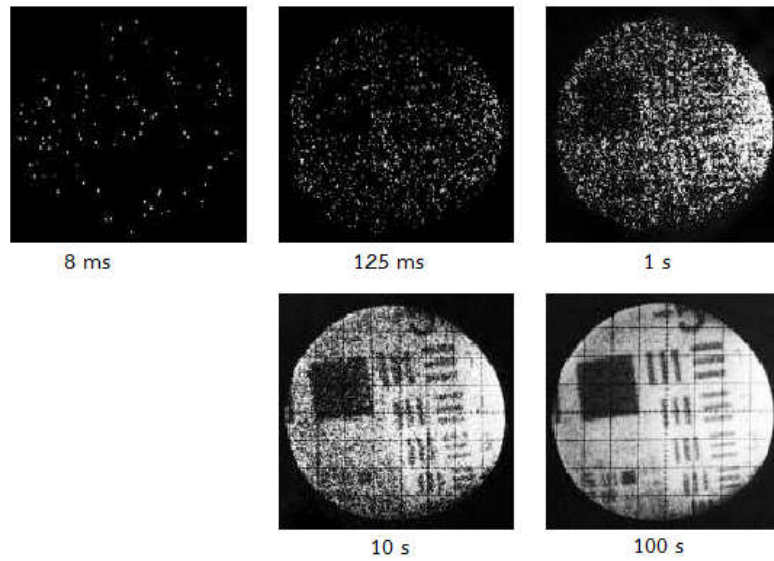
จนถึงประมาณปี ค.ศ.1960 แนวความคิดที่จะใช้คลื่นพหุย่านแสงเพื่อใช้ส่งสัญญาณข้อมูลกลับมาได้รับความสนใจอีกครั้งหนึ่ง ข้อดีของระบบสื่อสารทางแสงที่ใช้เส้นใยนำแสงเป็นช่องสัญญาณในการส่งผ่านข้อมูลคือ เส้นใยนำแสงมีผลคูณค่าความกว้างแถบความถี่กับระยะทาง (bandwidth-length product) ที่สูงเมื่อเทียบกับสายส่งสัญญาณประเภทอื่น ๆ เนื่องจากความถี่คลื่นพหุย่านแสงมีความถี่ที่สูงมาก 10^{13} ถึง 10^{16} Hz เส้นใยนำแสงจะมีผลคูณค่าความกว้างแถบความถี่กับระยะทางอยู่ที่ประมาณ 5,000 GHz.km ส่วนสายโคแอกเซียลจะอยู่ที่ประมาณ 100 MHz.km เส้นใยนำแสงมีขนาดเล็กและน้ำหนักเบา เมื่อเทียบกับสายตัวนำประเภททองแดง จึงทำให้สามารถติดตั้งได้ง่าย และใช้พื้นที่ในการติดตั้งน้อย เนื่องจากขนาดเส้นใยนำแสงหนึ่งเส้นจะมีขนาดประมาณเท่ากับเส้นผมของมนุษย์ เส้นใยนำแสงไม่มีปัญหาเรื่องการแทรกสอดสัญญาณจากภายนอก เนื่องจากเส้นใยนำแสงทำมาจากวัสดุที่เป็นแก้วหรือพลาสติกที่ไม่เป็นตัวนำไฟฟ้า จึงส่งผลให้สนามไฟฟ้าจากภายนอกไม่สามารถแทรกสอด

เข้ามาได้ สามารถลดปัญหาการแทรกสอดและการไขว้ข้ามสัญญาณระหว่างสาย ที่อยู่ใกล้กัน (immunity to Interference and crosstalk) และการลัดวงจรลงกราวด์ และข้อดีของเส้นใยนำแสงที่ทำมาจากวัสดุแก้วหรือพลาสติก ที่ไม่เป็นตัวนำไฟฟ้าและหุ้มด้วยฉนวน ทึบแสง จึงไม่สามารถดักฟังด้วยวิธีการเหนี่ยวนำทางไฟฟ้าได้ จึงมีความปลอดภัยของสัญญาณข้อมูลสูง เมื่อพัลส์แสงเดินทางผ่านเส้นใยนำแสงจะไม่สร้างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้นโดยรอบสายส่งสัญญาณ ซึ่งจะไม่เหมือนกับสายประเภทตัวนำที่ทำจากทองแดงหรือโลหะอื่น ๆ ถ้ามีผู้ต้องการดักจับสัญญาณข้อมูลจะต้องใช้วิธีตัดและเชื่อมต่อเพื่อแยกสัญญาณแสงออกมาเท่านั้น ซึ่งในทางปฏิบัติจะทำได้ยาก เพราะระบบจะตรวจจับได้ทันทีที่มีการดักจับสัญญาณ ฉะนั้นการสื่อสารผ่านเส้นใยนำแสงจึงเหมาะสำหรับส่งสัญญาณข้อมูลที่ต้องการความปลอดภัยสูง เช่น สัญญาณข้อมูลของระบบธนาคาร

ค่าการสูญเสียและอัตราการลดทอนกำลังงานต่อระยะทางของเส้นใยนำแสงจะต่ำมากเมื่อเทียบกับสายตัวนำอื่น ๆ โดยทั่วไปจะต่ำกว่า 10 dB/km เส้นใยนำแสงจึงเหมาะที่จะนำมาใช้ในการส่งสัญญาณที่ระยะทางไกล ระดับจังหวัด ประเทศหรือทวีป มีความน่าเชื่อถือของระบบและง่ายต่อการบำรุงรักษา เนื่องจากในปัจจุบันสามารถผลิตเส้นใยนำแสงที่หุ้มด้วยฉนวนที่ทนต่อการกัดกร่อน ทนแรงกดทับและแรงดึงได้สูง ด้วยคุณสมบัติที่มีอัตราการลดทอนกำลังงานต่อระยะทางที่ต่ำมาก จึงสามารถลดค่าใช้จ่ายอุปกรณ์ทวนสัญญาณในระบบ ในกรณีที่ติดตั้งเส้นใยนำแสงผ่านทะเลหรือมหาสมุทร การติดตั้งอุปกรณ์ทวนสัญญาณในระบบจะมีค่าใช้จ่ายสูงและมีความยุ่งยาก อายุการใช้งานของอุปกรณ์ในระบบสื่อสารผ่านเส้นใยนำแสงจะอยู่ที่ประมาณ 20-30 ปี ถ้ามีการบำรุงรักษาระบบสม่ำเสมอ ในทางตรงกันข้าม ถ้านำเส้นใยนำแสงมาใช้ในการส่งข้อมูลที่มีความเร็วต่ำและมีระยะทางที่สั้น จะยังไม่คุ้มค่ากับการลงทุนเท่าใดนัก

1.1 ทฤษฎีแสงเบื้องต้น

แสงจะมีคุณสมบัติเป็นได้ทั้งคลื่น (wave) และอนุภาค (particle) ปรัชญาการณของแสงในส่วนที่เป็นคลื่นจะใช้ทฤษฎีคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอธิบาย (electromagnetic wave theory) ส่วนปรัชญาการณของแสงในส่วนที่เป็นอนุภาคจะใช้ทฤษฎีควอนตัมอธิบาย (Hecht, 2017, pp. 8-9) ทฤษฎีควอนตัมจะกำหนดให้แสงเป็นกรอบอนุภาคพลังงานแบบเม็ดเล็ก ๆ กลุ่มอนุภาคของแสงคือกลุ่มโฟตอน (photons) ถ้าคลื่นแสงก็คืออัตราการเคลื่อนที่ของกลุ่มโฟตอนต่อเวลา หนึ่งโฟตอนจะมีเพียงพลังงานแต่ไม่มีมวล (only energy and no mass) ค่าพลังงานกลุ่มโฟตอนของแสงจะขึ้นอยู่กับความถี่แสงกับค่าคงที่ของพลังค์ ระดับพลังงานกลุ่มโฟตอนของแสงจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete values of energy) ดังสมการ



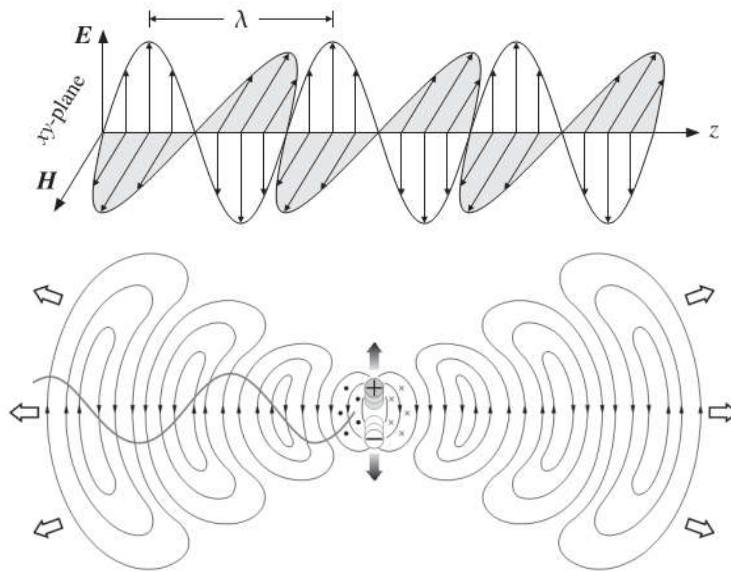
ภาพที่ 1.1 ภาพรหัสแถบที่ใช้เวลาเปิดหน้าชัดเตอร์ 8 ms, 125 ms, 1 s, 10 s และ 100 s ที่มา (Hecht, 2017, p. 32)

$$E = \hbar f \quad (1.1)$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (1.2)$$

$$r = \frac{p}{E} = \frac{p}{\hbar f} \quad (1.3)$$

- โดยที่ E คือค่าพลังงานกลุ่มโฟตอนของคลื่นแสงแบบไม่ต่อเนื่อง (Joules)
 \hbar คือค่าคงที่ของพลังค์ (Planck's constant) (6.626×10^{-34} J.s)
 λ คือความยาวคลื่นแสง (m)
 c คือความเร็วคลื่นแสงในสุญญากาศ (3×10^8 m/s)
 f คือความถี่คลื่นแสง (Hz)
 r คืออัตราการมาถึงของกลุ่มโฟตอน (photons/second)
 p คือค่าเฉลี่ยกำลังงานแสง (W)



ภาพที่ 1.2 คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเคลื่อนที่ตามแนวแกน z ผ่านอากาศ
ที่มา (Hecht, 2017, p. 73)

ผลการทดลองที่แสดงว่าแสงคือกลุ่มพลังงานโฟตอน คือการแสดงผลสเปกตรัมในห้องปฏิบัติการที่ใช้เวลาเปิดหน้าชดเตอร์ 8 ms, 125 ms, 1 s, 10 s และ 100 s ตามลำดับ ดังแสดงในภาพที่ 1.1 สำหรับการอธิบายแสงแบบคลื่นจะใช้ทฤษฎีคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ และการทดลองของเฮิร์ตซ์ (Hayt, et al., 2001, pp. 348-381) สมการของแมกซ์เวลล์ได้นิยามว่า สนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลาจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลา และในขณะเดียวกันสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาก็จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลาด้วยเช่นกัน สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจะมีทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน และตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ คลื่นที่มีองค์ประกอบทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเรียกว่า คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic wave) ถ้าการเหนี่ยวนำระหว่างสนามแม่เหล็กกับสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่องที่สายอากาศ (antenna) จะทำให้คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถเคลื่อนที่ออกจากสายอากาศแพร่กระจายผ่านอากาศหรืออวกาศด้วยอัตราเร็วโดยประมาณ 3×10^8 m/s

การพิจารณาคลื่นแสงเป็นคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความถี่ช่วงหนึ่ง และเกิดขึ้นแบบรายคาบซ้ำ ๆ กัน ในหนึ่งช่วงเวลา ตามแหล่งกำเนิดสัญญาณรูปไซน์หรือโคไซน์ ขนาดและทิศทางสนามไฟฟ้า (\vec{E}) และสนามแม่เหล็ก (\vec{H}) เคลื่อนที่ตามแนวแกน z ผ่านอากาศที่มีค่าดรชนีการหักเหเท่ากับหนึ่ง ดังแสดงในภาพที่ 1.2 จากภาพเป็นคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าแบบตามขวาง (plan transverse electromagnetic) สนามไฟฟ้าอยู่ในระนาบ xz และสนามแม่เหล็กอยู่ในระนาบ yz เคลื่อนที่ไปตามแกน z ผ่านอากาศ ถ้าคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นแบบเอกรงค์ (Monochromatic)

จะมีค่ากำลังงาน ความถี่ และเฟสคงที่ องค์ประกอบคลื่นและทิศทางการเคลื่อนที่ตามแนวแกน z ผ่านอากาศ โดยค่าแอมพลิจูด (amplitude) และเฟส (phase) ของคลื่นจะแปรเปลี่ยนตามเวลา t คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลาและเคลื่อนที่ตามแนวแกน z สามารถอธิบายดังสมการ

$$\bar{E} = \bar{e}_x E_x(t, z) \quad (1.4)$$

$$\bar{H} = \bar{e}_y H_y(t, z) \quad (1.5)$$

$$E_x = E_0 \cos k(vt, z) \quad (1.6)$$

$$H_y = H_0 \cos k(vt, z) \quad (1.7)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.8)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} \quad (1.9)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\lambda} \quad (1.10)$$

$$\lambda(m) = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f(\text{Hz})} = \frac{3 \times 10^5}{f(\text{KHz})} = \frac{300}{f(\text{MHz})} = \frac{0.3}{f(\text{GHz})} = \frac{0.0003}{f(\text{THz})} \quad (1.11)$$

- โดยที่ \bar{E} คือค่าเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่มีหัวในระนาบ xz (V/m)
 \bar{H} คือค่าเวกเตอร์สนามแม่เหล็กที่มีหัวในระนาบ yz (V/m)
 E_x คือค่าแอมพลิจูดสนามไฟฟ้า (V/m)
 E_0 คือค่าแอมพลิจูดสูงสุดสนามไฟฟ้า (V/m)
 H_y คือค่าแอมพลิจูดสนามแม่เหล็ก (A/m)
 H_0 คือค่าแอมพลิจูดสูงสุดสนามแม่เหล็ก (A/m)
 k คือค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่นเชิงเฟสในสุญญากาศ
 β คือค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่นเชิงระยะทางในตัวกลาง
 v คือค่าความเร็วเฟสของคลื่น (m/s)

- ω คือค่าความเร็วเชิงมุม (rad/s)
 t คือค่าเวลา (s)
 z คือทิศทางการเคลื่อนที่ในที่นี่คือตามแนวแกน z (m)
 λ คือค่าความยาวคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (m)
 c คือค่าความเร็วคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ (3×10^8 m/s)
 f คือค่าความถี่คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Hz)
 T คือค่าคาบเวลาหนึ่งไซเคิล (s)

ตารางที่ 1.1 ความเร็วคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่แบ่งตามลักษณะการใช้งาน

ความเร็วคลื่น (λf)	ลักษณะการใช้งาน
5000 km \times 60 Hz	power systems
300 m \times 1 MHz	AM radio
40 m \times 7.5 MHz	amateur radio
3 m \times 100 MHz	FM radio, TV
30 cm \times 1 GHz	cell phones
10 cm \times 3 GHz	waveguides, radar
3 cm \times 10 GHz	radar, satellites
1.5 μ m \times 200 THz	optical fibers
500 nm \times 600 THz	visible spectrum
100 nm \times 3000 THz	UV

ที่มา (Orfanidi, 2004, p. 33)

สมการ (1.4) ถึง (1.7) แสดงการเคลื่อนที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าผ่านอากาศ (free space) จะเห็นว่าช่วงความถี่ต่ำย่าน power line, radio, radar, microwave นิยมใช้ทฤษฎีของแมกซ์เวลล์ อธิบาย ส่วนช่วงความถี่สูงย่าน infrared, light, ultraviolet, X-rays, gamma ray นิยมใช้ทฤษฎีควอนตัม (quantum theory) อธิบายปรากฏการณ์ของคลื่นเนื่องจากทฤษฎีของแมกซ์เวลล์ไม่สามารถ อธิบายปรากฏการณ์ดูดกลืนและการปลดปล่อยพลังงานของคลื่นแสงได้ การนำคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไปใช้งานด้านต่าง ๆ แสดงในตารางที่ 1.1 และความสัมพันธ์ระหว่างความยาว คลื่นสี่ และความถี่แสดงในตารางที่ 1.2

ตารางที่ 1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่น สี และความถี่

ความยาวคลื่น (λ)	สี	ความถี่
780-662 nm	แดง	384-482 THz
662-597 nm	ส้ม	482-503 THz
597-577 nm	เหลือง	503-520 THz
577-492 nm	เขียว	520-610 THz
492-455 nm	น้ำเงิน	610-659 THz
455-390 nm	ม่วง	659-769 THz
100-1 μm	อินฟราเรด	3-300 THz
400-10 nm	อัลตราไวโอเล็ต	750 THz-30 PHz
10 nm-100 pm	เอ็กซ์เรย์	30 PHz-3 EHz
< 10 nm	แกมมาเรย์	> 3 EHz

ที่มา (Hecht, 2017, p. 87)

ช่วงความยาวคลื่นแสงที่ใช้ในระบบสื่อสารผ่านเส้นใยนำแสงแบ่งออกเป็น 3 ช่วงใหญ่ ๆ (windows) คือช่วงความยาวคลื่นที่ 1 (first window) ค่าความยาวคลื่นอยู่ระหว่าง 800-900 nm ช่วงความยาวคลื่นที่ 2 (second window) มีค่าความยาวคลื่นอยู่ระหว่าง 1,200-1,300 nm และช่วงความยาวคลื่นที่ 3 (third window) ค่าความยาวคลื่นอยู่ระหว่าง 1,500-1,600 nm จากตารางที่ 1.2 แสดงให้เห็นว่าถ้าความถี่คลื่นแสงสูงขึ้นจะมีค่าความยาวคลื่นแสงจะลดลง

ตัวอย่างที่ 1.1 แสงสีแดงที่มีความยาวคลื่นแสง 632 nm จะมีค่าความถี่เท่ากับเท่าใด

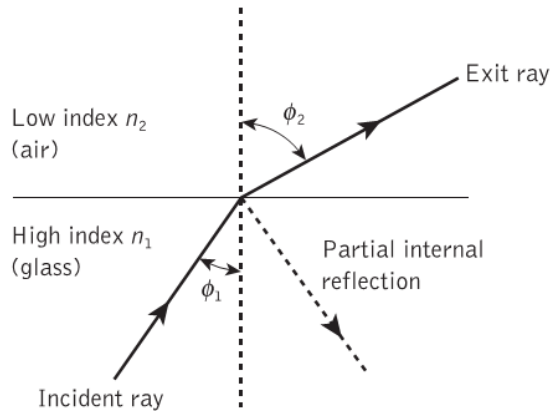
วิธีคำนวณ จากค่าความยาวคลื่นสีแดง $\lambda = 632 \text{ nm}$

$$\text{จากสมการ } \lambda = \frac{c}{f}$$

$$\text{แทนค่า } f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{632 \times 10^{-9}}$$

$$f = 474.6835 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

$$f = 474.68 \text{ THz}$$



ภาพที่ 1.3 การหักเหของแสงระหว่างตัวกลาง
ที่หนา (Senior & Jamro, 2009, p. 15)

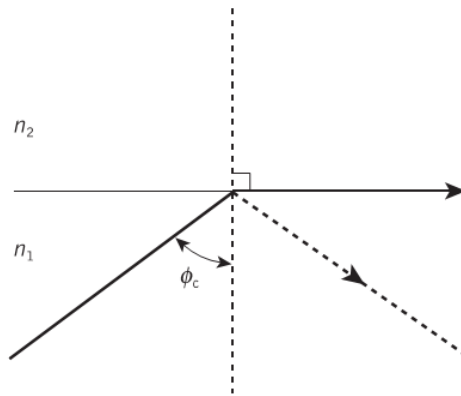
1.2 กฎของสเนลล์

การเดินทางของคลื่นแสงผ่านตัวกลางใด ๆ จะถูกกำหนดโดยค่าดัชนีการหักเหคลื่นในตัวกลาง ซึ่งค่าดัชนีการหักเหจะเท่ากับอัตราส่วนระหว่างความเร็วแสงที่เดินทางผ่านสุญญากาศต่อความเร็วแสงที่เดินทางผ่านตัวกลางใด ๆ ในตัวกลางที่มีความหนาแน่นสูงแสงจะเดินทางได้ช้ากว่าตัวกลางที่มีความหนาแน่นต่ำ คลื่นตกกระทบ คลื่นสะท้อน และคลื่นแสงที่เดินทางผ่านตัวกลางที่มีค่าดัชนีการหักเหไม่เท่ากัน สามารถใช้กฎการหักเหของสเนลล์ (snell's law) อธิบายดังแสดงในภาพที่ 1.3 กฎการหักเหของสเนลล์ได้อธิบายถึง การเดินทางของแสงจากตัวกลางที่มีค่าดัชนีการหักเห n_1 และมีมุมตกกระทบ ϕ_1 เทียบกับเส้นระนาบที่ตั้งฉากกับรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสอง ไปยังตัวกลางที่มีค่าดัชนีการหักเห n_2 และมีมุมสะท้อน ϕ_2 โดยอาศัยนิยามมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อนดังสมการ

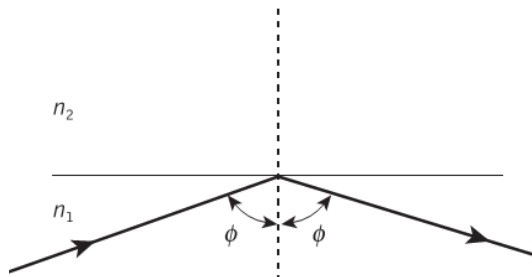
$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad (1.12)$$

ในกรณีที่มุมตกกระทบ ϕ_1 มีค่ามากขึ้นจนทำให้คลื่นสะท้อนเดินทางตามแนวรอยต่อระหว่างตัวกลางทั้งสอง เรียกว่ามุมวิกฤติ ϕ_c (critical angle) ดังแสดงในภาพ 1.4 จากสมการ (1.12) จัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.13)$$



ภาพที่ 1.4 การหักเหของแสงในตัวกลาง ณ จุดมุมวิกฤติ
ที่มา (Senior & Jamro, 2009, p. 15)

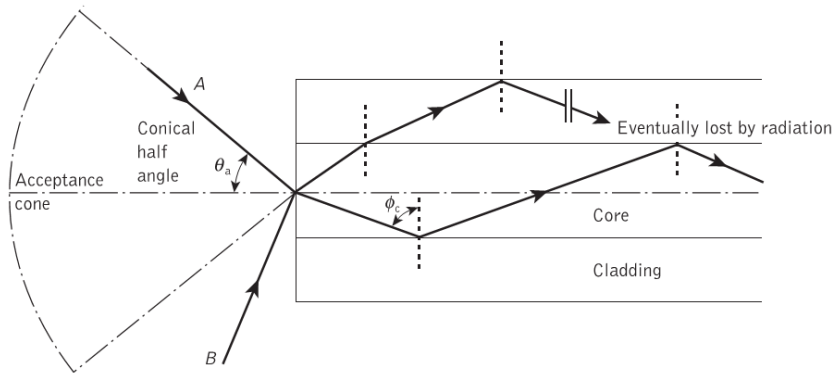


ภาพที่ 1.5 การสะท้อนกลับหมดของคลื่นแสง
ที่มา (Senior & Jamro, 2009, p. 15)

จากภาพที่ 1.4 ขณะที่เกิดมุมวิกฤติค่าของมุมสะท้อน ϕ_2 จะเท่ากับ 90° องศา ($\sin 90^\circ = 1$) ฉะนั้นจะได้มุมวิกฤติ $\phi_1 = \phi_c$ ดังสมการ

$$\sin \phi_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.14)$$

ในกรณีที่มุมตกกระทบ ϕ_1 มีค่ามากกว่ามุมวิกฤติจะทำให้เกิดการสะท้อนกลับหมด ดังแสดงในภาพ 1.5 จากปรากฏการณ์สะท้อนกลับหมดของคลื่นแสงที่อยู่ภายในตัวกลาง n_1 เป็นหลักการพื้นฐานสำคัญ ที่นำไปสร้างเส้นใยนำแสง เป็นเทคนิคการกักเก็บกำลังงานแสงให้อยู่ในตัวกลางแบบไดอิเล็กทริกสองชั้นทรงกระบอก เพื่อทำหน้าที่ส่งพัลส์กำลังงานแสงจากต้นทางไปสู่ปลายทางที่ระยะทางไกล ๆ ได้

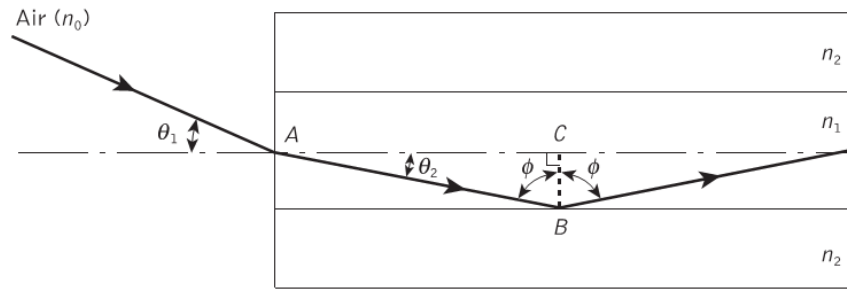


ภาพที่ 1.6 มุมรับแสง (acceptance angle)

ที่มา (Senior & Jamro, 2009, p. 17)

เส้นใยนำแสงประกอบด้วยชั้นแก้วสองชั้น ชั้นในสุดเรียกว่าคอร์ (core) ส่วนแก้วชั้นนอกเรียกว่าแคลดดิ้ง (cladding) ดังแสดงในภาพที่ 1.6 กำหนดให้ค่าดัชนีการหักเหของตัวกลางชั้นใน (n_1) มีค่ามากกว่าค่าดัชนีการหักเหของตัวกลางชั้นนอก (n_2) หรือ $n_1 > n_2$ ส่งผลให้คลื่นแสงเกิดการสะท้อนกลับหมด (total internal reflection) ภายในแก้วชั้นใน และมุมของลำคลื่นแสงที่จะส่งเข้าสู่ชั้นคอร์ จะต้องน้อยกว่ามุมวิกฤติ จึงจะทำให้ลำคลื่นแสงสามารถเดินทางอยู่ภายในคอร์ ไม่ทะลุออกไปสู่ชั้นแคลดดิ้งได้ ซึ่งเป็นเงื่อนไขสำคัญที่ทำให้คลื่นแสงสามารถเดินทางจากภาคส่งถึงภาครับได้ ความสามารถรับคลื่นแสงของคอร์จะเป็นพื้นที่หน้าตัดรูปกรวย เพื่อรองรับการส่งลำคลื่นแสงเข้าสู่เส้นใยนำแสง ค่ามุมรูปกรวยสูงสุดที่สามารถส่งลำคลื่นแสงเข้าไปภายในคอร์แสดงในภาพที่ 1.6 จากภาพกำหนดให้มุมสูงสุดที่สามารถรับลำคลื่นแสงได้เป็น θ_a เพื่อให้ลำคลื่นแสงที่ส่งเข้าไปสู่ภายในคอร์ ค่าของ θ_a จะต้องน้อยกว่ามุมวิกฤติ ($\theta_a < \phi_c$) ทางตรงกันข้ามถ้ามุมคลื่นแสงที่ส่งเข้าไปสู่ภายในคอร์มากกว่ามุมวิกฤติ จะทำให้กำลังงานแสงบางส่วนสูญเสียไปเนื่องจากคลื่นแสงบางส่วนสามารถทะลุออกจากคอร์ไปสู่แคลดดิ้งได้ดังแสดงในภาพที่ 1.6

ในกรณีที่ n_1 เป็นอากาศ ค่าความสามารถของคลื่นแสงเดินทางผ่านอากาศเข้าสู่คอร์ของเส้นใยนำแสงเรียกว่าช่องรับคลื่นแสงเชิงตัวเลข NA (numerical aperture) จากภาพที่ 1.7 กำหนดให้ n_0 คือค่าดัชนีการหักเหของอากาศ, n_1 คือค่าดัชนีการหักเหของคอร์ และ n_2 คือค่าดัชนีการหักเหของแคลดดิ้งตามลำดับ คลื่นแสงจากภายนอกเข้าสู่คอร์ทำมุม θ_1 กับเส้นผ่านศูนย์กลางของคอร์ เพื่อให้คลื่นแสงเกิดการสะท้อนกลับหมดภายในคอร์ ค่ามุม θ_1 จะต้องน้อยกว่ามุมรับแสง θ_a (acceptance angle) ตรงจุดรอยต่อระหว่างอากาศกับพื้นที่หน้าตัดของคอร์ที่มีค่าดัชนีการหักเหไม่เท่ากัน ส่งผลให้ลำคลื่นแสงเข้าสู่ภายในคอร์เกิดการหักเหเป็นมุม θ_2 คลื่นแสงตกกระทบและสะท้อนกับรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งเป็นมุม ϕ เมื่อเทียบกับเส้นปกติที่ตั้งฉากกับแกนกลางของคอร์



ภาพที่ 1.7 ช่องรับคลื่นแสงเชิงตัวเลข (numerical aperture)

ทีมา (Senior & Jamro, 2009, p. 17)

การคำนวณหาค่าช่องรับแสงเชิงตัวเลข ที่รอยต่อระหว่างอากาศกับคอร์ เมื่อใช้กฎของสเนลล์ จะได้สมการ

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2 \quad (1.15)$$

จากภาพที่ 1.7 พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติค่ามุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้มุม ϕ ดังสมการ

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta_2 \quad (1.16)$$

หรือ $\theta_2 = (\pi/2) - \phi$ แทนค่าสมการ (1.16) ลงในสมการ (1.15) และใช้คุณสมบัติตรีโกณมิติจะได้

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \cos \phi \quad (1.17)$$

จากคุณสมบัติตรีโกณมิติ $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ หรือ $\cos \phi = (1 - \sin^2 \phi)^{1/2}$ จากสมการ (1.17) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 (1 - \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (1.18)$$

เพื่อให้เกิดการสะท้อนกลับหมดภายในคอร์ มุม ϕ จะต้องมากกว่ามุมวิกฤติ ϕ_c ระหว่างรอยต่อคอร์กับแคลดดิงซึ่งเป็นแก้วชั้นนอกที่ห่อหุ้มแก้วชั้นคอร์แต่มีค่าดัชนีการหักเหแสงน้อยกว่าคอร์ จากสมการ $\sin \phi = (n_2 / n_1)$ แทนค่าลงในสมการ (1.18) จะได้

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \left(1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$n_0 \sin \theta_1 = n_1 \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$n_0 \sin \theta_1 = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.19)$$

ค่าของมุม θ_1 จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับมุม θ_a ถ้าคลื่นแสงถึงจะสามารถเดินทางจากอากาศเข้าสู่ภายในคอร์ได้ จากสมการ (1.19) จะได้

$$n_0 \sin \theta_a = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.20)$$

สุดท้ายจะได้สมการค่าช่องรับแสงเชิงตัวเลข (NA) ดังสมการ

$$NA = n_0 \sin \theta_a = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.21)$$

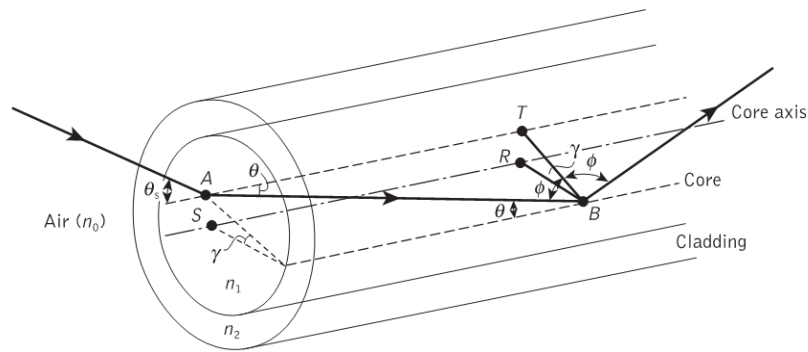
ค่าช่องรับแสงเชิงตัวเลข (NA) จะบอกถึงความสามารถในการส่งคลื่นแสงเข้าสู่เส้นใยนำแสงแต่ละแบบ ถ้ากำหนดให้ความแตกต่างของค่าดัชนีการหักเหแสงระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งเป็นดังสมการ (1.22)

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (1.22)$$

$$\Delta \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad \text{สำหรับ} \quad \Delta \ll 1 \quad (1.23)$$

ค่าของ NA สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$NA = n_1 (2\Delta)^{\frac{1}{2}} \quad (1.24)$$



ภาพที่ 1.8 ลำคลื่นแสงจากภายนอกเข้าสู่คอร์
ที่มา (Senior & Jamro, 2009, p. 22)

ในกรณีที่คลื่นแสงเดินทางภายในคอร์มีการเคลื่อนที่แบบหมุนเกลียว ซึ่งเกี่ยวการหมุนจะเป็นแบบตามเข็มนาฬิกาและทวนเข็มนาฬิกา ขึ้นอยู่กับมุมลำแสงที่เข้าสู่คอร์ และความแตกต่างค่าดัชนีการหักเหแสงระหว่างอากาศกับคอร์ จากภาพที่ 1.8 ลำคลื่นแสงจากภายนอกเข้าสู่คอร์ที่จุด A มีมุมตกกระทบ θ_s และมุมสะท้อน θ เมื่อเทียบกับเส้นรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิ้ง ลำคลื่นแสงเดินทางเข้าสู่คอร์และเกิดการเลี้ยวเบน มาตกกระทบที่จุด B มีมุมตกกระทบ θ และมุมสะท้อน ϕ สังเกตจากสามเหลี่ยม ABR กับ ABT จะเห็นว่าคลื่นแสงบิดเกลียวไปเป็นมุม γ ใช้คุณสมบัติทางตรีโกณมิติ หาความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุด B ได้สมการ

$$\cos \gamma \sin \theta = \cos \phi \quad (1.25)$$

ใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ หรือ $\cos \phi = [1 - \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}}$ สมการ (1.25) จัดรูปแบบใหม่ได้เป็น

$$\cos \gamma \sin \theta = \cos \phi = (1 - \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

ที่จุด B จากข้อกำหนดการสะท้อนกลับหมดภายในคอร์ มุมตกกระทบ ϕ จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับมุมวิกฤติ ϕ_c ซึ่งก็คือมุม $\phi \leq \phi_c$ และจากสมการ $\sin \phi = n_2 / n_1$ สมการ (1.26) จัดรูปแบบใหม่ได้เป็น

$$\cos \gamma \sin \theta \leq \cos \phi_c = \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

จากภาพที่ 1.8 ที่จุด A คลื่นตกกระทบและคลื่นสะท้อนระหว่างตัวกลางอากาศ n_0 กับคอร์ n_1 ใช้กฎของสเนลล์จะได้

$$\begin{aligned}n_0 \sin \theta_a &= n_1 \sin \theta \\n_0 \sin \theta_{as} &= n_1 \sin \theta \\ \sin \theta_{as} &= (n_1 / n_0) \sin \theta\end{aligned}\quad (1.28)$$

มุมตกกระทบ θ_a คือค่ามุมรับคลื่นสูงสุด ($\theta_a \simeq \theta_{as}$) และมุมสะท้อนภายในคอร์ θ เมื่อเทียบกับแกนสมมาตรรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิ้ง แทนสมการ (1.28) ลงในสมการ (1.27) และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\sin \theta_{as} = \frac{n_1 \cos \phi_c}{n_0 \cos \gamma} = \frac{n_1}{n_0 \cos \gamma} \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.29)$$

มุม θ_{as} คือค่ามุมรับคลื่นแสงสูงสุดสำหรับคลื่นแสงแบบบิตเกลียว จากสมการ (1.29) จัดสมการใหม่เพื่อให้ง่ายขึ้นจะได้

$$n_0 \sin \theta_{as} \cos \gamma = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} = NA \quad (1.30)$$

สมการ (1.30) คือค่ารับแสงหรือช่องรับแสงสูงสุด (NA) สำหรับคลื่นแสงแบบบิตเกลียว ในกรณีแสงเดินทางจากอากาศ ($n_0 = 1$) เข้าสู่คอร์ของเส้นใยนำแสงดังสมการ

$$\sin \theta_{as} \cos \gamma = NA = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.31)$$

สำหรับคลื่นแสงแบบบิตเกลียว ค่าค่ารับแสงสูงสุด นอกจากจะขึ้นอยู่กับค่าดัชนีการหักเหของคอร์ n_1 , ดรรชนีการหักเหของแคลดดิ้ง n_2 และค่ามุมรับแสงสูงสุด θ_{as} แล้ว ยังจะขึ้นอยู่กับมุมบิตเกลียว γ ด้วย ในทางปฏิบัติการคำนวณหาค่าช่องรับแสงสูงสุด (NA) ใช้สมการ (1.21) หรือ (1.24) ก็เพียงพอ

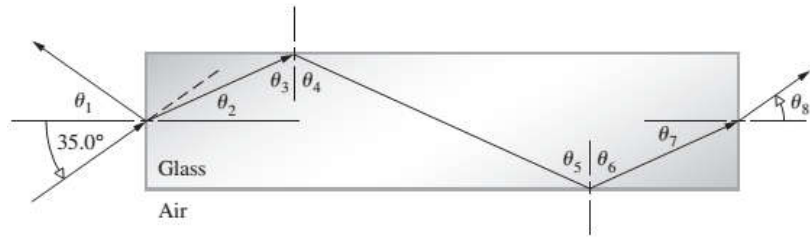
ตัวอย่างที่ 1.2 จากรูปด้านล่างค่าดัชนีการหักเหของอากาศเท่ากับ 1 และค่าดัชนีการหักเหของแก้วเท่ากับ 1.55 จงคำนวณหาค่า $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$ และ θ_8

วิธีคำนวณ จากกฎของสเนลล์ มุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน และเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติจะได้ $\theta_1 = 35^\circ$ ถ้าคลื่นแสงเคลื่อนที่จากอากาศเข้าสู่แท่งแก้ว

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

แทนค่า

$$1 \sin 35^\circ = 1.55 \sin \theta_2$$



$$\theta_2 = \sin^{-1}(\sin 35^\circ / 1.55) = 21.719^\circ$$

$$\theta_2 + \theta_3 = 90^\circ$$

$$\theta_3 = 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 21.719^\circ = 68.281^\circ$$

$$\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 68.281^\circ$$

$$\theta_6 + \theta_7 = 90^\circ$$

$$\theta_7 = 90^\circ - \theta_6 = 90^\circ - 68.281^\circ = 21.7^\circ$$

จากกฎของสเนลล์ คลื่นแสงเดินทางจากแท่งแก้วออกสู่อากาศ

$$n_2 \sin \theta_7 = n_1 \sin \theta_8$$

แทนค่า

$$1.55 \sin 21.719^\circ = 1.00 \sin \theta_8$$

$$0.5736 = \sin \theta_8$$

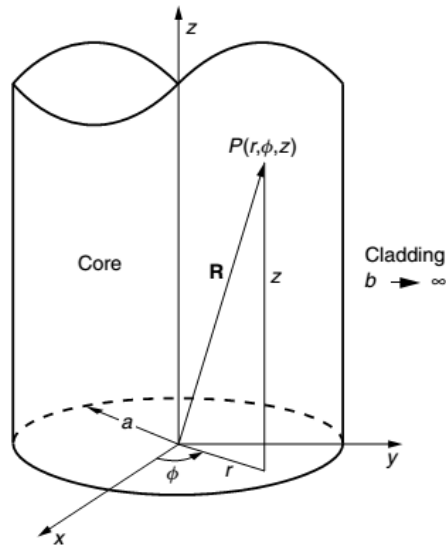
$$\theta_8 = \sin^{-1} 0.5736 = 35.0^\circ$$

1.3 ท่อนำคลื่นแสงทรงกระบอก

สำหรับเส้นใยนำแสงจะมีลักษณะเป็นท่อนำคลื่นไดอิเล็กทริกทรงกระบอก คลื่นแสงที่เดินทางผ่านเส้นใยนำแสงจะพิจารณาในระบบพิกัดทรงกระบอก (r, ϕ, z) ดังแสดงในภาพที่ 1.9 จากภาพกำหนดให้รัศมีของคอร์มีขนาดเท่ากับ a และรัศมีของแคลดดิ้งเท่ากับ b กำหนดให้คลื่นแสงที่แพร่กระจายคลื่นผ่านเส้นใยนำแสง จะอยู่เฉพาะภายในคอร์เท่านั้น เพื่อให้ง่ายในการคำนวณจึงสามารถกำหนดให้ค่ารัศมีของแคลดดิ้งมีขนาดกว้างมาก $b = \infty$ ระบบพิกัดทรงกระบอกจะเหมาะสมที่สุดในกรณีวิเคราะห์สมการคลื่นแสงดังภาพที่ 1.9 จากสมการคลื่น

$$\text{สนามไฟฟ้า} \quad \nabla^2 E + (nk)^2 E = 0 \quad (1.32)$$

$$\text{สนามแม่เหล็ก} \quad \nabla^2 H + (nk)^2 H = 0 \quad (1.33)$$



ภาพที่ 1.9 คลื่นแสงที่เดินทางผ่านท่อนำคลื่นทรงกระบอก
ที่มา (Lizuka, 2002, p. 710)

โดยที่ $n = n_{1,2}$ หรือ n_i คือค่าดัชนีการหักเหคลื่นแสงภายในคอร์และ n_2 คือค่าดัชนีการหักเหคลื่นแสงภายในแคลดดิ้งตามลำดับ ค่าสนามไฟฟ้า E และค่าสนามแม่เหล็ก H ในระบบพิกัดทรงกระบอกคือ

$$\mathbf{E} = E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z} \quad (1.34)$$

$$\mathbf{H} = H_r \hat{r} + H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z} \quad (1.35)$$

จัดรูปค่าสนามไฟฟ้าในสมการ (1.32) ในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + (nk)^2 \mathbf{E} = & \left(\nabla^2 E_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} - \frac{E_r}{r^2} + (nk)^2 E_r \right) \hat{r} \\ & + \left(\nabla^2 E_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{E_\phi}{r^2} + (nk)^2 E_\phi \right) \hat{\phi} \\ & + (\nabla^2 E_z + (nk)^2 E_z) \hat{z} = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

โดยที่ ∇^2 คือตัวดำเนินการลาปลาเซียล ดังสมการ

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.37)$$

จากสมการ (1.36) จะเห็นว่าในระบบพิกัดทรงกระบอก รัศมี \hat{r} และ มุม $\hat{\phi}$ จะมีค่าสนามไฟฟ้า E_r และ E_ϕ เป็นองค์ประกอบ ส่วนทิศทางการเคลื่อนที่แนวแกน \hat{z} จะมีเฉพาะค่าสนามไฟฟ้า E_z เป็นองค์ประกอบ

สมการของแมกเวลล์สามารถใช้แก้สมการเพื่อหาค่าองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวแกน z อันดับแรกจากสมการ (1.37) ค่าผลรวมองค์ประกอบคลื่นสนามไฟฟ้าเชิงเวกเตอร์ในแนวแกน \hat{r} , $\hat{\phi}$ และ \hat{z} มีค่าเท่ากับศูนย์ พิจารณาค่าสนามไฟฟ้า E_z ในแนวแกน \hat{z} โดยใช้ตัวดำเนินการลาปลาเซียลจะได้

$$\nabla^2 E_z + (nk)^2 E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + (nk)^2 E_z = 0 \quad (1.38)$$

การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.38) จะใช้วิธีแบบแยกตัวแปร องค์ประกอบของ E_z สามารถแทนในรูปของผลคูณแบบสเกลาร์ของฟังก์ชัน r , ϕ , และ z แบบอิสระคือ

$$E_z = F(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad (1.39)$$

เพื่อให้ง่ายขึ้น กำหนดให้ $F(r) = F$, $\Phi(\phi) = \Phi$ และ $Z(z) = Z$ ฉะนั้นสมการ (1.39) จัดรูปใหม่ได้ $E_z = F\Phi Z$ และแทนค่า E_z ลงในสมการ (1.38) จะได้

$$F''\Phi Z + \frac{1}{r} F'\Phi Z + \frac{1}{r^2} F\Phi''Z + F\Phi Z'' + (nk)^2 F\Phi Z = 0 \quad (1.40)$$

หารสมการ (1.40) ด้วย $F\Phi Z$ ตลอดสมการจะได้

$$\left[\frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + (nk)^2 \right] + \frac{Z''}{Z} = 0 \quad (1.41)$$

ด้านซ้ายของสมการ (1.41) จะเห็นว่ามีสองพจน์ พจน์แรกเป็นฟังก์ชันของ r และ Φ ส่วนพจน์ที่สองเป็นฟังก์ชันของ Z เพียงอย่างเดียว การแก้สมการ (1.41) จะใช้วิธีสมมุติตัวแปร

$$\beta^2 - \beta^2 = 0 \quad (1.42)$$

สมการ (1.41) และ (1.42) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อพจน์ด้านซ้ายทั้งสองพจน์เป็นศูนย์ ฉะนั้นเทียบสมการ (1.41) และ (1.42) จะได้

$$\frac{F''}{F} + \frac{1}{r} \frac{F'}{F} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + (nk)^2 = \beta^2 \quad (1.43)$$

และ

$$\frac{Z''}{Z} = -\beta^2 \quad (1.44)$$

จัดรูปสมการ (1.43) ใหม่จะได้

$$\left[r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} + ((nk)^2 - \beta^2)r^2 \right] + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \quad (1.45)$$

ด้านซ้ายของสมการ (1.45) จะเห็นว่ามีส่วนพจน์ พจน์แรกเป็นฟังก์ชันของ r ส่วนพจน์ที่สองเป็นฟังก์ชันของ Φ เพียงอย่างเดียว การแก้สมการ (1.45) จะใช้วิธีสมมติตัวแปรเช่นเดียวกัน

$$v^2 - v^2 = 0 \quad (1.46)$$

สมการ (1.45) และ (1.46) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อพจน์ด้านซ้ายทั้งสองพจน์เป็นศูนย์ ฉะนั้นเทียบสมการ (1.45) กับ (1.46) จะได้

$$r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} + ((nk)^2 - \beta^2)r^2 = v^2 \quad (1.47)$$

และ

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -v^2 \quad (1.48)$$

จัดรูปสมการ (1.47) ใหม่จะได้

$$F'' + \frac{1}{r} F' + [(nk)^2 - \beta^2]F = \frac{v^2}{r^2} F \quad (1.49)$$

จากสมการ (1.49) ถ้าค่า r มีขนาดใหญ่มาก ($r \rightarrow \infty$) สามารถลดรูปสมการ (1.49) ได้เป็น

$$F'' + [(nk)^2 - \beta^2]F = 0 \quad (1.50)$$

สมการ (1.49) และ (1.50) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง คำตอบของสมการ (1.49) จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ ในกรณีที่ค่า r มีขนาดใหญ่มาก ในชั้นแคลคูลัสจะมีค่าของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ เป็นลบ ส่วนในชั้นคอร์จะมีค่าของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ เป็นบวก เช่นเดียวกันคำตอบของสมการ (1.50) จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ ในกรณีที่ค่า r มีขนาดใหญ่มาก ($r \rightarrow \infty$) ถ้าเครื่องหมายของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ เป็นบวก และมีคำตอบเป็นฟังก์ชันไซน์ แต่ถ้าเป็นลบ จะมีคำตอบเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลแบบเพิ่มขึ้นหรือลดลง (exponential increase or exponential decay) จากสมการ (1.44), (1.48) และ (1.49) จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$Z'' + \beta^2 Z = 0 \quad (1.51)$$

$$\Phi'' + v^2 \Phi = 0 \quad (1.52)$$

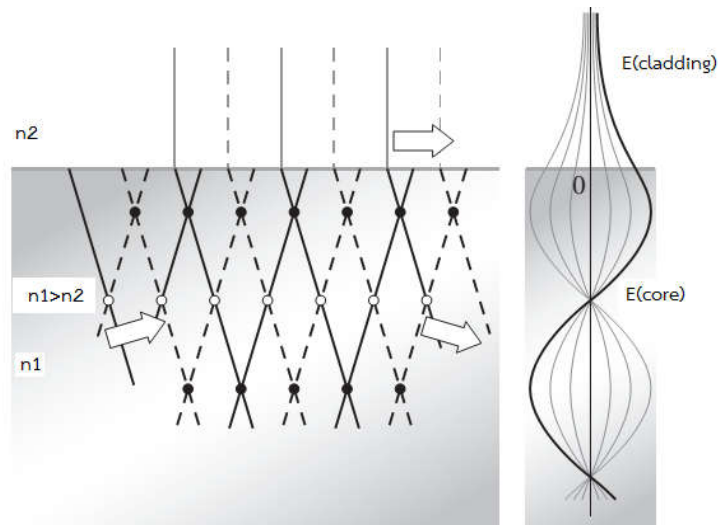
$$F'' + \frac{1}{r} F' + [(nk)^2 - \beta^2]F - \frac{v^2}{r^2} F = 0 \quad (1.53)$$

และถ้าค่า r มีขนาดใหญ่มาก จากสมการ (1.53) สามารถลดรูปได้เป็น

$$F'' + [(nk)^2 - \beta^2]F = 0 \quad (1.54)$$

คำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ที่ (1.51), (1.52) และ (1.53) จะมีหลายรูปแบบทั้งแบบที่เป็นฟังก์ชันไซน์และเอ็กซ์โพเนนเชียล การเลือกคำตอบจะต้องสอดคล้องกับลักษณะทางกายภาพของเส้นใยนำแสง หมายถึงการหาคำตอบจะแยกกันระหว่างคอร์กับแคลคูลิง ขึ้นอยู่กับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและการปรับค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ การคำตอบของสมการคลื่นแสงที่เดินทางอยู่ภายในคอร์พิจารณาจากสมการ

$$Z(z) = ae^{j\beta z} + be^{-j\beta z} \quad (1.55)$$



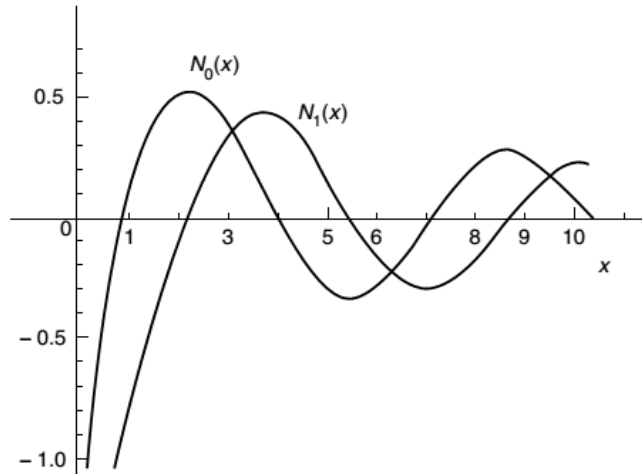
ภาพที่ 1.10 ค่าสนามไฟฟ้าภายในคอร์และแคลดดิ้ง
ที่มา (Hecht, 2017, p. 136)

และ
$$\Phi(\phi) = ce^{jv\phi} + de^{-jv\phi} \quad (1.56)$$

หรือ
$$\Phi(\phi) = c' \cos v\phi + d' \sin v\phi \quad (1.57)$$

สมการ (1.55) จะประกอบด้วยคลื่นเดินทางและคลื่นย้อนกลับ ส่วนสมการ (1.56) จะประกอบด้วยคลื่นที่เดินทางแบบเกลียวเดินทางและย้อนกลับ การแทรกสอดระหว่างคลื่นจนเกิดเป็นคลื่นนิ่งดังแสดงในภาพที่ 1.10 จากภาพจะเห็นว่าผลรวมรูปแบบคลื่นนิ่งของสนามไฟฟ้าภายในคอร์ จะเป็นฟังก์ชันไซน์ ส่วนคลื่นนิ่งสนามไฟฟ้าภายในแคลดดิ้งจะเป็นอัตราการลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล

สมการ (1.53) และ (1.54) มีรูปแบบเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซล (Bessel's equation) และมีคำตอบเป็นฟังก์ชันเบสเซล อันดับที่ v โดยที่ v เป็นตัวแปรจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ คำตอบสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลจะมีสองแบบ ขึ้นอยู่กับการกำหนดเงื่อนไขไรรัศมี r ของเส้นใยนำแสง ถ้าค่า $r = 0$ หรือ ค่า $r \leq a$ คำตอบจะเป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 (Bessel functions of the first kind) และถ้าค่า $r > a$ หรือ $r = \infty$ รัศมี r อยู่ในแคลดดิ้ง คำตอบจะเป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 (Bessel functions of the second kind) คำตอบของสมการ (1.53) สำหรับคลื่นแสงที่เดินทางอยู่ภายในคอร์ตามแนวรัศมี r คำตอบในรูปฟังก์ชันไซน์จะเหมาะสมกว่าเอ็กซ์โพเนนเชียล ฉะนั้นค่าประสิทธิ์ของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ จะเป็นบวก และคำตอบของสมการ (1.53) ขอบเขตภายในรัศมี r ของคอร์ ดังสมการ



ภาพที่ 1.11 ค่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับที่ 0 และ 1
 ที่มา (Lizuka, 2002, p. 714)

$$F(r) = eJ_v(Kr) + fN_v(Kr) \tag{1.58}$$

โดยที่
$$K^2 = [(nk)^2 - \beta^2] \tag{1.59}$$

กำหนดให้ค่าตรรกะการหักเหภายในคอร์ $n = n_1$ สมการ (1.59) จัดรูปใหม่ได้

$$K^2 = [(n_1k)^2 - \beta^2] \tag{1.60}$$

ค่า a, b, c, d, c', d', e และ f เป็นค่าคงที่ที่เหมาะสมตามการเลือกค่า v ในฟังก์ชันทรงกระบอกของคอร์ ค่ามุม ϕ จะเปลี่ยนแปลงอยู่ระหว่าง 0 ถึง 2π ฉะนั้นตำแหน่งมุม ϕ และ $\phi + 2\pi$ มีค่าเท่ากัน จะได้ว่า

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \tag{1.61}$$

โดยที่ $J_v(Kr)$ คือค่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับที่ v และ $N_v(Kr)$ คือค่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับที่ v ตามลำดับ ค่าฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับที่ 0 และ 1 แสดงดังภาพที่ 1.11 จากภาพจะเห็นว่าถ้าค่า $Kr = 0$ หรือรัศมีคอร์ที่ $r = 0$ ค่า $N_v(Kr) = -\infty$ ซึ่งจะเป็นค่าที่ไม่เป็นจริงในทางปฏิบัติ ในกรณีนี้จากสมการ (1.58) ค่าของพจน์ $fN_v(Kr) = 0$ ในกรณีที่รัศมีคอร์ $r < a$ ค่าสนามแม่เหล็ก H และสนามไฟฟ้า E ในแนวแกน z จะเป็นดังสมการ

$$E_z = AJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi} \quad (1.62)$$

$$H_z = BJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi} \quad (1.63)$$

สมการ (1.62) และ (1.63) ถ้าจัดรูปให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันฮาร์มอนิกไซน์และโคไซน์ จะได้

$$E_z = AJ_v(Kr)\cos(v\phi)e^{j\beta z} \quad (1.64)$$

$$H_z = BJ_v(Kr)\sin(v\phi)e^{j\beta z} \quad (1.65)$$

ส่วนกรณีค่าสนามไฟฟ้า E ในแนวแกน z ที่ค่ารัศมี $r > a$ จนถึง $r = \infty$ เป็นการพิจารณาคลื่นภายในแคลดดิ้ง คำตอบสมการ (1.63) จะเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลแบบลดลงตามค่ารัศมี r ดังแสดงในภาพที่ 1.24 เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข สามารถทำได้โดยกำหนดค่าของพจน์ $[(nk)^2 - \beta^2]$ ของสมการคลื่นที่ (1.63) ให้มีค่าลบ นั่นคือ

$$-\gamma^2 = (n_2k)^2 - \beta^2 \quad (1.66)$$

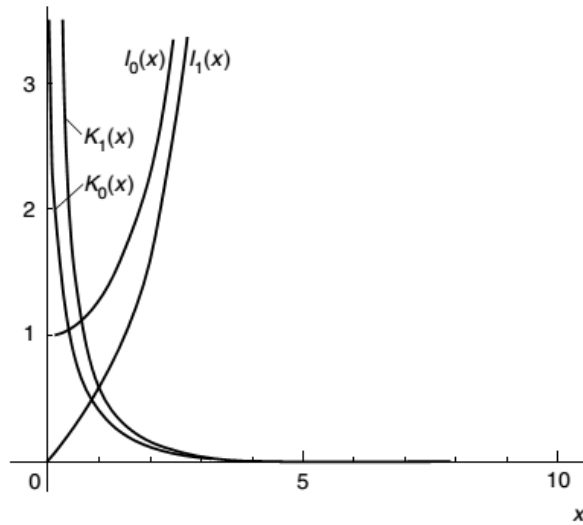
และดรรชนีหักเหภายในแคลดดิ้ง $n = n_2$ แทนค่าสมการ (1.66) ลงในสมการ (1.53) จะได้

$$F'' + \frac{1}{r}F' - \gamma^2 F - \frac{v^2}{r^2}F = 0 \quad (1.67)$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ของเบสเซลที่ (1.67) ในรูปแบบทั่วไปดังสมการ

$$F(r) = eI_v(\gamma r) + fK_v(\gamma r) \quad (1.68)$$

โดยที่ $I_v(\gamma r)$ คือค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูป (modified Bessel function) ชนิดที่ 1 อันดับที่ v และ $K_v(\gamma r)$ คือค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูปชนิดที่ 2 อันดับที่ v ตามลำดับ ค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูปชนิดที่ 1 และ 2 อันดับที่ 0 และ 1 แสดงดังภาพที่ 1.12 จากภาพที่จะเห็นว่าค่า $I_v(x)$ จะเพิ่มขึ้นเมื่อค่า x มากขึ้น แต่ในทางตรงกันข้ามค่า $K_v(x)$ จะลดลง ในกรณีนี้ตัวแปร x ก็คือค่ารัศมี r ของเส้นใยนำแสง ซึ่งค่าสนามไฟฟ้าในแคลดดิ้งจะลดลงเมื่อค่ารัศมี r มากขึ้น



ภาพที่ 1.12 ค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูปชนิดที่ 1 และ 2 อันดับที่ 0 และ 1 ที่มา (Lizuka, 2002, p. 715)

ฉะนั้นการเลือกใช้ค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูป $K_\nu(\gamma r)$ จะเหมาะสมมากที่สุดโดยการกำจัดพจน์ $I_\nu(\gamma r)$ ในคำตอบสมการ (1.68) ทำได้โดยกำหนดให้ค่าคงที่ $e = 0$ คำตอบสมการในรูปของสนามแม่เหล็ก H และสนามไฟฟ้า E ในแนวแกน z ภายในแคลดดิ้งที่ค่ารัศมี $r > a$ เป็นดังสมการ

$$E_z = CK_\nu(\gamma r)e^{j\beta z + jv\phi} \tag{1.69}$$

$$H_z = DK_\nu(\gamma r)e^{j\beta z + jv\phi} \tag{1.70}$$

หรือในบางกรณีค่า $K_\nu(x)$ จะแทนอยู่ในรูปฟังก์ชันแฮนเคิล (Hankel function) $H_\nu^{(1)}(j\gamma r)$ กับอาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนที่ใช่แทนที่พจน์ $K_\nu(\gamma r)$ ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันแฮนเคิลกับฟังก์ชันเบสเซลที่มีการปรับรูปคือ

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} j^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(jx) \tag{1.71}$$

จากสมการ (1.32) จนถึง (1.71) เป็นการหาค่าสนามแม่เหล็ก H และสนามไฟฟ้า E ในแนวแกน z ภายในคอร์และแคลดดิ้ง โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตรัศมี r เป็นตัวกำหนด ถ้ารัศมี $r < a$ จะอยู่ภายในคอร์ และถ้ารัศมี $r \geq a$ จะอยู่ภายในแคลดดิ้ง การหาค่าองค์ประกอบสนามแม่เหล็กและ

สนามไฟฟ้าในทิศทาง r และ ϕ ในพิกัดทรงกระบอก สามารถหาได้โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์เช่นเดิม จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า

$$\nabla \times H = -j\omega\epsilon E \quad (1.72)$$

โดยที่

$$\nabla \times H = \begin{pmatrix} \frac{\hat{r}}{r} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\phi & H_z \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

สมการ (1.73) เป็นการเคิร์ลในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -j\omega\epsilon E_r \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -j\omega\epsilon E_\phi \quad (1.75)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = -j\omega\epsilon E_z \quad (1.76)$$

และเช่นเดียวกัน

$$\nabla \times E = j\omega\mu H \quad (1.77)$$

โดยที่

$$\nabla \times E = \begin{pmatrix} \frac{\hat{r}}{r} & \hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\phi & E_z \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

สมการ (1.78) เป็นการเคิร์ลในระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = j\omega\mu H_r \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = j\omega\mu H_\phi \quad (1.80)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = j\omega\mu H_z \quad (1.81)$$

จากสมการ (1.74) และ (1.80) สามารถหาค่า E_r และ H_ϕ ในเทอมของสนามไฟฟ้า E_z และสนามแม่เหล็ก H_z และเช่นเดียวกันจากสมการ (1.75) และ (1.79) สามารถหาค่า E_ϕ และ H_r ในเทอมของ E_z และ H_z

กำหนดให้อัตราการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน z หรือ $\partial/\partial z = j\beta$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่แสดงค่าอัตราการเคลื่อนที่ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางแกน z จะได้

$$E_r = \frac{j}{K^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega\mu \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (1.82)$$

$$E_\phi = \frac{j}{K^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (1.83)$$

$$H_r = \frac{j}{K^2} \left(-\omega\varepsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (1.84)$$

$$H_\phi = \frac{j}{K^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (1.85)$$

โดยที่ $K^2 = (nk)^2 - \beta^2$ การหาค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในคอร์จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตคาร์ซีมี $r < a$ จากสมการ (1.62) และ (1.63) ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในคอร์คือ $E_z = AJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ และ $H_z = BJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ แทนค่า E_z และ H_z ลงในสมการ (1.82) ถึง (1.85) และแทนที่ค่า ε ด้วย ε_1 สุดท้ายค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในคอร์จะเป็นดังสมการ

$$E_r = \frac{j}{K^2} \left(A\beta K J'_v(Kr) + B\omega\mu \frac{jv}{r} J_v(Kr) \right) \quad (1.86)$$

$$E_\phi = \frac{j}{K^2} \left(A \frac{\beta}{r} jv J_\nu(Kr) - B \omega \mu K J'_\nu(Kr) \right) \quad (1.87)$$

$$H_r = \frac{j}{K^2} \left(-A \omega \varepsilon_1 \frac{J\nu}{r}(Kr) + B \beta K J'_\nu(Kr) \right) \quad (1.88)$$

$$H_\phi = \frac{j}{K^2} \left(A \omega \varepsilon_1 K J'_\nu(Kr) + B \frac{\beta}{r} jv J_\nu(Kr) \right) \quad (1.89)$$

สัญลักษณ์ ' คือค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สำหรับพจน์ $e^{j\beta z + jv\phi} = e^{j(\beta z + v\phi)}$ ค่า β และ v เป็นจำนวนเต็ม ฉะนั้นองค์ประกอบของสนามจะมีการเปลี่ยนแปลงแบบซ้ำในทศวรรษ 2π (สัญญาณแบบรายคาบ) ส่วนการหาค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในแคลดดิ้ง จะกำหนดเงื่อนไขขอบเขตค่ารัศมี $r > a$

จากสมการ (1.69) และ (1.70) ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในแคลดดิ้ง คือ $E_z = CK_\nu(\gamma r)e^{j\beta z + jv\phi}$ และ $H_z = DK_\nu(\gamma r)e^{j\beta z + jv\phi}$ แทนค่า E_z และ H_z ลงในสมการ (1.82) ถึง (1.85) และแทนที่ค่า ε ด้วย ε_2 และเช่นเดียวกันค่า K^2 จะถูกแทนที่ด้วยพจน์ $-\gamma^2 = (n_2 k)^2 - \beta^2$ ส่วนค่าคงที่ A, B, ε_1, K และ $J_\nu(Kr)$ ถูกแทนที่ด้วยค่าคงที่ $C, D, \varepsilon_2, j\gamma$ และ $K_\nu(\gamma r)$ ตามลำดับ ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในแคลดดิ้งคือ

$$E_r = \frac{-j}{\gamma^2} \left(C \beta \gamma K'_\nu(\gamma r) + D \omega \mu \frac{jv}{r} K_\nu(\gamma r) \right) \quad (1.90)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{\gamma^2} \left(C \frac{\beta}{r} jv K_\nu(\gamma r) - D \omega \mu \gamma K'_\nu(\gamma r) \right) \quad (1.91)$$

$$H_r = \frac{-j}{\gamma^2} \left(-C \omega \varepsilon_2 \frac{jv}{r} K_\nu(\gamma r) + D \beta \gamma K'_\nu(\gamma r) \right) \quad (1.92)$$

$$H_\phi = \frac{-j}{\gamma^2} \left(C \omega \varepsilon_2 \gamma K'_\nu(\gamma r) + D \frac{\beta}{r} jv K_\nu(\gamma r) \right) \quad (1.93)$$

สมการ (1.86) จนถึง (1.93) การหาค่าคงที่ A, B, C และ D เพื่อดูคุณสมบัติของสมการคลื่นและหาองค์ประกอบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่อยู่ภายในคอร์และแคลดดิ้งคือค่า E_z, E_ϕ, H_z และ H_ϕ เทคนิคในการหาค่าสัมประสิทธิ์ A, B, C และ D มี 2 วิธีด้วยกัน วิธีแรกใช้เมตริกขนาด

4×4 และกำหนดเงื่อนไขไรต์มี $r = a$ เพื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ส่วนวิธีที่สองจะใช้เทคนิคลดตัวแปรจากขนาดเมตริก 4×4 ให้เหลือ 2×2 สำหรับวิธีนี้จะมีความซับซ้อนน้อย

การใช้เทคนิคลดตัวแปรเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ A, B, C และ D อันดับแรกค่า C จะถูกหาค่าในเทอมของ A จากเงื่อนไขขอบเขต $r = a$ เป็นจุดรอยระหว่างคอร์และแคลดดิ้งค่าสนามไฟฟ้า E_z จะเท่ากันตลอดรอยต่อ (continuity of E_z) จากสมการ (1.64) และ (1.69) จะได้

$$AJ_v(Ka) = CK_v(\gamma a) \quad (1.94)$$

และ
$$C = \frac{J_v(Ka)}{K_v(\gamma a)} A \quad (1.95)$$

ในทำนองเดียวกันในการหาค่า H_z ค่า D จะถูกหาค่าในเทอมของ B จากสมการ (1.65) และ (1.70) จะได้

$$DK_v(\gamma a) = BJ_v(Ka) \quad (1.96)$$

และ
$$D = \frac{J_v(Ka)}{K_v(\gamma a)} B \quad (1.97)$$

สมการ (1.94) และ (1.97) ใช้ค่าตัวแปรในสมการเหมือนกัน

ลำดับถัดไป หาค่า C จากสมการ (1.91) จะถูกแทนที่ด้วยสมการ (1.95) และค่า D จากสมการ (1.93) จะถูกแทนที่ด้วยสมการ (1.97) และจากเงื่อนไขขอบเขต $r = a$ เป็นจุดรอยระหว่างคอร์กับแคลดดิ้ง ค่าสนามไฟฟ้า E_ϕ และสนามแม่เหล็ก H_ϕ จะเท่ากันตลอดรอยต่อ (continuity of E_ϕ and H_ϕ) จัดรูปสมการ E_ϕ และ H_ϕ ใหม่จะได้

$$A\beta v \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) + jB\omega\mu \left(\frac{J'_v(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \frac{K'_v(\gamma a)}{\gamma aK_v(\gamma a)} \right) = 0 \quad (1.98)$$

$$A\omega \left(\frac{\varepsilon_1 J'_v(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \frac{\varepsilon_2 K'_v(\gamma a)}{\gamma aK_v(\gamma a)} \right) + jB\beta v \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) = 0 \quad (1.99)$$

จากสมการ (1.98) และ (1.99) จะเป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 เมื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์และค่าสัมประสิทธิ์ A และ B จะหายไป (เป็นศูนย์) แต่ค่าสัมประสิทธิ์ A และ B เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญ ฉะนั้นเพื่อให้สมการ (1.98) และ (1.99) เป็นจริง ค่าดีเทอร์มิแนนต์จะเป็นดังสมการ

$$\left(\frac{1}{Ka} \frac{J'_v(Ka)}{J_v(Ka)} + \frac{1}{\gamma a} \frac{K'_v(\gamma a)}{K_v(\gamma a)} \right) \left(\frac{J'_v(Ka)}{Ka J_v(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_v(\gamma a)}{\gamma a K_v(\gamma a)} \right) = \left[\frac{\beta v}{n_1 k} \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \right]^2 \quad (1.100)$$

สมการ (1.100) คือสมการคุณลักษณะของเส้นใยนำแสงแบบขั้น (step-index fiber) ในสมการ (1.100) มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าคือ Ka และ γa การหาค่า Ka และ γa จะต้องใช้สมการ (1.60) และ (1.66) ร่วมด้วยคือ $K^2 = [(n_1 k)^2 - \beta^2]$ และ $-\gamma^2 = (n_2 k)^2 - \beta^2$ กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตระหว่างคอร์กับแคลดดิ้ง ความสัมพันธ์ระหว่าง Ka , γa และค่า V ดังสมการ

$$V^2 = (Ka)^2 + (\gamma a)^2 \quad (1.101)$$

โดยที่
$$V = ka \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.102)$$

กราฟสมการ (1.100) เป็นกราฟผลรวมของฟังก์ชันเบสเซล ส่วนกราฟสมการ (1.102) เป็นกราฟวงกลมที่มีค่ารัศมี V การเพิ่มขึ้นและลดลงของค่า V จะมีผลต่อจำนวนโหมดคลื่นที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้

การพิจารณาคุณลักษณะของโหมดแสงในเส้นใยนำแสงแบบขั้น จะแบ่งออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีแรกค่า $v = 0$ และกรณีที่สองค่า $v \neq 0$ สำหรับในกรณีแรกเมื่อค่า $v = 0$ จะทำให้พจน์ด้านซ้ายของสมการ (1.100) มีค่าเป็นศูนย์ และจัดรูปใหม่ได้

สำหรับโหมดคลื่นแบบ TE
$$\frac{J_1(Ka)}{Ka J_0(Ka)} + \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0 \quad (1.103)$$

สำหรับโหมดคลื่นแบบ TM
$$\frac{J_1(Ka)}{Ka J_0(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K_1(\gamma a)}{\gamma a K_0(\gamma a)} = 0 \quad (1.104)$$

ใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเบสเซล $J'_0(x) = -J_1(x)$ และ $K'_0(x) = -K_1(x)$ สมการ (1.211) เป็นสมการคุณลักษณะโหนดคลื่นแบบ TE และสมการ (1.104) เป็นสมการคุณลักษณะโหนดคลื่นแบบ TM จากสมการ (1.62) และ (1.63) ค่า $E_z = AJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ และ $H_z = BJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ อัตราส่วนระหว่าง $H_z/E_z = (B/A)^2$ เช่นเดียวกันอัตราส่วนระหว่าง $(B/A)^2$ คำนวณได้จากสมการ (1.98) และแทนพจน์ $\beta v(1/(Ka)^2 + 1/(\gamma a)^2)$ ด้วยสมการ (1.99) จะได้

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1}{\eta_1^2} \frac{\frac{J'_v(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K'_v(\gamma a)}{\gamma a K_v(\gamma a)}}{\frac{J'_v(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \frac{K'_v(\gamma a)}{\gamma a K_v(\gamma a)}} \quad (1.105)$$

โดยที่ $\eta_1 = \sqrt{\mu/\epsilon_1}$ จากสมการ (1.62) และ (1.63) ค่าสนามไฟฟ้า $E_z = AJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ และ สนามแม่เหล็ก $H_z = BJ_v(Kr)e^{j\beta z + jv\phi}$ ถ้าค่า $A=0$ จะทำให้ $E_z=0$ แสดงว่าไม่มีองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวแกน z จะเป็นโหมดแบบ TE (transverse electric mode) แต่ถ้า $B=0$ จะทำให้ $H_z=0$ แสดงว่าไม่มีองค์ประกอบสนามแม่เหล็กในแนวแกน z จะเป็นโหมดแบบ TM (transverse magnetic mode)

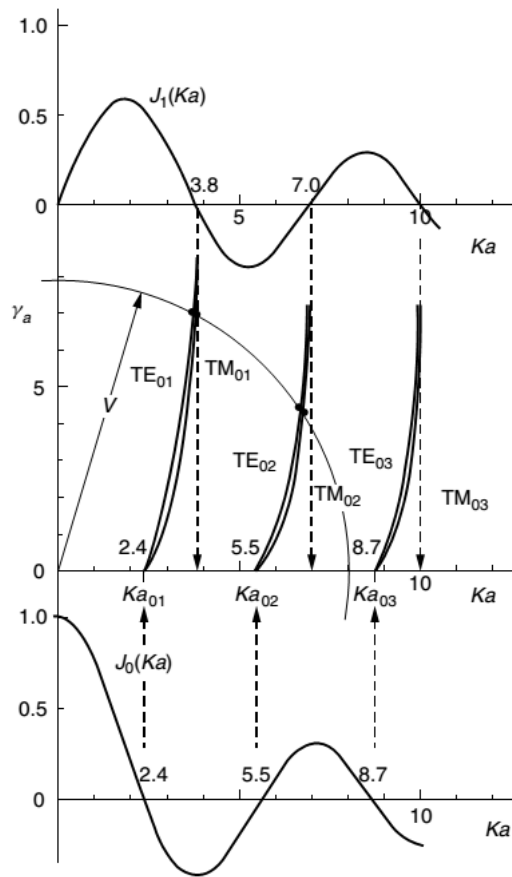
เมื่อนำสมการ (1.103) และ (1.104) มาพล็อตกราฟค่า Ka ที่สัมพันธ์กับค่า γa ในกรณี ที่ $v=0$ ดังแสดงในภาพที่ 1.13 จากภาพค่า γa จะอยู่ระหว่าง 0 ถึง ∞ โหนดคัตออฟจะพิจารณาจุดที่ $\gamma a = 0$ จากกราฟในภาพที่ 1.12 จะได้อัตราส่วนระหว่าง $K_1(x)$ กับ $K_0(x)$ หรือในกรณีนี้คือ ค่าอัตราส่วนระหว่าง $K_1(\gamma a)$ กับ $K_0(\gamma a)$ ดังสมการ

$$\lim_{\gamma a \rightarrow 0} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \gg 1 \quad (1.106)$$

ถ้าค่า $\gamma a = 0$ เงื่อนไขที่จะทำให้สมการ (1.103) เป็นจริงได้คือค่า

$$J_0(Ka) = 0_- \quad (1.107)$$

ค่า 0_- เป็นค่าที่ใกล้เคียงกับศูนย์มาก ๆ ในภาพที่ 1.13 ในกรณีที่ $\gamma a = 0$ ค่ารากของ Ka จะเป็นตัวกำหนดจำนวนโหนดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้หรือโหนดคัตออฟ เช่นที่ค่า $Ka_{01} = 2.4$ จะเป็นค่าคัตออฟสำหรับโหมด TE_{01} และค่า $Ka_{01} = 5.5$ จะเป็นค่าคัตออฟสำหรับโหมด TE_{02}



ภาพที่ 1.13 คุณสมบัติของโหมด $TE_{0\mu}$ และ $TM_{0\mu}$ ที่มา (Lizuka, 2002, p. 721)

และถ้า $Ka_{01} = 8.7$ จะเป็นค่าตัดออฟสำหรับโหมด TE_{03} ตามลำดับ ส่วนโหมดแบบ TM ก็จะมีค่าตัดออฟใกล้เคียงกับโหมด TE เพียงแต่จะมีค่าคลาดเคลื่อนกันเล็กน้อยดังแสดงในภาพที่ 1.13

ส่วนโหมดคลื่นในแคลดดิ้งจะพิจารณาที่เงื่อนไขขอบเขต γa มีค่ามากกว่า a มาก ๆ จนถึง ∞ ถ้ากำหนดให้ $\gamma a \rightarrow \infty$ ซึ่ง $\lim_{\gamma r \rightarrow \infty} [K_1(\gamma r)/K_0(\gamma r)]$ มีค่าจำกัดและสมการ (1.104) สามารถหาค่าได้ ถ้า $\gamma a \rightarrow \infty$ พจน์แรกในสมการ (1.104) จะเป็นศูนย์ได้ก็ต่อเมื่อ

$$J_1(Ka) = 0 \tag{1.108}$$

ค่ารากของฟังก์ชันเบสเซล $J_1(Ka) = 0$ จากภาพที่ 1.13 คือ 0.0, 3.8, 7.0 และ 10 ตามลำดับ ในกรณีที่ $Ka = 0$ ค่าลิมิตของพจน์แรกในสมการ (1.104) จะเท่ากับ

$$\lim_{Ka \rightarrow 0} \frac{J_1(Ka)}{Ka} = \frac{1}{2} \quad (1.109)$$

ส่วนโหมดแบบ TM ก็จะมีค่าเท่ากับโหมด TE ในกรณีนี้ที่ $\gamma r = \infty$ ค่าความแตกต่างระหว่างโหมด TE กับ TM ในสมการ (1.103) กับ (1.104) มีเพียงแค่พจน์ $[n_2/n_1]^2$ ถ้าค่า n_1 และ n_2 มีค่าใกล้เคียงกันมาก ๆ โดยทั่วไปจะอยู่ที่ $(1.005)^2$ ซึ่งจะใกล้เคียงกับค่า 1 เพียงแต่โหมด TM จะมีความชัน (slope) น้อยกว่าโหมด TE เล็กน้อย

ถัดมาจะเป็นการพิจารณาโหมดในกรณีที่มีค่า $v \neq 0$ และคลื่นแสงเป็นแบบเกลียว (skew-modes) ถ้าค่า $v \neq 0$ พจน์ด้านขวาของสมการ (1.103) จะไม่เป็นศูนย์ ซึ่งจะทำให้การหาค่าตอบของสมการคุณลักษณะ (1.103) มีความยุ่งยากมาก ในทางปฏิบัติความแตกต่างค่าดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งจะน้อยมาก ประมาณ 0.3-0.5% จึงสามารถประมาณค่าดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งตั้งสมการ

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cong 1 \quad (1.110)$$

กรณีประมาณค่าให้พจน์ $[n_2/n_1]^2 \cong 1$ จะทำให้การหาค่าตอบในสมการ (1.100) มีความง่ายขึ้น ทั้งในกรณี $v = 0$ และ $v \neq 0$ จากทฤษฎีการประมาณค่าส่งผ่านอย่างอ่อน (theory with the weakly guiding approximation) เป็นการใช้ข้อสมมุติฐานที่ว่าความแตกต่างค่าดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งจะเป็นตัวกำหนดค่าความสามารถการส่งผ่านคลื่นแสง ถ้าค่าความแตกต่างมีค่าน้อยมาก ๆ สมการ (1.100) สามารถประมาณค่าได้เป็น

$$\frac{J'_v(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \frac{K'_v(\gamma a)}{\gamma aK_v(\gamma a)} = \pm v \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right) \quad (1.111)$$

โดยกำหนดให้ $\beta = n_1 k$ ข้อสมมุติฐานของทฤษฎีการประมาณค่าส่งผ่านอย่างอ่อน แสงที่เดินทางภายในคอร์จะอยู่ที่บริเวณรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งเท่านั้น ที่สามารถเดินทางผ่านเส้นใยนำแสงได้

สำหรับคลื่นแสงที่เคลื่อนที่เป็นแบบเกลียวในกรณี $v = 0$ การพิจารณาโหมด TE และ TM จะเป็นแบบเดียวกับสมการ (1.98), (1.99) และ (1.100) ถ้ารากของสมการ $A = 0$ แล้วทำให้ค่าสนามไฟฟ้า $E_z = 0$ จะเป็นโหมดแบบ TE และถ้ารากของสมการ $B = 0$ แล้วทำให้ค่าสนามแม่เหล็ก $H_z = 0$ จะเป็นโหมดแบบ TM

ส่วนในกรณี $v \neq 0$ องค์ประกอบคลื่นในแนวแกน z จะทั้งค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก จากการใช้ทฤษฎีประมาณค่าส่งผ่านอย่างอ่อนพิจารณาสมการ (1.111) จากสมการสามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี กรณีแรกค่า Ka และ γa เป็นค่าจริง โหมดคลื่นจะขึ้นอยู่กับค่า $\pm v$ ถ้าเครื่องหมายเป็นบวก ($+v$) จะเป็นโหมดคลื่นแบบ EH และในทางกลับกันถ้าเครื่องหมายเป็นลบ ($-v$) จะเป็นโหมดคลื่นแบบ HE และกรณีที่สองค่า Ka และ γa เป็นค่าจินตภาพ โดยพิจารณา ค่าเครื่องหมายในพจน์ $j(B/A)\eta_1$ ซึ่งอัตราส่วน B/A คำนวณจากสมการ (1.98) และ (1.111) ตามสมการ

$$\frac{B}{A} = -\frac{\beta}{j\omega\mu} \frac{v \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)}{\pm v \left(\frac{1}{(Ka)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2} \right)} \quad (1.112)$$

จากสมการ (1.112) ถ้า $\beta = n_1 k$, $k = 2\pi/\lambda$ และ $\eta_1 = \sqrt{\mu/\epsilon_1}$ จัดรูปสมการใหม่ได้

$$j \frac{B}{A} = \mp \frac{1}{\eta_1} \quad (1.113)$$

ข้อเสนอของ Snitzer (Snitzer's proposal) ได้แสดงให้เห็นว่าโหมดคลื่นแสงในกรณี $v \neq 0$ องค์ประกอบคลื่นในแนวแกน z จะมีทั้งค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก โหมดคลื่นจะขึ้นอยู่กับค่าเครื่องหมาย $\pm v$ และค่าของพจน์ $j(B/A)\eta_1$ ที่จุดตัดออฟ ถ้าที่จุดตัดออฟค่า $j(B/A)\eta_1 = +1$ จะเป็นโหมดแบบ HE แต่ถ้าที่จุดตัดออฟค่า $j(B/A)\eta_1 = -1$ จะเป็นโหมดแบบ EH ดังสมการ

$$\text{สำหรับโหมด HE} \quad -v, \quad j \frac{B}{A} \eta_1 = +1 \quad (1.114)$$

$$\text{สำหรับโหมด EH} \quad +v, \quad j \frac{B}{A} \eta_1 = -1 \quad (1.115)$$

โหมดคลื่นที่มีองค์ประกอบทั้งสนามแม่เหล็ก (H_z) และสนามไฟฟ้า (E_z) ในทิศทางการเคลื่อนที่ในกรณีนี้คือแนวแกน z เรียกว่าเป็นโหมดแบบไฮบริด (hybrid modes) ถ้าขนาดองค์ประกอบของสนามไฟฟ้ามากกว่าสนามแม่เหล็ก เรียกว่าโหมดแบบ EH และในทางกลับกันถ้าขนาดองค์ประกอบ

ของสนามแม่เหล็กมากกว่าสนามไฟฟ้าเรียกว่าโหมดแบบ HE จากสมการ (1.111) จัดรูปใหม่โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) ดังสมการ

$$J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x) \quad (1.116)$$

$$K'_v(x) = -K_{v-1}(x) - \frac{v}{x} K_v(x) \quad (1.117)$$

$$J'_v(x) = -J_{v+1}(x) + \frac{v}{x} J_v(x) \quad (1.118)$$

$$K'_v(x) = -K_{v+1}(x) + \frac{v}{x} K_v(x) \quad (1.119)$$

สัญลักษณ์เครื่องหมายลบ ($-v$) ในสมการ (1.111) และสมการ (1.116) และ (1.117) จะถูกใช้เพื่อแก้สมการเพื่อหาคูณลักษณะของโหมดคลื่นแบบ HE และเช่นเดียวกันสัญลักษณ์เครื่องหมายบวก ($+v$) ในสมการ (1.111) และสมการ (1.118) และ (1.119) จะถูกใช้เพื่อแก้สมการเพื่อหาคูณลักษณะของโหมดคลื่นแบบ EH จะได้

สำหรับโหมด HE
$$\frac{J_{v-1}(Ka)}{KaJ_v(Ka)} - \frac{K_{v-1}(\gamma a)}{\gamma a K_v(\gamma a)} = 0 \quad (1.120)$$

สำหรับโหมด EH
$$\frac{J_{v+1}(Ka)}{KaJ_v(Ka)} + \frac{K_{v+1}(\gamma a)}{\gamma a K_v(\gamma a)} = 0 \quad (1.121)$$

ในกรณีแรก คือการหาค่าตัดออฟของโหมดแบบ HE โดยจะกำหนดเงื่อนไขให้ $x \ll 1$ โดยใช้ค่าประมาณของฟังก์ชันเบสเซล ดังสมการ

$$\frac{K_0(x)}{K_1(x)} = x \ln\left(\frac{2}{1.782x}\right) \quad (1.122)$$

$$\frac{K_{v-1}(x)}{K_v(x)} = \frac{x}{2(v-1)}, \quad v \geq 2 \quad (1.123)$$

$$\frac{J_{v-1}(x)}{J_v(x)} = \frac{2}{x}v \quad (1.124)$$

และถ้าค่า $x \gg 1$ ค่าประมาณของฟังก์ชันเบสเซลคือ

$$\frac{J_{v-1}(x)}{J_v(x)} = \frac{2}{x}v \quad (1.125)$$

จากสมการ (1.120) $[J_{v-1}(Ka)/KaJ_v(Ka)] - [K_{v-1}(\gamma a)/\gamma aK_v(\gamma a)] = 0$ ถ้าพิจารณาค่าใกล้จุดตัดออฟ $\gamma a \rightarrow 0$ เทียบกับสมการ (1.123) $[K_{v-1}(x)/K_v(x)] = [x/2(v-1)]$ สำหรับโหมดคลื่นแบบ HE จากสมการ (1.120) จะกลายเป็น

$$\frac{J_{v-1}(Ka)}{KaJ_v(Ka)} = \frac{1}{2(v-1)} \quad (1.126)$$

ภายใต้เงื่อนไขนี้ สมการ (1.116) ถึง (1.119) จัดรูปใหม่ได้

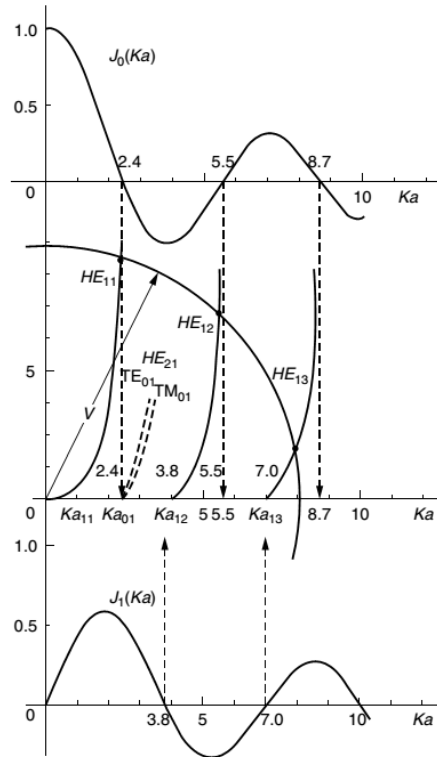
$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \quad (1.127)$$

$$K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}K_n(x) \quad (1.128)$$

จากสมการ (1.127) และกำหนดให้ $n = v-1$ ทำให้สมการ (1.126) สามารถลดรูปได้เป็น

$$KaJ_{v-2}(Ka) = 0 \quad (1.129)$$

สำหรับกรณีที่ $v \geq 2$ และ $Ka = 0$ จะถูกแยกออก ไม่พิจารณาเป็นคำตอบของสมการเพราะว่าในกรณีที่ $v \geq 2$ จะทำให้สมการ (1.126) ไม่เป็นจริง เนื่องจากพจน์ด้านขวามีค่าจำกัด (finite) แต่พจน์ด้านซ้ายมีค่าไม่สิ้นสุด (infinite) ค่ารากของสมการ (1.129) คือจุดตัดออฟของโหมดแบบ HE ถ้ากำหนดให้ μ เป็นตัวเลขที่ใช้บอกค่ารากของโหมด HE จะมีรูปแบบ $HE_{v,\mu}$ อาทิเช่นค่ารากของโหมด $HE_{2,\mu}$ จะเท่ากับ $Ka = 2.40, 5.52, 8.65, \dots$ เป็นต้น สำหรับกรณีที่ค่า $v = 1$ จะใช้สมการ (1.122) และสมการ (1.120) สำหรับกรณีที่ค่า $v = 1$ จะใช้สมการ (1.122) และสมการ (1.120)



ภาพที่ 1.14 กราฟสมการคุณลักษณะของโหมด $HE_{1\mu}$ ที่มา (Lizuka, 2002, p. 725)

$([J_{\nu-1}(Ka)/KaJ_{\nu}(Ka)] - [K_{\nu-1}(\gamma a)/\gamma aK_{\nu}(\gamma a)]) = 0$ ถ้าค่าของพจน์ $\gamma a \rightarrow 0$ จะทำให้พจน์ $K_{\nu-1}(\gamma a)/\gamma aK_{\nu}(\gamma a)$ ไม่สามารถหาค่าได้ ส่งผลให้สมการ (1.120) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อค่า

$$KaJ_1(Ka) = 0 \tag{1.130}$$

ในกรณีอื่น ๆ เวลาที่ $\gamma a \rightarrow \infty$ จะทำให้ค่า $J_0(Ka) = 0$ สมการคุณลักษณะและค่ารากของโหมดแบบ $HE_{1\mu}$ แสดงได้ดังภาพที่ 1.14 จากภาพด้านบนเป็นการพล็อตค่า $J_0(Ka)$ และส่วนด้านล่างเป็นค่า $J_1(Ka)$ ที่สัมพันธ์กับค่า V เพื่อแสดงจุดตัดต่อพของโหมดคลื่นแบบ $HE_{1\mu}$ จากภาพจะเห็นว่าค่ารากของสมการ (1.130) คือ $Ka = 0.0, 3.83, 7.02, 10.2$ ตามลำดับ

รากสมการอันดับแรกคือค่า $Ka = 0.0$ เป็นจุดตัดต่อพของโหมด HE_{11} จากเหตุผลนี้เองทำให้โหมดคลื่น HE_{11} มีความโดดเด่นที่สุด (dominant mode) เมื่อเทียบกับโหมดคลื่นอื่น ๆ ในเส้นใยแก้วนำแสง และถ้าค่า $0 < Ka \leq 2.4$ มีเพียงโหมดคลื่นแบบ HE_{11} โหมดเดียวเท่านั้นที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้ ฉะนั้นเส้นใยนำแสงจะเป็นแบบโหมดเดี่ยวได้ค่า V จะต้องน้อยกว่า 2.4

ถัดมาเป็นการพิจารณาโหมดแบบ EH เป็นโหมดที่สนามไฟฟ้ามีขนาดมากกว่าสนามแม่เหล็กในแนวทิศทางการเคลื่อนที่กรณีนี้คือแนวแกน z จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการ (1.123) กับ $v = v' + 1$ จากสมการ (1.121) $[J_{v+1}(Ka)/KaJ_v(Ka)] + [K_{v+1}(\gamma a)/\gamma aK_v(\gamma a)] = 0$ ถ้าค่า $\gamma a \rightarrow 0$ สมการ (1.121) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$V < 2.4 \quad (1.131)$$

ถัดมาเป็นการพิจารณาโหมดแบบ EH เป็นโหมดที่สนามไฟฟ้ามีขนาดมากกว่าสนามแม่เหล็กในแนวทิศทางการเคลื่อนที่กรณีนี้คือแนวแกน z จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างสมการ (1.123) กับ $v = v' + 1$ จากสมการ (1.121) $[J_{v+1}(Ka)/KaJ_v(Ka)] + [K_{v+1}(\gamma a)/\gamma aK_v(\gamma a)] = 0$ ถ้าค่า $\gamma a \rightarrow 0$ สมการ (1.121) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ $v = v' + 1$

จากสมการ (1.121) $[J_{v+1}(Ka)/KaJ_v(Ka)] + [K_{v+1}(\gamma a)/\gamma aK_v(\gamma a)] = 0$ ถ้าค่า $\gamma a \rightarrow 0$ สมการ (1.121) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$KaJ_v(Ka) = 0 \quad (1.132)$$

ค่ารากสมการ (1.132) ตัวแรกคือ $Ka = 0$ แต่อย่างไรก็ตาม เป็นค่ารากที่จะต้องระมัดระวังในการพิจารณา การประมาณค่า Ka ที่เหมาะสมในกรณีนี้คือการหาค่า $J_v(Ka)$ ที่ค่า Ka น้อยมาก ๆ ใกล้ศูนย์กับตัวแปร v ซึ่งค่าของ $J_v(Ka)$ สามารถประมาณค่าได้ดังสมการ

$$J_v(Ka) = \frac{1}{v!} \left(\frac{Ka}{2} \right)^v \quad (1.133)$$

จากเงื่อนไขของสมการ (1.133) ทำให้สมการคุณลักษณะที่มีโหมดแบบ EH ในพจน์แรกของสมการ (1.121) กลายเป็น

$$\frac{J_{v+1}(Ka)}{KaJ_v(Ka)} = \frac{1}{2(v+1)} \quad (1.134)$$

จากสมการ (1.134) สามารถหาค่าได้ที่ค่า Ka น้อยมาก ๆ ใกล้ศูนย์ ส่วนกรณีที่ค่า $Ka = 0$ เป็นรากสมการที่ไม่พิจารณาหรือแยกออกไปพิจารณาต่างหาก ค่าคัตออฟต่ำสุดคือ $Ka = 3.83$ สำหรับโหมดคลื่นแบบ EH₁₁ และค่าคัตออฟถัดมาคือ $Ka = 5.13$ สำหรับโหมดแบบ EH₂₁ จากสมการ (1.129) ($KaJ_{v-2}(Ka) = 0$) และสมการ (1.132) ($KaJ_v(Ka) = 0$) ค่าคัตออฟของโหมด

แบบ $HE_{v+1,\mu}$ และ $EH_{v-1,\mu}$ มีค่าเท่ากัน เนื่องจากโหมดแบบ HE และ EH มีสมการคุณลักษณะที่เหมือนกัน สามารถพิสูจน์ได้โดยการแทนค่า $v = m + 1$ ลงในสมการ (1.120) และแทนค่า $v = m - 1$ ลงในสมการ (1.121) และย้ายพจน์ที่สองด้านซ้ายมายังด้านขวา ดังสมการ

$$\frac{KaJ_{m+1}(Ka)}{J_m(Ka)} = \frac{\gamma a K_{m+1}(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} \quad (1.135)$$

$$\frac{KaJ_{m-1}(Ka)}{J_m(Ka)} = \frac{\gamma a K_{m-1}(\gamma a)}{K_m(\gamma a)} \quad (1.136)$$

ใช้สูตรการเวียนเกิดเช่นเดียวกับสมการ (1.127) และ (1.128) คือ $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = (2n/x)J_n(x)$ และ $K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) = (2n/x)K_n(x)$ จัดรูปแบบสมการ (1.135) และ (1.136) ใหม่ให้อยู่ในฟอร์ม $J_{m+1}(Ka)$ และ $J_{m+1}(\gamma a)$ แล้วแทนสมการ (1.243) ลงใน (1.244) จะได้สมการคุณลักษณะของโหมดแบบ $HE_{m+1,\mu}$ เหมือนกับ $EH_{m-1,\mu}$ สำหรับเส้นใยนำแสงแบบขั้น (step index) ใช้ทฤษฎีประมาณค่าอย่างอ่อน รูปแบบของโหมดแบบ $HE_{m+1,\mu}$ และ $EH_{m-1,\mu}$ จะมีความใกล้เคียงกับโหมดแบบ $LP_{m,\mu}$

เส้นอะซิมป์โทตของค่า Ka สำหรับโหมดแบบ $HE_{v\mu}$ ในกรณีที $\gamma a \rightarrow \infty$ สามารถหาได้จากสมการ (1.120) และ (1.125) คือ

$$\frac{J_{v-1}(Ka)}{KaJ_v(Ka)} = 0 \quad (1.137)$$

ดังนั้น $J_{v-1}(Ka) = 0 \quad (1.138)$

และเส้นอะซิมป์โทตของค่า Ka สำหรับโหมดแบบ $EH_{v\mu}$ ในกรณีที $\gamma a \rightarrow 0$ สามารถหาได้จากสมการ (1.121) และ (1.125) คือ

$$J_{v+1}(Ka) = 0 \quad (1.139)$$

ค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีรากเป็น (Ka) และเงื่อนไข $\gamma a \rightarrow 0$ และ $\gamma a \rightarrow \infty$ ในเส้นใยนำแสงที่มีค่าดรรชนีการหักเหแบบขั้น (step-index) สรุปได้ดังตารางที่ 1.3

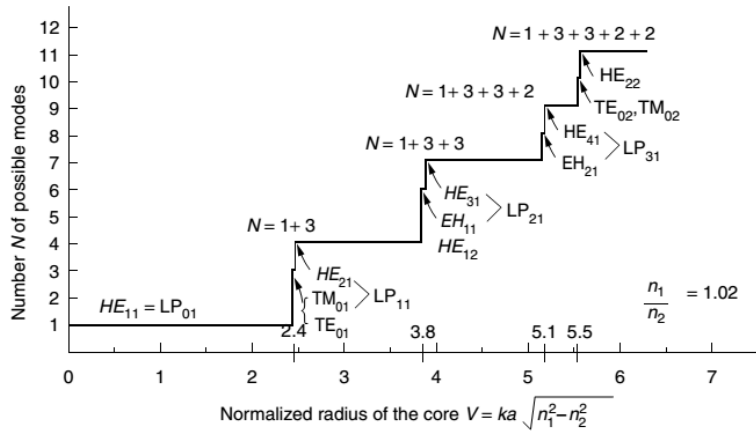
ตารางที่ 1.3 ค่าฟังก์ชันเบสเซลที่มีรากสมการเป็น Ka และเงื่อนไข $\gamma a \rightarrow 0$ และ $\gamma a \rightarrow \infty$

ข้อกำหนด	ชนิดโหมดคลื่น		
	$TE_{0,\mu}, TM_{0,\mu}$	$HE_{v,\mu}$	$EH_{v,\mu}$
Near cutoff $\gamma a \rightarrow 0$	$J_0(Ka) = 0$	$v = 1, J_1(Ka) = 0$ including $Ka = 0$ $v \geq 2, J_{v-2}(Ka) = 0$ except $Ka = 0$	$J_v(Ka) = 0$ except $Ka = 0$
Far from cutoff $\gamma a \rightarrow \infty$	$J_1(Ka) = 0$	$J_{v-1}(Ka) = 0$	$J_{v+1}(Ka) = 0$

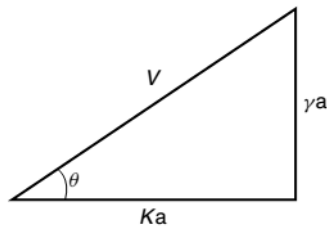
ที่มา (Lizuka, 2002, p. 727)

ค่าความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโหมดที่เป็นไปได้กับค่า V ซึ่งค่า V เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญที่จะกำหนดว่าเส้นใยนำแสงเป็นแบบโหมดเดี่ยวหรือแบบหลายโหมด ถ้าค่า $V < 2.4$ จะเป็นเส้นใยนำแสงแบบโหมดเดี่ยว และถ้าค่า $V > 2.4$ ก็จะเป็นแบบหลายโหมด ความสัมพันธ์ระหว่างค่า V , Ka และ γa ดังสมการ $V^2 = (Ka)^2 + (\gamma a)^2$ จะเห็นว่าเป็นสมการวงกลมรัศมี V หรือ $V = ka\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ จากภาพที่ 1.15 จะเห็นว่าถ้าค่า $0 < V < 2.4$ จะมีเพียงโหมด HE_{11} หรือโหมด LP_{01} ถ้าให้พารามิเตอร์ N คือค่าจำนวนโหมดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้ จะเห็นว่าที่ค่า $0 < V < 2.405$ จำนวนโหมดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้มีเพียง 1 โหมด และถ้าค่า $2.405 < V < 3.83$ จำนวนโหมดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้มี 4 โหมด และเช่นเดียวกันถ้าค่า $3.83 < V < 5.1$ จำนวนโหมดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้มี 7 โหมดตามลำดับ จะสังเกตเห็นว่าเมื่อค่า V มากขึ้นค่าของ γ ก็จะมากขึ้นด้วยจึงส่งผลให้จำนวนโหมดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้มากขึ้นด้วยเช่นกัน

ความสัมพันธ์ระหว่างโหมด HE , EH , TE และ TM สามารถแทนได้ด้วยโหมดคลื่นแบบเชิงเส้น LP (linear mode) แต่โหมดแบบเชิงเส้นเป็นโหมดที่ไม่มีอยู่จริง ยกเว้นโหมดพื้นฐาน (fundamental mode : lowest mode) เนื่องจากความแตกต่างค่าดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิงมีค่าน้อยมาก ($\nabla \ll 1$) แต่สามารถแทนโหมดคลื่น HE , EH , TE และ TM ด้วยโหมดคลื่นแบบเชิงเส้น LP ได้โดยใช้หลักการรวมคลื่นแบบดีเจเนอเรต (degenerating mode) ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโหมดแบบ HE , EH , TE , TM ที่แทนด้วยโหมดคลื่นแบบเชิงเส้น LP แสดงดังภาพที่ 1.15 และตารางที่ 1.3



ภาพที่ 1.15 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโหมดที่เป็นไปได้ N กับค่า V ที่มา (Lizuka, 2002, p. 726)



ภาพที่ 1.16 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า V , Ka และ γa ที่มา (Lizuka, 2002, p. 729)

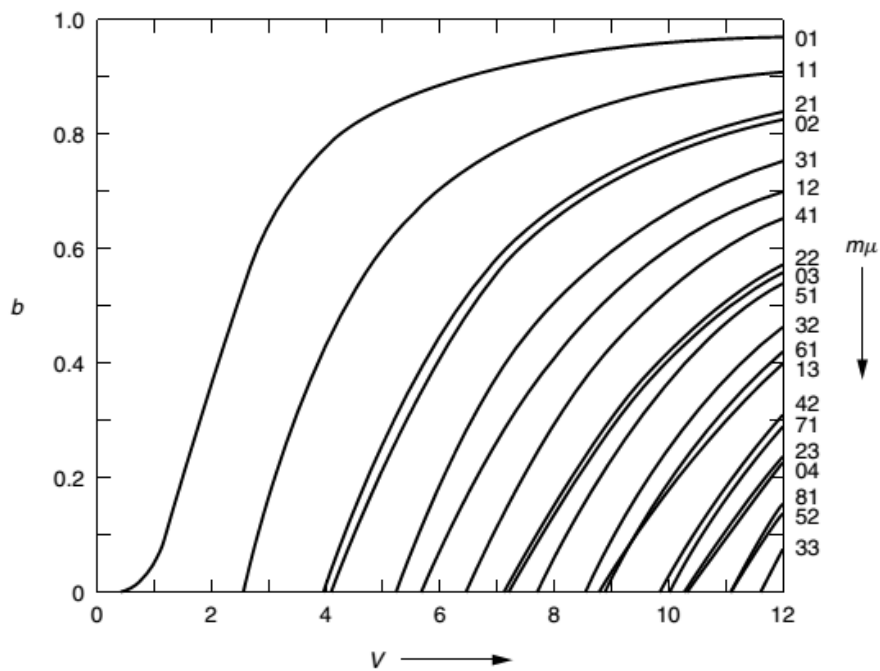
ถ้ากำหนดให้

$$b = (\gamma a / V)^2 \tag{1.140}$$

พารามิเตอร์ b คือค่านอร์มอลไลซ์การแพร่กระคลื่น (normalized propagation parameter) มีค่าระหว่าง $0 < b < 1$ จากสมการ $V^2 = (Ka)^2 + (\gamma a)^2$ ความสัมพันธ์ระหว่างค่า V , Ka และ γa สามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพที่ 1.16 จากภาพค่า $b = \sin^2 \theta$ ค่า Ka ที่คำนวณจากพารามิเตอร์ b และ V คือ

$$Ka = \sqrt{1 - b}V \tag{1.141}$$

โหมดคลื่นแบบ $LP_{m\mu}$ ที่สัมพันธ์กับพารามิเตอร์ b และ V แสดงดังภาพที่ 1.17 จากสมการ $V^2 = (Ka)^2 + (\gamma a)^2$ ค่าคงที่การแพร่กระจายคลื่น (β) ที่คำนวณจากพารามิเตอร์ b คือ



ภาพที่ 1.17 กราฟของ b ที่เป็นฟังก์ชันกับค่า V สำหรับโหมดแบบ $LP_{m\mu}$ ต่าง ๆ
ที่มา (Lizuka, 2002, p. 728)

$$\beta^2 = (n_1 k)^2 [1 - 2\Delta(1 - b)] \quad (1.142)$$

โดยที่

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (1.143)$$

และ

$$2n_1 \cong n_1 + n_2 \quad (1.144)$$

โหมดคลื่นที่มีการโพลาไรซ์เชิงเส้น $LP_{m\mu}$ ที่เกิดจากโหมดคลื่นแบบ HE, EH, TE และ TM ดีเจเนอร์เรตกัน สรุปได้ดังตารางที่ 1.4 จากสมการ (1.142) ใช้คุณสมบัติการแจกแจงแบบไบโนเมียลสามารถประมาณค่าได้ดังสมการ

$$\beta = n_1 k [1 - \Delta(1 - b)] \quad (1.145)$$

ตารางที่ 1.4 โหมดคลื่นแบบ HE, EH, TE, TM ที่แทนด้วยโหมดคลื่นแบบเชิงเส้น

โหมดคลื่นแบบเชิงเส้น	โหมดคลื่นที่แท้จริง
LP_{01}	HE_{11}
LP_{11}	$HE_{21}, TE_{01}, TM_{01}$
LP_{21}	HE_{31}, EH_{11}
LP_{02}	HE_{12}
LP_{31}	HE_{41}, EH_{21}
LP_{12}	$HE_{22}, TE_{02}, TM_{02}$
LP_{lm}	$HE_{2m}, TE_{0m}, TM_{0m}$
$LP_{lm} (l \neq 0 \text{ or } 1)$	$HE_{l+1,m}, EH_{l-1,m}$

ที่มา (Senior & Jamro, 2009, p. 36)

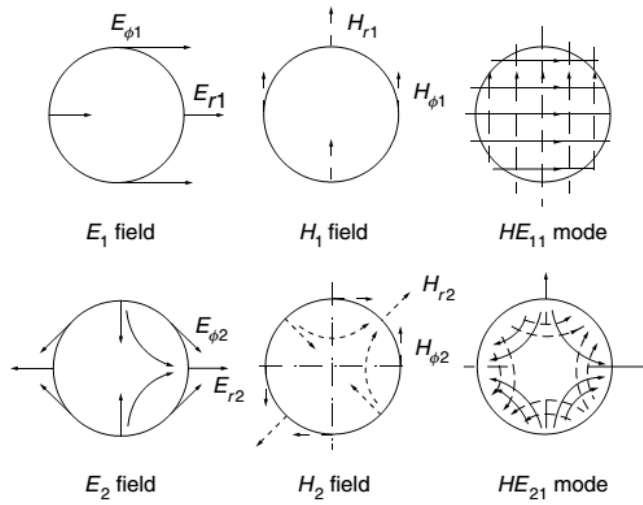
ตัวอย่างรูปแบบการแพร่กระจายคลื่นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าภายในคอร์ที่ค่าดรรชนีการหักเห แบบขั้น (step-index) แสดงดังภาพที่ 1.18 จากภาพเป็นการแสดงทิศทางการแพร่กระจายคลื่นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอก (แกน \hat{r} และ $\hat{\phi}$) ส่วนทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นจะอยู่ในแนวแกน \hat{z} (ทิศทางพุ่งออกจากหน้ากระดาษ) ในระบบพิกัดทรงกระบอก $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ โดยที่ \hat{r} , $\hat{\phi}$ และ \hat{z} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ใช้กำหนดทิศทางคลื่นในแนวแกน \hat{r} , $\hat{\phi}$ และ \hat{z} ตามลำดับ โดยกำหนดให้เส้นทึบแทนสนามไฟฟ้าและเส้นปะแทนสนามแม่เหล็ก ส่วนการรวมกันของคลื่นในโหมดแบบ $HE_{m+1,\mu}$ และ $EH_{m-1,\mu}$ เพื่อกำหนดโหมดคลื่นแบบเชิงเส้น $LP_{m\mu}$ แสดงดังภาพที่ 1.18

โหมดคลื่นแบบเชิงเส้น $LP_{m\mu}$ จะต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกระบอกกับระบบพิกัดฉากเพื่อแปลงองค์ประกอบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอกให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดฉากในแนวแกน x และ y จะเป็นดังสมการ

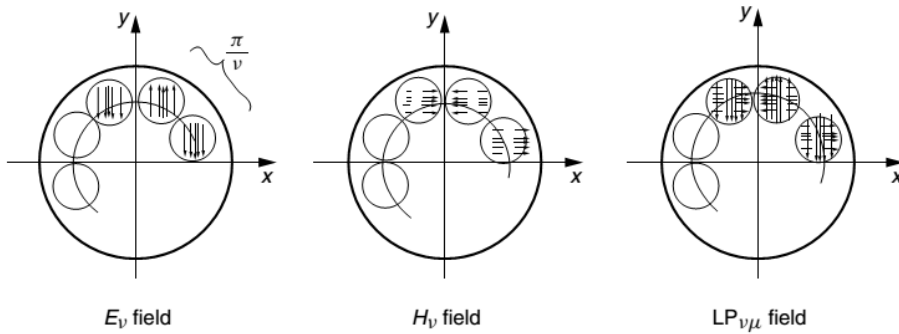
$$E_x = E_r \cos \phi - E_\phi \sin \phi \quad (1.146)$$

และ

$$E_y = E_r \sin \phi - E_\phi \cos \phi \quad (1.147)$$



ภาพที่ 1.18 รูปแบบการแพร่กระจายคลื่นโหมดแบบ HE₁₁ และ HE₂₁ ที่มา (Lizuka, 2002, p. 733)



ภาพที่ 1.19 โหมดแบบเชิงเส้น LP_{vμ} ที่เกิดจากรวมกันระหว่างโหมดคลื่นแบบ HE_{v-1μ} และ EH_{v+1μ} ที่มา (Lizuka, 2002, p. 739)

ในระบบพิกัดฉากประกอบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าจะถูกแทนด้วย HE_{v+1μ} และ EH_{v-1μ} โดยที่ v เป็นค่าจำนวนเต็ม ในระบบพิกัดฉากประกอบสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าคือ

$$\begin{aligned}
 E_x^{HE} &= \cos v\phi, & E_x^{EH} &= -\cos v\phi \\
 E_y^{HE} &= -\sin v\phi, & E_y^{EH} &= -\sin v\phi \\
 H_x^{HE} &= \sin v\phi, & H_x^{EH} &= \sin v\phi \\
 H_y^{HE} &= \cos v\phi, & H_y^{EH} &= -\cos v\phi
 \end{aligned} \tag{1.148}$$

ยกตัวอย่างเช่น การรวมกันระหว่างคลื่นโหมดแบบ $HE_{v-1\mu}$ และ $EH_{v+1\mu}$ ที่มีเฟสเหมือนกัน (in phase) แต่มีค่าแอมพลิจูดต่างกัน รูปแบบการแพร่กระจายคลื่นโหมดแบบเชิงเส้น $LP_{v\mu}$ ดังแสดงในภาพที่ 1.19

ตัวอย่างที่ 1.3 เส้นใยนำแสงมีค่าดัชนีการหักเหของคอร์เท่ากับ 1.50 และมีค่าดัชนีการหักเหของแคลดดิงเท่ากับ 1.47 จงคำนวณหาค่ามุมวิกฤติระหว่างรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิง ค่าช่องรับแสงเชิงตัวเลข (NA) และค่ามุมสูงสุดของคอร์ที่สามารถรับคลื่นแสงได้

วิธีคำนวณ จากสมการ 1.14 ค่ามุมวิกฤติระหว่างรอยต่อระหว่างคอร์กับแคลดดิงจะเป็นดังสมการ

$$\phi_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}$$

เมื่อแทนค่าดัชนีการหักเหของคอร์และแคลดดิงจะได้

$$\phi_c = \sin^{-1} \frac{1.47}{1.50} = 78.5^\circ$$

และค่าช่องรับแสงเชิงตัวเลขสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$NA = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

แทนค่าจะได้

$$NA = (1.50^2 - 1.47^2)^{\frac{1}{2}} = (2.25 - 2.16)^{\frac{1}{2}} = 0.30$$

ส่วนค่ามุมสูงสุดของคอร์ที่สามารถรับคลื่นแสงได้จะเป็นดังสมการ

$$\theta_c = \sin^{-1} NA = \sin^{-1} 0.30 = 17.4^\circ$$

ตัวอย่างที่ 1.4 เส้นใยนำแสงชนิดโหมตร่วมมีค่าเส้นผ่านศูนย์กลางของคอร์เท่ากับ $80 \mu\text{m}$ ค่าความแตกต่างดัชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิงประมาณ 1.5 % และความยาวคลื่นที่ใช้ $0.85 \mu\text{m}$ ถ้าดัชนีการหักเหของคอร์เท่ากับ 1.48 จงหาค่าความถี่มาตรฐาน (normalized frequency) ของเส้นใยนำแสงและจำนวนโหมดคลื่นสูงสุดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้

วิธีคำนวณ จากสมการ 1.141 การคำนวณค่าความถี่มาตรฐานจะใช้สมการ

$$V = Ka \frac{1}{\sqrt{1-b}} = \frac{2\pi}{\lambda} a n_1 \sqrt{2\Delta}$$

เมื่อแทนค่ารัศมีคอร์คือ $80/2=40 \mu\text{m}$ และพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในสมการจะได้

$$V = \frac{2\pi \times 40 \times 10^{-6} \times 1.48}{0.85 \times 10^{-6}} \times \sqrt{(2 \times 0.015)} = 75.8$$

และจำนวนโหมดคลื่น (N) ของเส้นใยนำแสงชนิดโหมตร่วมสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$N \simeq \frac{V^2}{2} = \frac{(75.8)^2}{2} = \frac{5745.6}{2} = 2873$$

ฉะนั้นเส้นใยนำแสงชนิดโหมตร่วมเส้นนี้มีค่า V ประมาณ 76 และจำนวนโหมดคลื่นสูงสุดที่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้ประมาณ 3,000 โหมด

ตัวอย่างที่ 1.5 เส้นใยนำแสงมีค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1.4 โดยมีค่าความแตกต่างดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งประมาณ 1.5 % และความยาวคลื่นที่ใช้ $0.85 \mu\text{m}$ และดรรชนีการหักเหของคอร์เท่ากับ 1.48 ถ้าเส้นใยนำแสงเป็นแบบโหมดเดี่ยวจงหา

1.) ค่ารัศมีของคอร์

2.) ถ้าค่าความแตกต่างดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งลดลง 10 เท่า ค่ารัศมีของคอร์จะเปลี่ยนแปลงอย่างไร

วิธีคำนวณ การคำนวณหาค่ารัศมีคอร์สำหรับเส้นใยนำแสงเป็นแบบโหมดเดี่ยวจะใช้สมการ

$$a = \frac{V\lambda}{2\pi n_1 \sqrt{2\Delta}}$$

เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ลงในสมการจะได้

$$a = \frac{2.4 \times 0.85 \times 10^{-6}}{2\pi \times 1.48 \times \sqrt{(2 \times 0.015)}} = 1.3 \mu\text{m}$$

จะได้ค่ารัศมีคอร์เท่ากับ $1.3 \mu\text{m}$ ฉะนั้นเส้นผ่านศูนย์กลางของคอร์เท่ากับ $2.6 \mu\text{m}$ และในกรณีที่ค่าความแตกต่างดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้งลดลง 10 เท่า ค่ารัศมีคอร์สำหรับเส้นใยนำแสงเป็นแบบโหมดเดี่ยวจะเป็นดังสมการ

$$a = \frac{2.4 \times 0.85 \times 10^{-6}}{2\pi \times 1.48 \times \sqrt{(2 \times 0.0015)}} = 4 \mu\text{m}$$

ฉะนั้นเมื่อลดค่าความแตกต่างดรรชนีการหักเหระหว่างคอร์กับแคลดดิ้ง 10 เท่า ค่ารัศมีคอร์สำหรับเส้นใยนำแสงเป็นแบบโหมดเดี่ยวจะเพิ่มขึ้นจาก $1.3 \mu\text{m}$ เป็น $4 \mu\text{m}$

1.4 บทสรุป

แสงเป็นคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่สูงมากระดับ 10^{14} ถึง 10^{15} เฮิร์ต คุณสมบัติการแพร่กระจายคลื่นแสงเป็นได้ทั้งคลื่นและอนุภาค ปรากฏการคลื่นตกกระทบและสะท้อน การแพร่กระจายคลื่นผ่านตัวกลาง ทฤษฎีคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้ายังคงสามารถใช้อธิบายได้ดี แต่ในบางกรณีเช่น การแทรกสอด การดูดกลืนและการแผ่รังสีสามารถอธิบายได้โดยใช้ทฤษฎีควอนตัม ในอดีตการใช้แสงเป็นคลื่นพาห้ในการส่งสัญญาณข้อมูลผ่านเส้นใยนำแสงยังไม่เป็นที่นิยมมากนัก เนื่องจากอัตราการลดทอนกำลังงานแสงต่อระยะทางและงบประมาณสำหรับติดตั้งระบบที่สูงกว่าเมื่อเทียบกับสายส่งสัญญาณประเภทโลหะตัวนำ

ในปัจจุบันสามารถผลิตเส้นใยนำแสงที่มีอัตราการลดทอนต่อระยะทางที่ต่ำมาก และการพัฒนาเทคโนโลยีด้านอุปกรณ์ออปโตอิเล็กทรอนิกส์มีราคาถูกลงและมีประสิทธิภาพมากขึ้น จึงส่งผลให้

การส่งสัญญาณข้อมูลผ่านเส้นใยนำแสงกำลังได้รับความนิยมอย่างสูง การใช้คลื่นย่านแสงเป็นคลื่นพาห้สัญญาณข้อมูลจะถูกพิจารณาในรูปของพัลส์กำลังงานแสง การอธิบายพฤติกรรมของคลื่นแสงที่เดินทางผ่านเส้นใยนำแสงโดยใช้ทฤษฎีคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบพิกัดท่อไดอิเล็กทริกทรงกลมดูจะเหมาะสมกว่าการใช้ทฤษฎีควอนตัม คลื่นแสงสามารถแพร่กระจายผ่านเส้นใยนำแสงในรูปของกลุ่มคลื่นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่เรียกว่าโหมดส่งผ่าน ส่วนกลุ่มคลื่นสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ไม่สามารถผ่านเส้นใยนำแสงได้เรียกว่าโหมดคัตออฟ

โหมดคลื่นแสงที่ส่งผ่านเส้นใยนำแสงนำแสงจะมี 2 กรณีคือแบบโหมดเดียวกับแบบหลายโหมด ค่าความสามารถของพัลส์แสงที่เดินทางผ่านเส้นใยนำแสงจะขึ้นอยู่กับ ค่าดรรชนีการหักเหของคอร์กับ แคลดดิ้ง ค่ามุมรับคลื่นสูงสุด (θ_c) ค่าความสามารถในการรับแสงสูงสุดเชิงตัวเลขของเส้นใยนำแสง (NA) ค่าหมายเลขวี (V -number) โหมดส่งผ่านและโหมดคัตออฟ สำหรับคุณสมบัติอื่น ๆ ที่สำคัญของเส้นใยนำแสงจะกล่าวในบทต่อไป

1.5 คำถามทบทวน

1. จงอธิบายค่ามุมวิกฤติของรังสีแสงที่ส่งเข้าไปในเส้นใยนำแสงมีลักษณะใด
2. จงหาค่าของดรรชนีหักเหของแสงในน้ำ ถ้ามองวัตถุจากในอากาศเป็นมุม 30 องศา ซึ่งวัตถุตั้งกล่าวอยู่ในน้ำ โดยสามารถเห็นวัตถุตั้งกล่าวในน้ำเป็นมุม 50 องศา (วัดขนาดของมุมจากเส้นแบ่งขอบเขตระหว่างน้ำกับอากาศ)
3. แสงที่เดินทางผ่านเส้นใยนำแสงในลักษณะของ fundamental mode มีลักษณะใด
4. ในทฤษฎีเส้นใยนำแสง V-number หรือ normalized frequency หมายถึงอะไร
5. เส้นใยนำแสงชนิด SI-SM 5/125 ไมครอน มีค่าดรรชนีหักเหของคอร์ 1.465 และมีค่า refractive index difference 1% จงคำนวณหาค่ารัศมีของคอร์
6. จงหาจำนวนโหมดที่แสงสีแดงขนาดความยาวคลื่น 633 nm สามารถเดินทางได้ในเส้นใยนำแสงแบบ Step-Index (SI) 50/125 ที่มี ดรรชนีหักเหของคอร์ 1.45 และดรรชนีหักเหของแคลดดิ้ง 1.445
7. จงคำนวณหาค่ามุมรับแสง (Acceptance angle) ด้านขาเข้าเส้นใยนำแสง เมื่อมีค่าดรรชนีหักเหของคอร์และของแคลดดิ้งเท่ากับ 1.48 และ 1.46 ตามลำดับ
8. จงคำนวณขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นใยนำแสงแบบโหมดเดียวเมื่อมีค่า Numerical aperture เท่ากับ 0.22 สำหรับความยาวคลื่นแสงค่า V-number เท่าไร ที่แบ่งการทำงานของเส้นใยนำแสงระหว่างแบบโหมดเดียวและแบบโหมดร่วม