ข้อสอบกลางภาค

วิชา 6001413, 6002009 และ 6002413 คณิตศาสตร์วิศวกรรม 3 (Engineering Mathematics 3)

โปรแกรมวิชาวิศวกรรมโยธา วิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2556

คำสั่ง ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อ **ทำทุกข้อ** นักศึกษา**สามารถ**นำเอกสารขนาด A-4 ที่เขียนสูตรต่างๆเข้าห้องสอบได้ 1 แผ่นเท่านั้น (ต้องเป็นสูตรที่เขียนด้วยลายมือตนเองเท่านั้น **ห้าม**สำเนาจากเพื่อนโดยเด็ดขาด)
สามารถใช้เครื่องคำนวณได้ **ทุจริตในการสอบปรับตกรายวิชานี้ทันที**
(**ทุกข้อ**ต้องแสดงวิธีคำนวณมาอย่างละเอียด) **คะแนนเต็ม 30 คะแนน**

---

1. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{j} - \hat{k}$ และ $\vec{C} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ จงหาสเกลาร์หรือส่วนประกอบของเวกเตอร์ต่อไปนี้

   1.1 $(3\vec{A} - 4\vec{C}) \cdot (2\hat{i} + 3\vec{A} - 2\vec{B})$

   1.2 $\dfrac{(105\vec{A} + 240\vec{B}) \cdot (105\vec{A} + 204\vec{B})}{\left\|105\vec{A} + 240\vec{B}\right\|^2}$

   1.3 $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} - (\vec{A} + \vec{C}) \cdot \vec{B}$ (3 คะแนน)

2. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j}$ และ $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ จงหาค่า m ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตั้งฉากกัน

   2.2 เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ขนานกัน

   2.3 มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็น $\dfrac{\pi}{6}$ เรเดียน (3 คะแนน)

3. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A} = (2,-1,3)$, $\vec{B} = (0,1,7)$ และ $\vec{C} = (1,4,5)$ จงหาค่า

   3.1 $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

   3.2 $(\vec{A} \times \vec{B}) - 2\vec{C}$

   3.3 $(\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{A} \times \vec{B})$ (3 คะแนน)

4. จงหาสมการของระนาบที่มีจุด (1, 3, 2), (-2, 0, -2) และ (1, 4, 3) อยู่บนระนาบ (1 คะแนน)

5. จงหาระยะทางตั้งฉากระหว่างระนาบที่มีสมการ $3x - 4y + 12z + 4 = 0$ และระนาบที่มีสมการ
   $3x - 4y + 12z - 22 = 0$ (1 คะแนน)

6. ถ้า $f(t)=t^2+3$, $g(t)=2t^3-3t$, $\vec{A}(t)=t\hat{i}-t^2\hat{j}+2t\hat{k}$ และ $\vec{B}(t)=\hat{i}-2t\hat{j}+3t^2\hat{k}$
จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชั่นเชิงเวกเตอร์ และสเกลาร์หรือส่วนประกอบของเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

6.1 $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\times t\vec{B}(t)\right)$

6.2 $\frac{d}{dt}\left(2\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)\right)$

6.3 จงหา $\vec{r}'(t)$ ถ้า $\vec{r}(t)=e^{-t}\hat{i}+e^{2t}\hat{j}$ ที่ $t=\ln 2$ (3 คะแนน)

7. จงหาเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่สัมผัสกับเส้นโค้งที่จุดที่กำหนดให้ ถ้าให้

$\vec{r}(t)=(4\cos t)\hat{i}+(6\sin t)\hat{j}+(2\sin t)\hat{k}$ ที่ $t=\frac{\pi}{4}$ (1 คะแนน)

8. จงหาเวกเตอร์ $\hat{T}$ และ $\hat{N}$ ของเส้นโค้งที่กำหนดให้

$\vec{r}(t)=(4\cos t)\hat{i}+(9\sin t)\hat{j}$ ที่ $t=\frac{\pi}{4}$ (1 คะแนน)

9. จงหาความโค้งและรัศมีความโค้งของเส้นโค้งต่อไปนี้

$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=t$ ที่ t ใดๆ $(-\infty<t<\infty)$ (1 คะแนน)

10. จงหาเวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็วและเวกเตอร์ความเร่งของอนุภาค ถ้ากำหนดสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของเวลา t

$x(t)=e^t$, $y(t)=e^t\sin t$, $z(t)=e^t\cos t$ เมื่อ $0\le t\le 4\pi$ (1 คะแนน)

11. จงหาค่า $\nabla\phi$ ของฟังก์ชั่นเชิงสเกลาร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$\phi(x,y)=y\ln(x+y)$ ที่จุด (-3, 4) (1 คะแนน)

12. จงหาค่า $\nabla_{\hat{T}}\phi$ ที่จุดกำหนดให้ของฟังก์ชั่นต่อไปนี้

$f(x,y,z)=x^2yz+4xz^2$; P(1,–2,1) ; $\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$ (1 คะแนน)

13. จงหาไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{F}$ $(\nabla\cdot\vec{F})$

13.1 $\vec{F}(x,y,z)=\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

13.2 $\vec{F}(x,y,z)=\sin\left(x^2+y^2+z^2\right)\hat{i}+\cos(y+z)\hat{j}$ (2 คะแนน)

14. จงหาเคิร์ลของ $\vec{F}$ $(\nabla \times \vec{F})$

14.1 $\vec{F}(x,y,z) = e^{xy}\hat{i} - \cos y\hat{j} + \sin^2 z\hat{k}$

14.2 $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$ (2 คะแนน)

15. ให้ c เป็นเส้นโค้งซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม $x = t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$ จงหา

$\int (2x + y)dx + (x^2 - y)dy$ (1 คะแนน)

16. จงหาอินทิกรัลเชิงเส้นต่อไปนี้

$\int (x + 2y)dx + (x - y)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x = 2\cos t, y = 4\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ (1 คะแนน)

17. จงหาอินทิกรัลเชิงเส้นในปริภูมิ 3 มิติต่อไปนี้

$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z) = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = \sin t\hat{i} + 3\sin t\hat{j} + \sin^2 t\hat{k}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (1 คะแนน)

18. จงแสดงว่าอินทิกรัลเชิงเส้นในปริภูมิ 3 มิติต่อไปนี้เป็นอิสระของวิถี และหาค่าอินทิกรัลเชิงเส้นนี้ด้วย

$\int 3x^2 yzdx + x^3 zdy + (x^3 y - 4z)dz$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $y = x$ จาก (-1,-1, 1) ไปยัง (1, 1, -1) (1 คะแนน)

19. จงใช้ทฤษฎีของกรีนหาค่าอินทิกรัลเชิงเส้นต่อไปนี้

$\oint_C 2\tan^{-1}(y/x)dx + \ln(x^2 + y^2)dy$

เมื่อ C เป็นวงกลม $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$ (1 คะแนน)

20. จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ช่วยหาค่าอินทิกรัลเชิงพื้นผิวต่อไปนี้

$\iint_S (2x^2 y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}) \cdot \hat{n}\, ds$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวปิดล้อมรูปทรงตันในอัฐมภาค (Quadrant) ที่ 1 ซึ่งกำหนดโดยสมการ $x = 2$, $y^2 + z^2 = 9$ และ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วยภายนอก S (1 คะแนน)