เอกสารประกอบการสอน

รายวิชา คณิตศาสตร์เชิงประยุกต์สำหรับครูอุตสาหกรรมศิลป์

ศุภมาศ ปั้นปัญญา

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

๒๕๕๗

เอกสารประกอบการสอน

รายวิชา คณิตศาสตร์เชิงประยุกต์สำหรับครูอุตสาหกรรมศิลป์

ศุภมาศ ปั้นปัญญา

วศ.ม. (วิศวกรรมเกษตร)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

๒๕๕๗

คำนำ

คณิตศาสตร์เชิงประยุกต์สำหรับครูอุตสาหกรรมศิลป์ เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการคิดคำนวณเชิงตัวเลข การนำข้อมูลมาวิเคราะห์ และการประยุกต์ใช้ในการคำนวณข้อมูลต่างๆ เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาทางวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมเกือบทุกสาขา ปัจจุบันวิชาคณิตศาสตร์มีความสำคัญ และมีบทบาทอย่างมาก เนื่องจากมีการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ เพื่อช่วยในการคำนวณอย่างกว้างขวาง

เอกสารประกอบการสอน “คณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม” เล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อมุ่งหวังให้เป็นตำราที่ง่ายต่อการศึกษา เพื่อให้เข้าใจถึงภาพรวมของทฤษฎีและการประยุกต์ใช้ลิมิตของฟังก์ชัน, ฟังก์ชันต่อเนื่อ, อนุพันธ์, การประยุกต์ของอนุพันธ์, การอินทิเกรต และการประยุกต์ใช้อินทิเกรต เพื่อให้ผู้อ่านสามารถเกิดความเข้าใจได้ง่ายขึ้น

ผู้เขียนขอขอบพระคุณทุกท่านที่ให้กำลังใจ สนับสนุนการเขียน รวมทั้งผู้เกี่ยวข้องทุกท่านที่มีส่วนในตำราเล่มนี้สำเร็จเป็นรูปเล่มได้ ข้อผิดพลาดต่างๆ ผู้เขียนขอน้อมรับและขอบพระคุณล่วงหน้าสำหรับท่านที่ให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นที่จะนำมาปรับปรุงเป็นตำราต่อไป

ศุภมาศ ปั้นปัญญา

อาจารย์ประจำสาขาวิชาอุตสาหกรรมศิลป์

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

๒๕๕๗

สารบัญ

หน้า

คำนำ.....(1)

สารบัญ.....(2)

สารบัญภาพ.....(8)

บทที่ 1 ทฤษฎีลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน.....1

ลิมิต.....1

นิยาม.....2

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต.....4

ลิมิตข้างเดียว.....6

นิยามลิมิตทางขวา.....7

นิยามลิมิตทางซ้าย.....7

ความต่อเนื่อง.....9

ลิมิตอนันต์.....12

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1.....15

แบบฝึกหัด 1.1 ลิมิต.....15

แบบฝึกหัด 1.2 ลิมิตข้างเดียว.....16

แบบฝึกหัด 1.3 ความต่อเนื่อง.....16

แบบฝึกหัด 1.4 ลิมิตอนันต์.....18

บทที่ 2 อนุพันธ์.....19

อนุพันธ์.....19

นิยาม.....19

การหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุด.....20

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต.....24

ทฤษฎีที่ 1.....24

ทฤษฎีที่ 2.....25
ทฤษฎีที่ 3.....26
ทฤษฎีที่ 4.....27
ทฤษฎีที่ 5.....27
ทฤษฎีที่ 6.....28
ทฤษฎีที่ 7.....29
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....29
ทฤษฎีที่ 1.....29
ทฤษฎีที่ 2.....31
ทฤษฎีที่ 3.....31
ทฤษฎีที่ 4.....32
ทฤษฎีที่ 5.....33
ทฤษฎีที่ 6.....34
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2.....35
แบบฝึกหัด 2.1 อนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต.....35
แบบฝึกหัด 2.2 อนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....35
บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์.....37
สมการเชิงอนุพันธ์.....37
นิยาม.....37
อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์.....37
ดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์.....38
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.....38
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....39
สมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง.....39
สมการแยกกันได้หรือสมการแยกตัวแปรได้.....39
สมการเอกพันธ์.....43

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สมการแม่นตรง.....46

สมการเชิงเส้น.....49

การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์.....51

การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ.....51

ปฏิกริยาเคมี.....52

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3.....57

แบบฝึกหัด 3.1 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง.....57

แบบฝึกหัด 3.2 สมการเอกพันธ์.....57

แบบฝึกหัด 3.3 สมการแม่นตรง.....58

แบบฝึกหัด 3.4 สมการเชิงเส้น.....59

แบบฝึกหัด 3.5 การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์.....60

บทที่ 4 ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน.....61

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน.....61

นิยาม.....61

การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด.....66

แนวทางในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด.....66

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4.....70

แบบฝึกหัด 4.1 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์.....70

แบบฝึกหัด 4.2 การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด.....71

บทที่ 5 การอินทิเกรต.....72

การอินทิเกรตเบื้องต้น.....72

สูตรมาตรฐานของอินทิเกรต.....72

ชนิดของอินทิเกรต.....72

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต.....73

สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันชันพีชคณิต.....73

การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร.....77

การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย.....82

การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม.....82

การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง.....86

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน.....88

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5.....92

แบบฝึกหัด 5.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต.....92

แบบฝึกหัด 5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย.....93

แบบฝึกหัด 5.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง.....94

แบบฝึกหัด 5.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ.....94

แบบฝึกหัด 5.5 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน.....95

บรรณานุกรม.....96

บทที่ 1
ทฤษฎีลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัส นั่นคือเรื่องของลิมิต และความต่อเนื่อง ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วยการให้นิยามและความหมาย ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการแสดงวิธีการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชัน และการทดสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุดต่างๆ

1.1 ลิมิต

ในเรื่องของฟังก์ชันโดยทั่วไปนั้นมักจะเป็นการหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งในบางครั้งก็ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันที่บางจุดได้ แต่อย่างไรก็ตามเราอาจให้ความสนใจค่าของฟังก์ชันที่พารามิเตอร์ของฟังก์ชันนั้นมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=2x^2+1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 แล้วค่าของ f (x) เป็นเท่าไร

ใช้วิธีแทนค่า x ที่มีค่าใกล้เคียง 3 ซึ่ง x อาจมีค่าน้อยกว่า 3 หรือ มากกว่า 3 ดังตาราง

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x) = 2x^2 + 1$	17.82	18.8802	18.988002	19.012002	19.1202	20.22

เมื่อ x มีค่าน้อยกว่า 3 เล็กน้อย หรือกล่าวว่า “x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย” แล้วค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 19 (ดังตาราง) และเราจะเรียกค่านี้ว่า “ลิมิตทางซ้ายของ f(x)” และแทนด้วยสัญลักษณ์

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=19$

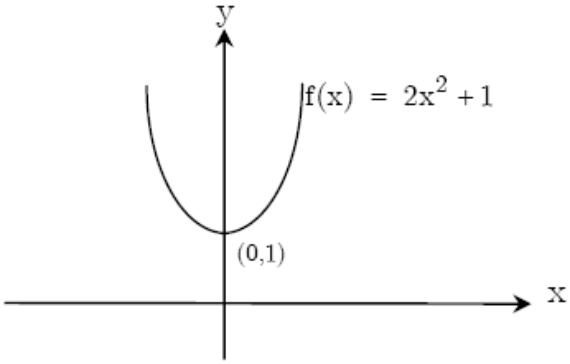
เครื่องหมาย – หมายถึง การเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายเพียงทางเดียว

เมื่อ x มีค่ามากกว่า 3 เล็กน้อย หรือกล่าวว่า “x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา” แล้วค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 19 (ดังตาราง) และเราจะเรียกค่านี้ว่า “ลิมิตทางขวาของ f(x)” และแทนด้วยสัญลักษณ์

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=19$

เครื่องหมาย “+” หมายถึงการเข้าใกล้จากทางด้านขวาเพียงทางเดียว

ดังนั้น เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 แล้วค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 19 หรือกล่าวว่า “ลิมิตของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 คือ 19” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to 3} f(x)=19$ ดังรูป



ภาพที่ 1.1 ฟังก์ชันของลิมิต

1.1.1 นิยาม

ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านที่น้อยกว่า a หรือ ทางซ้ายของ a เรียกค่านั้นว่า "ลิมิตซ้ายของ $f(x)$" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^-} f(x)$

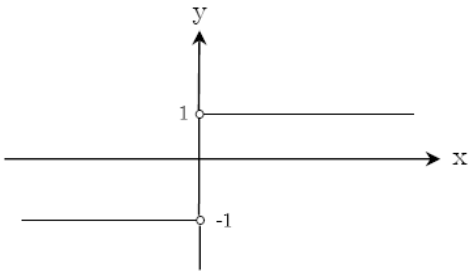
ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านที่มากกว่า a หรือ ทางขวาของ a เรียกค่านั้นว่า "ลิมิตขวาของ $f(x)$" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^+} f(x)$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหาลิมิตของ f(x) เมื่อ $x \to 0$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1; & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1; & x < 0 \end{cases}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$



เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย (x<0) จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ –1คือ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา (x>0) จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 คือ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีลิมิต เพราะว่า เราไม่สามารถสรุปได้ว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าใด

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ จงหา f(5) - f(2)

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x}$$

$$f(5) = \frac{5^3-1}{5} = \frac{124}{5}$$

$$f(2) = \frac{2^3-1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad f(5) - f(2) = \frac{124}{5} - \frac{7}{2} = \frac{213}{10}$$

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ จงหา f(-2) . f(2)

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = \sqrt{x^2-3}$$

$$f(-2) = \sqrt{(-2)^2-3} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1}$$

$$f(2) = \sqrt{2^2-3} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1}$$

$$f(-2) \cdot f(2) = \sqrt{1}.\sqrt{1} = 1$$

1.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตนี้ ให้เฉพาะทฤษฎีบทที่สำคัญๆ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าลิมิตต่างๆ ได้

n เป็นจนวนเต็มบวก k เป็นค่าคงตัว f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิต เมื่อ $x \to 0$

ทบ. 1. $\lim_{x\to a} k = k$ ลิมิตของค่าคงที่คือค่าคงที่

ทบ. 2. $\lim_{x\to a} x = a$

ทบ. 3. $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$

ทบ. 4. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]+[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 5. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]-[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 6. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\cdot[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 7. $\lim_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

ทบ. 8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

ทบ. 9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ ถ้า n เป็นเลขคู่ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$

ภาพที่ 1.2 ทฤษฎีของลิมิต

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to a} 3x+2$ 2. $\lim_{x\to a} x^3+x-3$ 3. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-7}{2x^2+x+3}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กำหนดให้

1. $\lim_{x\to a} 3x+2 = \lim_{x\to a} 3x + \lim_{x\to a} 2$

$= 3\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 2$

$= 3a + 2$

2. $\lim_{x\to a} x^3+x-3 = \lim_{x\to a} x^3 + \lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} 3$

$= a^3 + a - 3$

$$3.\quad \lim_{x\to a}\frac{x^2-7}{2x^2+x+3} = \frac{\lim_{x\to a}(x^2-7)}{\lim_{x\to a}2x^2+x+3}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a}x^2-\lim_{x\to a}7}{2\lim_{x\to a}x^2+\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}3}$$

$$= \frac{a^2-7}{2a^2+a+3}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กำหนดให้หาค่า

1. ในการหา $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ ถ้าแทน x ด้วย 3 จะได้ x^2-2x-3 มีค่าเป็นศูนย์ และ x-3 มีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}x+1 = 4$$

2. การหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ นั้นมีลักษณะเช่นเดียวกับข้อ 1. คือลิมิตอยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ แต่การหาค่าของลิมิตในกรณีนี้ ทำได้โดยการคูณด้วยสังยุค (Conjugate) ของ $\sqrt{x+4}-2$ ทั้งเศษและส่วนดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 5}\left[(x+5)(3x-4)\right]$ 2. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{5x^2-3}{-x^2+1}$

<u>วิธีทำ</u> 1. $\lim\limits_{x \to 5}\left[(x+5)(3x-4)\right] = \left[(5+5)(3(5)-4)\right]$

$$= (10)(11)$$

$$= 110$$

2. $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{5x^2-3}{-x^2+3} = \dfrac{5(2^2)-3}{(-2)^2+3}$

$$= \frac{20-3}{-4+3} = -\frac{17}{3}$$

1.3 ลิมิตข้างเดียว

สามารถแบ่งออกเป็น 2 ระเภท คือ ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา (Left-Hand and Right-Hand Limits)

1.3.1 นิยามลิมิตทางขวา

กำหนด f (x) นิยามบนช่วงเปิด (a, c) โดยที่ c > a และถ้า f (x) มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (a, c) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตขวาที่ a เท่ากับ L และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

1.3.2 นิยามลิมิตทางซ้าย

กำหนด f (x) นิยามบนช่วงเปิด (b, a) โดยที่ b < a และถ้า f (x) มีค่าเข้าใกล้ K เมื่อ x เข้าใกล้ aในช่วง (b, a) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตซ้ายที่ a เท่ากับ K และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = K$$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$

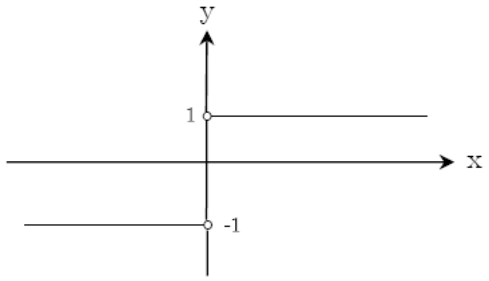
<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+}\dfrac{x}{x}$ เพราะว่า $x > 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{x}{x}$ เพราะว่า $x < 0$

$$\lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

หมายเหตุ:จาก $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ จะเขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย (x<0) จะได้กราฟอยู่ข้างใต้แกน และได้ $f(x)=-1$ นั่นคือ $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$

และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา (x>0) จะได้กราฟอยู่ข้างบนแกน และได้ $f(x)=1$ นั่นคือ $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$

หมายเหตุ : ฟังก์ชัน f อาจจะไม่มีลิมิตที่จุด x = a ด้วยเหตุผลดังนี้

1. ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตทางซ้าย หรือไม่มีลิมิตทางขวาที่จุด x = a

2. ฟังก์ชัน f มีลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาที่จุด x = a แต่ลิมิตทั้งสองไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.8 ให้ $f(x)$ = 4x – 3 จงหา $\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 2^+} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(4x-3)=4(2)-3=8-3=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(4x-3)=4(2)-3=5$$

ตัวอย่างที่ 1.9 ให้ $f(x)$ = | x - 3 | จงหา

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ 2. $\lim_{x\to -3^-} f(x)$, $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(x)$ เป็นค่าสัมบูรณ์ ค่า x ภายในค่าสัมบูรณ์มี 2 ค่า

$$|x|=\begin{cases}+x & ,x\ge 0\\ -x & ,x<0\end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & , x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -(x-3) & , x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} |x-3| = \lim_{x \to 3^-} -(x-3) = -(3-3) = 0$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} |x-3| = \lim_{x \to 3^+} (x-3) = 3-3 = 0$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} |x-3| = \lim_{x \to -3^-} -(x-3) = -(-3-3) = 6$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} |x-3| = \lim_{x \to -3^+} (x-3) = -3-3 = -6$$

1.4 ความต่อเนื่อง

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นจำนวนจริงใดๆฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อเป็นจริงทั้ง 3 ข้อดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ : ถ้าเงื่อนไขข้อใด ข้อหนึ่งขาดไป แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่อง x = a

ตัวอย่างที่ 1.10 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2 - x + 1$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = -2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> $\because f(x) = 2x^2 - x + 1$

<u>หาค่า</u> $f(-2)$

$\because f(2) = 2(-2)^2 - (-2) + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$

หาค่า $\lim_{x \to -2} f(x)$

$$\because \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (2x^2 - x + 1)$$

$$= 2(-2)^2 - (2) + 1$$
$$= 8 + 2 + 1$$
$$= 11$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = 11$

ดังนั้น $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x=-2$ เพราะมีสมบัติครบทั้งสามข้อ

ตัวอย่างที่ 1.11 ถ้า $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & ,x\geq 3 \\ 2x+5 & ,-1\leq x<3 \\ 3x-2 & ,x<-1 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f ต่อเนื่องที่x = – 1 แต่ไม่ต่อเนื่องที่ x =3
2. f ต่อเนื่องที่x = – 1 และ x =3
3. f ไม่ต่อเนื่องที่x = – 1 แต่ต่อเนื่องที่ x =3
4. f ไม่ต่อเนื่องที่x = – 1 และ x =3

<u>วิธีทำ</u> มี 2 จุดที่ต้องพิจารณาคือ x = -1 และ x = 3

พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ x = –1

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

แทนค่า f(-1) = 2(-1) + 5 = 3

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 3x^2=3(-1)^2=3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+5)=2(-1)+5=3$$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x =-1

พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ x = 3

แทนค่า f(3) = 3(3) - 2 = 9 – 2 = 7

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(2x+5)=2(3)+5=6+5=11$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3+}(3x-2)=3(3)-2=9-2=7$$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3

$\therefore$ fต่อเนื่องที่ x = -1 แต่ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3

ตัวอย่างที่ 1.12 ถ้า $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} & ,0<x<1 \\ 1 & ,x=1 \\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} & ,x>1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดถูกและข้อใดผิด

ก. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ข . f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่x = 1

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาความต่อเนื่องที่ x = 1

1. f(1) = 1

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{1}{3(1)+1}=\dfrac{1}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}\times\dfrac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{4-(5-x)}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(2+\sqrt{5-x})}=\frac{1}{(2+\sqrt{5-1})}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

ก. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ถูก

ข . f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่x = 1 ผิด

ตัวอย่างที่ 1.13 ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x>1 \\ x-1 & ,0<x\le 1 \\ 0 & ,x\le 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ เท่าไร

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)$ จาก $x\to 0^-$ จะได้ $x^2\to 0^+$ แสดงว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^2)=\lim_{x^2\to 0^+} f(x^2)=\lim_{x^2\to 0^+}(x^2-1)=0-1=-1$$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ จาก $x\to 1^+$ จะได้ $x-1\to 0^+$ แสดงว่า

$$\lim_{x\to 1^+} f(x-1)=\lim_{(x-1)\to 0^+} f(x-1)=\lim_{(x-1)\to 0^+}\left[(x-1)-1\right]=0-1=-1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ = -1-1 = -2

1.5 ลิมิตอนันต์

ในการพิจารณาขอบเขตของ $f(x)$ บ่อยครั้งที่จำเป็นต้องศึกษาถึงค่าของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นไปจนถึงบวกอนันต์ หรือลดลงจนถึงลบอนันต์ การศึกษาดังกล่าวสามารถทำได้โดยใช้

1.5.1 นิยามการบวกอนันต์

$\lim_{x\to\infty} f(x) = K$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ K (หรือมีค่าลิมิต = K) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้บวกอนันต์

1.5.2 นิยามการลบอนันต์

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ L (หรือมีค่าลิมิต = L) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์

ตัวอย่างที่ 1.14 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty} 7+\frac{3}{x}$ 2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้วิธีการหาค่าเหมือนกับค่า x = a

1. $\lim_{x\to\infty} 7+\frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty} 7 + 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

$= 7 + 0$

$= 7$

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$

$= 4\,(0)\,(0)$

$= 0$

ตัวอย่างที่ 1.15 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+4x-3}{5x^2+7}$ 2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{2x^2-3}$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x-2}{4x+3}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้วิธีการหาค่าเหมือนกับค่า x = a

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+3}{5x^2+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(5+\frac{7}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{2+0+0}{5+0}$$

$$= \frac{2}{5}$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2x^2-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(2-\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}$$

$$= 0$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-2}{4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$= \infty$ (หาค่าไม่ได้)

ตัวอย่างที่ 1.16 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 - 2}{3x^2 + 10x - 100} = ?$ 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 2}{3x^2 + 10x - 100} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{7x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{10x}{x^2} - \frac{100}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{10}{x} - \frac{100}{x^2}}$$

$$= \frac{7 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{7}{3}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2}{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{2}{0 + 0} = \frac{2}{0} = \infty$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

แบบฝึกหัด 1.1

เรื่อง ลิมิต

1.จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้เมื่อ x เข้าใกล้จุด a ที่กำหนดให้

1.1 $f(x)=x^2-5x+3 \quad ;a=1$

1.2 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4} \quad ;a=4$

1.3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x} \quad ;a=0$

1.4 $f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x+3} \quad ;a=-3$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x+1}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

2.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-a}{x^2-a^2}$

3. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$

3.2 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}\right]$

3.3 $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}\right]$

3.4 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x}{\sqrt{x+9}-3}\right]$

3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$

3.6 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right]$

4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-3x}{h}$

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

6. จงใช้นิยามของลิมิต พิสูจน์ว่า

6.1 $\lim\limits_{x\to -1} x^3-x^2=-2$

6.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{5}$

แบบฝึกหัด 1.2

เรื่อง ลิมิตข้างเดียว

จงหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ในกรณีที่ไม่มีลิมิต จงหาลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวา

1. $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{|x|}{x}\right)$

2. $\lim_{x\to 0}|x-1|$

3. $f(x)=\begin{cases} x^3 & ;x\geq 2 \\ 1 & ;x<2 \end{cases}$ $\lim_{x\to 2} f(x)$

4. $f(x)=\begin{cases} -x-7 & ;x<3 \\ x-1 & ;x>-3 \end{cases}$ $\lim_{x\to -3} f(x)$

5. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x-4}$

6. $\lim_{x\to 4} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

แบบฝึกหัด 1.3

เรื่อง ความต่อเนื่อง

1. ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

2. ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$$

3. ฟังก์ชัน $f(x)=|x+1|$ ต่อเนื่องที่ x = -1หรือไม่

4. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} -3/2, & x \leqslant -1 \\ \frac{2x^2+x-1}{2(x+1)}, & -1 < x \leqslant 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

ก. fต่อเนื่องที่ $x=-1$ ข. f ต่อเนื่องที่ $x=1$

5. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3x+1}, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}, & x>1\end{cases}$$

ก. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ข. fเนฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

6. จงหาค่า a ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}3x+a, & x=2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ x = 2

7. ถ้าฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}ax, & x<1\\ 4, & x=1\\ x+b, & x>1\end{cases}$ ต่อเนื่องที่จุดซึ่ง x = 1 แล้ว จงหาค่า a, b

8. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-4x-4}{4-x^2}, x\neq\pm 2$ และ $f(2)=a, f(-2)=b$ แล้ว a และ b มีค่าเท่าไร

แบบฝึกหัด 1.4

เรื่อง ลิมิตอนันต์

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{4x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-2}{3x^2+10x-100}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2-4}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{7x^2-51}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+5}{3x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x-3}{5-x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x-3}{8-5x^3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{7x^2-5}$

บทที่ 2
อนุพันธ์

2.1 อนุพันธ์

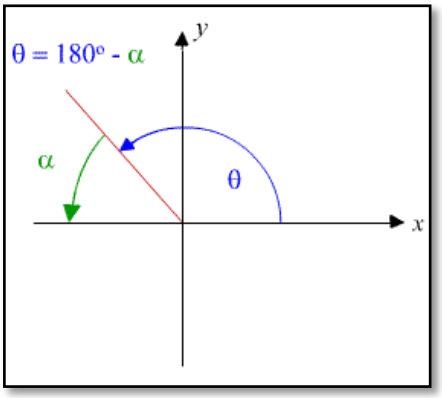
ก่อนจะศึกษาถึงเรื่องอนุพันธ์ ควรศึกษาเกี่ยวกับเรื่องความชัน (slope) ก่อนโดยแบ่งความชันออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ

1. ความชันของเส้นตรง
2. ความชันของเส้นโค้ง

2.1.1 นิยาม

มุมเอียง (angle of inclination) ของเส้นตรง L หมายถึงมุมบวก (คือมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกา) ที่เล็กที่สุดที่วัดจากแกน X ทางด้านบวกไปยังเส้นตรง L

มุมเอียงของเส้นตรง L เราจะเขียนแทนด้วย θ (อ่านว่า ทีตา) ดังนั้น $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$



ภาพที่ 2.1 มุมเอียงของเส้นตรงขนาด $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$

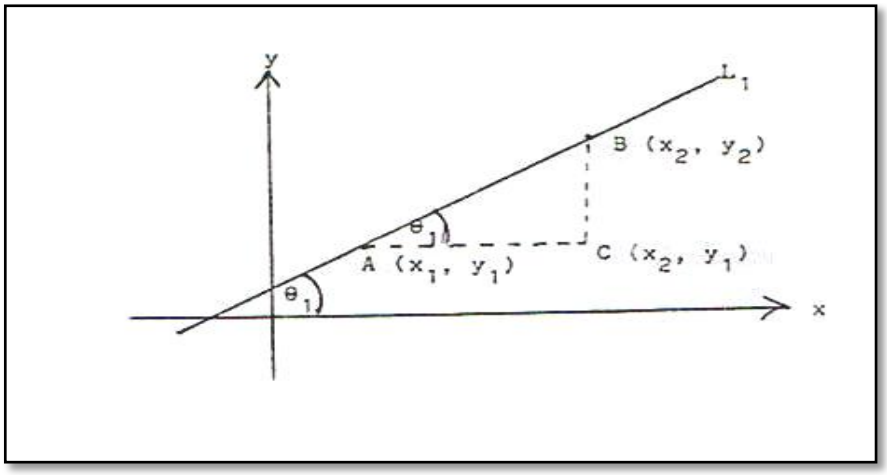
ความชันของเส้นตรง L ที่มีมุมเอียง $\theta \neq 90$ คือค่า tan θ โดยทั่วไปเราจะใช้ m แทนความชัน ดังนั้น

$$m = \tan\theta$$

2.1.2 การหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุด

ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด A (x_1 , y_1) และจุด B (x_2 , y_2) ทำมุม θ_1 กับแกน X ลาก AC ขนานกับแกน X และลาก BC ตั้งฉากกับ AC ที่จุด C ให้ความชันของเส้นตรง $L_1 = m_1$ จะได้ว่า

$$\text{ความชันของ } L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



ภาพที่ 2.2 กราฟแสดงความชันของเส้นตรง L

พิสูจน์ จะให้

$$m = \tan\theta$$

$$= \frac{BC}{AC}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

ในกรณีที่ $x_1 = x_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน y หาความชันของเส้นตรงไม่ได้ จะให้จุดใดแทน (x_1 , y_1) หรือ (x_2 , y_2) ก็ได้ ผลที่ได้จะเท่ากันเสมอ ทั้งนี้เพราะว่า

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (5,3) และ(-3,-2)

<u>วิธีทำ</u> ให้ x_1, y_1 = (5,3) และ x_2, y_2 = (-3,-2)

จะได้ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(-2)-3}{(-3)-5} = \frac{-5}{-8}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรง $= \frac{5}{8}$

ตัวอย่าง 2.2 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (-3,4) และ(2,-5)

<u>วิธีทำ</u> ให้ x_1, y_1 = (-3,4) และ x_2, y_2 = (2,-5)

จะได้ $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(4)-(-5)}{(-3)-2} = \frac{9}{-5}$$

ดังนั้นความชันของเส้นตรง $= \frac{9}{-5}$

ข้อสังเกต

1. เส้นตรงที่เอียงไปทางขวา $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ จะมีค่าความชันเป็นบวก $(m > 0)$
2. เส้นตรงที่เอียงไปทางซ้าย $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ จะมีค่าความชันเป็นลบ $(m < 0)$
3. เส้นตรงที่อยู่ในแนวนอนหรือขนานกับแกน $x(\theta = 0^\circ)$ จะมีค่าความชันเป็นศูนย์$(m = 0)$
4. เส้นตรงที่อยู่ในแนวดิ่งหรือขนานกับแกน $y(\theta = 90^\circ)$ จะหาค่าความชันไม่ได้

ภาพที่ 2.3 เส้นตรง มีค่าความชันเป็นบวก ภาพที่ 2.4 เส้นตรง มีค่าความชันเป็นลบ

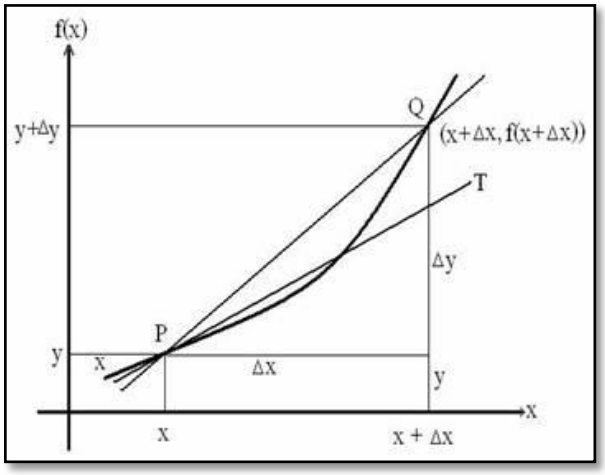
ภาพที่ 2.5 เส้นตรง มีค่าความชันเป็นศูนย์ ภาพที่ 2.6 เส้นตรงหาค่าความชันไม่ได้

2.1.*3* การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

นิยามของอนุพันธ์ กำหนดฟังก์ชัน

$$y = f(x)$$

ถ้า$y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P(x, y) ใดๆ จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) ความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P(x, y) หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P



ภาพที่ 2.7 เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P(x, y)

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $y = x^2 - 4x$ เป็นสมการเส้นโค้ง จงหาความชัน ณ จุด (3, 0) และหาสมการ ของเส้นสัมผัส ณ จุดนั้น

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x) = x^2 - 4x$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 4(x+h)$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h$$

ความชันของเส้นโค้ง $= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2-4x-4h)-(x^2-4x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-4x-4h-x^2+4x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h-4)}{\cancel{h}}$$

แทนค่า h= 0 $= \lim_{h\to 0} 2x + h - 4 = 2x + 0 - 4$

ความชันของเส้นโค้งที่จุด (3, 0) คือ $2(3) + 0 - 4 = 2$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, 0) และมีความชันเท่ากับ 2 คือ $m = \frac{y_{2-}y_1}{x_2-x_1}$

ดังนั้น แทนค่าความชัน = 2 $2 = \frac{y-0}{x-3} = 2(x-3) = y - 0$

$$\therefore y = 2x - 6$$

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนดให้ $y = x^2 + 3x + 2$ จุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง เท่ากับ-1 คือจุดใด

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x) = x^2 + 3x + 2$

$f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h) + 2$

$= x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h + 2$

ความชันของเส้นโค้ง $= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

-1 $= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2+3x+3h+2)-(x^2+3x+2)}{h}$

-1 $= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{3x}+3h+\cancel{2}-\cancel{x^2}-\cancel{3x}-\cancel{2}}{h}$

-1 $= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2+3h}{h}$

-1 $= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h+3)}{\cancel{h}}$

-1 $= \lim_{h\to 0} 2x + h + 3 = 2x + 0 + 3$

-1 $= 2x + 3$

$-1 - 3 = 2x$

X = -2

แทนค่า x = -2 ในสมการ $f(x) = x^2 + 3x + 2$

จะได้ $f(2) = 2^2 + 3(2) + 2$

$f(2) = 0$

ดังนั้นจุดที่มีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ -1 คือ จุด (-2,0)

2.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ในหัวข้อนี้จะทำให้สามารถคำนวณอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้ง่ายขึ้น เราจะใช้ทฤษฎีบทที่สำคัญๆ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ต่อไป

2.2.1 ทฤษฎีที่ 1

ให้ $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า

$$f^{/}(x) = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{นั้นคือ } \frac{dc}{dx} = 0$$

พิสูจน์ จาก $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c-c}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \quad = \quad 0$$

ดังนั้น $f^{/}(x) = \frac{dy}{dx} = 0$

ตัวอย่างที่ 2.5 ให้ $f(x) = 2548$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 1

ให้ $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า

$$f^{/}(x) = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{นั้นคือ } \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{dx}} = 0$$

$$f^{/}(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

2.2.2 ทฤษฎีที่ 2

ให้ $f(x) = u$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ จุด c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ จากให้ $g(u) = cu = cf(x)$

$$g^{/}(u) = \frac{d}{dx}(cu) \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \mathrm{c} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= cf^{/}(x)$$

$$= c\frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 2.6 ให้ $f(x) = 6x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 2

$$f(x) = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

จะได้ว่า $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(6x)}{dx} = 6\frac{dx}{dx} = 6$$

2.2.3 ทฤษฎีที่ 3

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $y = f(x) = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = f^{/}(x) = nx^{n-1}$$

พิสูจน์ จากให้ $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= nx^{n-1}$$

ข้อสังเกต ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และc เป็นค่าคงตัว

จาก ทฤษฎีที่ 2และ ทฤษฎีที่ 3 จะได้ว่า

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 2.7 ให้ $f(x) = x^5$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 3

$$\frac{dy}{dx} = f^{/}(x) = nx^{n-1}$$

จะได้ว่า $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^5)}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

ตัวอย่างที่ 2.8 ให้ $f(x) = 4x^3$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 3

$$\frac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

จะได้ว่า $$\frac{dy}{dx} = 4\frac{dx^3}{dx} = 4x^{3-1} = 4(3x^2) = 12x^2$$

2.2.4 ทฤษฎีที่ 4

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และให้ $w = u + v$ จะได้ว่า wเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 2.9 ให้ $y = x^2 + 5x + 7$ จงหาค่าของ $f^/(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 4

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d(x^2+5x+7)}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d5x}{dx} + \frac{d7}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2x + 5 + 0$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2x + 5$$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{d(x^2+5x+7)}{dx} = 2x + 5$$

2.2. 5 ทฤษฎีที่ 5

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และให้ $w = uv$ จะได้ว่า wเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 2.10 ให้ $y = (x^2 + 1)(2x + 3)$ จงหาค่าของ $f^/(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 5

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

จะได้ว่าให้ u = $(x^2 + 1)$ และv = $(2x + 3)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2 + 1\right)\frac{d(2x+3)}{dx} + (2x + 3)\frac{d\left(x^2+1\right)}{dx}$$

$$= (x^2 + 1)(2 + 0) + (2x + 3)(2x + 0)$$

$$= (x^2 + 1)(2) + (2x + 3)(2x)$$

$$= (2x^2 + 2) + (4x^2 + 6x)$$

$$= (6x^2 + 6x + 2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(2x + 3) = 6x^2 + 6x + 2$$

2.2.6 ทฤษฎีที่ 6

ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x โดยที่ $v(x) \neq 0$ และ$w = \frac{u}{v}$ จะได้ว่า w เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด x และ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ตัวอย่างที่ 2.11 ให้ $y = \frac{x^{2+1}}{2x+3}$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 6

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

จะได้ว่าให้ u = $(x^2 + 1)$ และv = $(2x + 3)$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{dx}} = \frac{(2x+3)\frac{d(x^2+1)}{dx} - (x^2+1)\frac{d(2x+3)}{dx}}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)(2x) - (x^2+1)(2)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(4x^2+6x) - (2x^2+2)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{4x^2+6x-2x^2-2}{(2x+3)^2}$$

$$\therefore y = \frac{x^{2+1}}{2x+3} = \frac{4x^2+6x-2x^2-2}{(2x+3)^2}$$

2.2.7 ทฤษฎีที่ 7

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ โดย $y = f(x) = x^{-n}; x \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 ให้ $y = x^{-3}$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 7

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$$

จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^{-3}}{dx} = -3\,\frac{dx^{-3-1}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$$

$$\therefore y = x^{-3} = -3x^{-4}$$

2.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติมี 6 มิติ คือ $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ ถ้าเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน$\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ได้ จะสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เหลืออีก 4 ฟังก์ชันได้

ความสัมพันธ์ของมุมที่มีหน่วยเป็นองศาและเรเดียน คือ

180 องศา	=	π เรเดียน
1 องศา	=	$\frac{\pi}{180} \approx 0.01745$ เรเดียน
1 เรเดียน	=	$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44''$

2.3.1 ทฤษฎีที่ 1

กำหนดให้ $y = \sin x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

ตัวอย่างที่ 2.13 ให้ $y = \sin 5x$จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin 5x = \cos 5x \frac{d5x}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin 5x = 5 \cos 5x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin 5x = 5 \cos 5x$$

ตัวอย่างที่ 2.14 ให้ $\mathrm{y} = \sin^5 \mathrm{x}$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin^5 \mathrm{x}$$

$$= 5 (\sin x)^4 \frac{d}{dx} \sin x$$

$$= 5 (\sin x)^4 \cos x$$

$$= 5\cos x\, sin^4 x$$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sin^5 \mathrm{x} = 5\cos x\, sin^4 x$$

ตัวอย่างที่ 2.15 ให้ $y = \sqrt{\sin x^5}$จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u> จาก

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \sin u \quad = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{\sin x^5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x^5)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin x^5)^{\frac{-1}{2}} \frac{d}{dx}(\sin x^5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin x^5)^{\frac{-1}{2}} 5x^4(\cos x^5)$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{5x^4(\cos x^5)}{2\sqrt{\sin x^5}}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \sqrt{\sin x^5} = \frac{5x^4(\cos x^5)}{2\sqrt{\sin x^5}}$$

2.3.2 ทฤษฎีที่ 2

กำหนดให้ $y = \cos x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos x = -\sin \mathrm{u} \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

ตัวอย่างที่ 2.16 ให้ $y = \cos 2x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos x = -\sin \mathrm{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos 2x = -\sin 2x \frac{d2x}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \cos 2x = -2\sin 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos 2x = -2\sin 2x$$

ตัวอย่างที่ 2.17 ให้ $y = 3\cos 2x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cos x = -\sin \mathrm{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}3\cos 2x = -3\sin 2x\frac{d2x}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}3\cos 2x = 2(-3\sin 2x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\cos 2x = -6\sin 2x$$

2.3.3 ทฤษฎีที่ 3

กำหนดให้ $y = \tan x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\tan \mathrm{u} = \sec^2 \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

ดังนั้น $$\frac{d\ tan\ x}{dx} = \sec^2 x$$

ตัวอย่างที่ 2.18 ให้ $y = \tan 3x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\tan \mathrm{u} = \sec^2 \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\tan 3x = \sec^2 3\mathrm{x}\frac{\mathrm{d3x}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\tan 3x = 3\sec^2 3\mathrm{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = tan\,3x = 3\sec^2 3\mathrm{x}$$

ตัวอย่างที่ 2.19 ให้ $y = \sqrt{\tan 5x}$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\tan \mathrm{u} = \sec^2 \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\tan 5x} = \frac{d}{dx}(\tan 5x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\tan 5x} = \frac{1}{2}(\tan 5x)^{\frac{-1}{2}}\frac{dtan\ 5x}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\tan 5x} = 5(\frac{1}{2}(\tan 5x))^{\frac{-1}{2}}sec^2 5x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{\tan 5x} = \frac{5\sec^2 5x}{2\sqrt{\tan\ 5x}}$$

2.3.4 ทฤษฎีที่ 4

กำหนดให้ $y = \cot x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cot \mathrm{u} = -\mathrm{cosec}^2\,\mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

ดังนั้น $$\frac{d\cot x}{dx} = -\mathrm{cosec}^2\,x$$

ตัวอย่างที่ 2.20 ให้ $y = \cot 2x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cot \mathrm{u} = -\mathrm{cosec}^2\,\mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cot 2\mathrm{x} = \frac{d}{dx}\cot 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cot 2\mathrm{x} = -\mathrm{cosec}^2 2\mathrm{x}\frac{d}{dx}2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\cot 2\mathrm{x} = -2\mathrm{cosec}^2 2\mathrm{x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \cot 2x = -2\mathrm{cosec}^2 2\mathrm{x}$$

2.3.5 ทฤษฎีที่ 5

กำหนดให้ $y = \sec x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sec \mathrm{u} = sec\,\mathrm{u}\ \tan \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

ดังนั้น $$\frac{d\sec x}{dx} = \sec x \tan x$$

ตัวอย่างที่ 2.21 ให้ $y = \sqrt{\sec x}$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sec \mathrm{u} = sec\,\mathrm{u}\ \tan \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{d\sec x}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\sec x} = \frac{d}{dx}(\sec x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\sec \mathrm{x}} = \frac{1}{2}\sec x^{\frac{-1}{2}}\frac{dsec\ x}{dx}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sqrt{\sec \mathrm{x}} = (\frac{1}{2}\sec x)^{\frac{-1}{2}}\sec x \tan x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \sqrt{\sec \mathrm{x}} = \frac{(\sec x^{\frac{1}{2}})\tan x}{2}$$

2.3.6 ทฤษฎีที่ 6

กำหนดให้ $y = \operatorname{cosec} x$ ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x

จะได้ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{cosec} \mathrm{u} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} \ \cot \mathrm{u} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

ดังนั้น $$\frac{d \operatorname{cosec} \ x}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

ตัวอย่างที่ 2.22 ให้ $y = cosec 2x$ จงหาค่าของ $f^{/}(x)$ หรือ $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \operatorname{cosec} \mathrm{u} = -\mathrm{co}\, sec\, \mathrm{u} \ \cot \mathrm{u} \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}$$

$$\frac{d \operatorname{cosec} \ x}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} cosec\ 2x \quad = \frac{d}{d2x} cosec\ 2x.2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} cosec\ 2x \quad = -2\, cosec\ 2x cot\ 2x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} cosec\ 2x \quad = -2\, cosec\ 2x cot\ 2x$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} cosec\ 2x \quad = -2\, cosec\ 2x cot\ 2x$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่2

แบบฝึกหัด 2.1

เรื่อง อนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต

จงหาหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1 .$y = x^2 - 5x + 2$ 2. $y = x^{-3} - 2x^{-5} + 3x^{-22}$

3. $y = \frac{2x^3+3x^2-5}{x^3}$ 4. $y = x^2 - 3x + \sqrt{x}$

5 .$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{2}{5}}$ 6. $y = (x^2 - 2x)(5x + 3)$

7. $y = \frac{x^3+2x}{1-x^2}$ 8. $y = \frac{x-1}{x+1}(2x - 3)$

9..$y = (5x^2 - 3x - 7)^2$ 10. $y = (2x + 3x^{-1})^2$

แบบฝึกหัด 2.2

เรื่อง อนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.

บทที่ 3

สมการเชิงอนุพันธ์

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์

3.1.1 นิยาม

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

1) $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$

2) $(y')^2 - y' + 2x = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6xy = 0$

4) $y' - 2x\sqrt{1+2y''} = 0$

5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3.1.2 อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์

อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏอยู่ในสมการเช่น

1. $y'' + (y')^2 = 2xy$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง เพราะว่า อันดับที่สูง ที่สุดของอนุพันธ์ คือ 2

2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = 2x^2y^3\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สามเพราะว่า อันดับที่สูงที่สุดของอนุพันธ์ คือ 3

3. $(y')^4 - (y')^3 - 2xy' = 1$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เพราะว่า อันดับที่สูงที่สุดของอนุพันธ์ คือ 1

3.1.3 ดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับต่างๆ โดยจัดให้มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด จะเรียกเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับที่สูงที่สุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้นว่า ดีกรี (degree) เช่น

1. $\frac{dy}{dx}-2xy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง ดีกรีหนึ่ง

2. $(y'')^2-(y')^3=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสอง ดีกรีสอง

3. $x^2y\cdot\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสาม ดีกรีหนึ่ง

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสอง ดีกรีสาม

เพราะว่า จาก $\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}$ ยกกำลังสามทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}\right)^3 \qquad = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=1-x\frac{dy}{dx}$$

5. $\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}=\sqrt{(y''-1)^3}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสาม ดีกรีเก้า

เพราะว่า จาก $\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}=\sqrt{(y''-1)^3}$ ยกกำลังหกทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\left(\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}\right)^6=\left(\sqrt{(y''-1)^3}\right)^6$$

$$\left((1-y\cdot y'')^2\right)^2=\left(\sqrt{(y''-1)^3}\right)^3$$

$$(1-y\cdot y'')^4=(y''-1)^9$$

3.1.4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเพียงตัวแปรเดียว (Ordinary differential equations) เช่น

1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-xy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2) $(y''')^3-2y''+y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

3.1.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวแปร (Partial differential equations) เช่น

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3xy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

3.2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งที่พิจารณาในบทนี้ หมายถึง สมการที่เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

ตัวอย่างที่ 3.1 สมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+y}$ สามารถเขียนอยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์เป็น

$$2ydx - (x+y)dy = 0$$

สมการอันดับหนึ่ง (first order equations) แบ่งเป็นประเภทต่างๆ โดยอาศัยรูปแบบของสมการ ซึ่งจะทำให้สามารถบอกวิธีการแก้สมการได้ง่าย แบ่งได้ดังนี้ คือ

1. สมการแยกกันได้หรือสมการแยกตัวแปรได้ (separable equations)
2. สมการเอกพันธุ์ (homogeneous equations)
3. สมการแม่นตรง (exact equations)
4. สมการเชิงเส้น (linear equations)

สมการแต่ละประเภทจะมีวิธีการหาผลเฉลยแตกต่างกันออกไป ดังต่อไปนี้

3.2.1 สมการแยกกันได้หรือสมการแยกตัวแปรได้

สามารถให้บทนิยามของสมการที่แยกตัวแปรได้ ดังนี้ คือ

$$\boxed{F(x) + G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0}$$

หมายเหตุ : ผลเฉลยของ $F(x)dx + G(y)dy = 0$ หาจาก $\int F(x)dx + \int G(y)dy = c$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์แบบที่สามารถแยกตัวแปรได้ เช่น

1. $2x+1+\left(y^2-3\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ จะเห็นว่า $F\left(x\right)=2x+1$ และ $G\left(y\right)=y^2-3$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin 2x}{\cos y^2+1}$ ซึ่งสามารถจัดรูปของสมการได้เป็น

$$\left(\cos y^2+1\right)\frac{dy}{dx}=\sin 2x$$

$$-\sin 2x+\left(\cos y^2+1\right)\frac{dy}{dx}=0$$

ซึ่งจะเห็นว่า $F\left(x\right)=-\sin 2x$ และ $G\left(y\right)=\cos y^2+1$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถแยกตัวแปรได มีหลักการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้ คือ จากสมการ $F\left(x\right)+G\left(y\right)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ สามารถเขียนได้ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ ได้ว่า

$$F\left(x\right)dx=-G\left(y\right)dy \qquad \text{หรือ} \qquad F\left(x\right)dx+G\left(y\right)dy=0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int F\left(x\right)dx=\int -G\left(y\right)dy \quad \text{หรือ} \qquad \int F\left(x\right)dx+\int G\left(y\right)dy=c$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงแก้สมการ $2x^2+\left(y-1\right)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F\left(x\right)dx+G\left(y\right)dy=0$ จะได้ว่า

$$2x^2dx+(y-1)dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int 2x^2dx+\int (y-1)dy = 0$$

$$\frac{2x^3}{3}+\frac{y^2}{2}-y = c_1$$

$$4x^3+3y^2-6y = c$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $4x^3+3y^2-6y = c$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-x+1}{3y^2-2y}$ $,y\left(0\right)=1$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F\left(x\right)dx+G\left(y\right)dy=0$ จะได้ว่า

$$(3x^2 - x + 1)dx - (3y^2 - 2y)dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int(3x^2 - x + 1)dx - \int(3y^2 - 2y)dy = c_1$$

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + x - (y^3 - y^2) = c_1$$

$$2x^3 - x^2 + 2x - 2y^3 + 2y^2 = c$$

เนื่องจาก $y(0) = 1$ นั่นคือ ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 1$

แทนค่าจะได้ว่า $2(0)^3 - (0)^2 + 2(0) - 2(1)^3 + 2(1)^2 = c$ นั่นคือ $c = 0$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $2x^3 - x^2 + 2x - 2y^3 + 2y^2 = 0$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงแก้สมการ $5(1-y^2)dx - 2xydy = 0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$ จะได้ว่า

จากสมการ $5(1-y^2)dx - 2xydy = 0$ นำ $1-y^2$ หารทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{5}{x}dx - \frac{2y}{1-y^2}dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int\frac{5}{x}dx - \int\frac{2y}{1-y^2}dy = c_1$$

$$5\ln|x| + \ln|1-y^2| = c_1$$

หรือ

$$\ln x^5 + \ln(1-y^2) = c_1$$

$$\ln x^5(1-y^2) = c_1$$

$$x^5(1-y^2) = e^{c_1} = c$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $x^5(1-y^2) = c$

ในการแก้สมการแยกตัวแปรได้นั้น จะเห็นว่าฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยจะเป็นฟังก์ชันที่ แตกต่างกันออกไป เช่น ผลเฉลยที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ, ฟังก์ชันลอการิทึม หรือฟังก์ชันอดิศัย

ตัวอย่างที่ 3.5 จงแก้สมการ $xdx - y^2dy = 0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$ แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง

จะได้ว่า $\int x dx - \int y^2 dy = c_1$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c_1$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 3c_1$$

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - c\right)^{\frac{1}{3}}$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = \left(\frac{3x^2}{2} - c\right)^{\frac{1}{3}}$

ตัวอย่างที่ 3.6 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = y^2 x^3$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$

จะได้ว่า $x^3 dx - \frac{1}{y^2} dy = 0$

แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\int x^3 dx - \int y^{-2} dy = c$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{y} = c$$

$$y = \frac{-4}{x^4 - 4c} \text{ หรือ } y = \frac{-4}{x^4 + c}$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = \frac{-4}{x^4 + c}$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงแก้สมการ $y' = 5y$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$

จาก $\frac{dy}{dx} = 5y$ หรือ $\frac{dy}{y} - 5dx = 0$

แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\int 5dx - \int \frac{dy}{y} = c_1$$

$$5x - \ln|y| = c_1$$

เขียนสมการผลเฉลยในรูปสมการชัดแจ้งจะได้ว่า $\ln|y| = 5x - c_1$

$$|y| = e^{5x-c_1}$$

$$y = ce^{5x}$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = ce^{5x}$

3.2.2 สมการเอกพันธ์

สมการเอกพันธุ์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีลักษณะเฉพาะตัว แต่ก่อนที่จะศึกษาการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบสมการเอกพันธุ์ จะต้องให้บทนิยามของฟังก์ชันเอกพันธุ์ก่อนดังนี้ **หมายเหตุ :**ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์หาได้จาก การแปลงให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ โดยกำหนด $y = vx$ และเปลี่ยนตัวแปร

1. ฟังก์ชัน f (x,y) ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n ถ้า

$$\boxed{f(kx,ky) = k^n f(x,y)}$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงพิจารณาฟังก์ชันเอกพันธ์ $f(x,y) = 2x^4 - x^3y$

วิธีทำ จากฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n สมการ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

จากฟังก์ชัน $f(x,y) = 2x^4 - x^3y$

$$f(kx,ky) = 2(kx)^4 - (kx)^3(ky)$$

$$= 2k^4x^4 - k^4x^3y$$

$$= k^4(2x^4 - x^3y)$$

$$= k^4f(x,y)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x,y) = 2x^4 - x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 4

ตัวอย่างที่ 3.9 จงพิจารณาฟังก์ชันเอกพันธ์ $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$

วิธีทำ จากฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n สมการ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

จากฟังก์ชัน $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$

$$h(kx,ky) = \frac{(ky)^2}{kx}$$

$$= \frac{ky^2}{x}$$

$$= kh(x,y)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 1

2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0$ ถ้า สมการเอกพันธุ์ ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรีเดียวกัน

จากสมการ $M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0$

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

และถ้ากำหนดให้ $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ดังนั้นจะได้ว่า $y' = f(x,y)$ หรืออาจจะ

กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y' = f(x,y)$ หรือ $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

จะเป็นสมการเอกพันธุ์ ถ้า $f(kx,ky) = f(x,y)$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ เป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

จากสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$

$$f(kx,ky) = \frac{(ky)^2}{kx}$$

$$= \frac{k^2y^2}{kx}$$

$$= \frac{ky^2}{x}$$

$$= kf(x,y) \neq f(x,y)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

ตัวอย่างที่ 3.11 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ ว่าเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y' = f(x,y)$

จากสมการ $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$

ดังนั้น $f(kx,ty) = \frac{(kx)^2+(ky)^2}{(kx)(ky)}$

$$= \frac{k^2(x^2+y^2)}{k^2(xy)}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$= f(x,y)$$

ดังนั้น $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ เป็นสมการเอกพันธุ์

ตัวอย่างที่ 3.12 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$ ว่าเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y' = f(x,y)$

จากสมการ $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$

$$f(kx,ky) = \frac{2(ky)^4 + (kx)^4}{(kx)(ky)^3}$$

$$= \frac{k^4(2y^4 + x^4)}{k^4(xy^3)}$$

$$= \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$ เป็นสมการเอกพันธุ์

3.2.3 สมการแม่นตรง

สมการแม่นตรงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีลักษณะเฉพาะตัว ซึ่งสามารถให้บทนิยามได้ดังนี้คือ

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ เ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

หมายเหตุ: ผลเฉลยของสมการแม่นตรง คือ $F(x,y) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 3.13 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $2xydx + (1+x^2)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

จากสมการ $2xydx + (1+x^2)dy = 0$ จะได้ว่า

$M(x,y) = 2xy$ ดังนั้น $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x$

และ $N(x,y) = 1 + x^2$ ดังนั้น $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

จะเห็นว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แสดงว่าสมการ

$\therefore 2xydx + (1+x^2)dy = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 3.14 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $(x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง หรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$M(x,y) = x+\sin y \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x+\sin y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\sin y)$$

$$= 0+\cos y$$

$$= \cos y$$

ในทำนองเดียวกัน $N(x,y) = x\cos y-2y$ ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y-2y)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y)-\frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

$$= \left(x\frac{\partial}{\partial x}(\cos y)+(\cos y)\frac{\partial x}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(2y)$$

$$= \cos y$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ หรือ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore (x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 3.15 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $\sin x\cdot\cos ydx-\sin y\cdot\cos xdy=0$ เป็นสมการแม่นตรง หรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$M(x,y) = \sin x\cos y$$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x(-\sin y) = -\sin x\sin y$

และ $N(x,y) = -\sin y\cos x$

ดังนั้น $\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y(-\sin x) = \sin x\sin y$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่า $\sin x\cdot\cos ydx-\sin y\cdot\cos xdy = 0$

$\therefore \sin x \cdot \cos y dx - \sin y \cdot \cos x dy = 0$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง

สำหรับกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้อยู่ในรูป (บรอนสัน. 2542)

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ แต่ไม่เป็นสมการแม่นตรง นั่นคือ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ การหาผลเฉลยจะทำเหมือนกับการหาผลเฉลยของสมการแม่ตรงไม่ได้สามารถจัดสมการที่กำหนดให้เป็นสมการแม่นตรงได้ โดยการหาฟังก์ชันที่เหมาะสมมาคูณสมการ แล้วทำให้สมการกลายเป็นสมการแม่นตรง และสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นได้เราเรียกว่า ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu(x,y)$ หรือ ตัวประกอบปริพันธ์ $I(x,y)$

การหาผลเฉลยตัวประกอบอินทิเกรต สามารถหาได้ดังนี้ คือ

ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ไม่มีตัวแปร y แล้ว $\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx}$

ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ ไม่มีตัวแปร x แล้ว $\mu = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy}$

ตัวอย่างที่ 3.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(3x + 2y^2)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y) = 3x + 2y^2$ และ $N(x,y) = 2xy$

พบว่า $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$

พบว่า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}(4y - 2y) = \frac{1}{x}$

ดังนั้น $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ell n|x|} = |x|$

ใช้ $\mu = x$ คูณทั้งสมการเชิงอนุพันธ์

จะได้สมการแม่นตรง $(3x^2+2xy^2)dx + 2x^2ydy = 0$

ดังนั้น $(3x^2+2xy^2)dx + 2x^2ydy = 3x^2dx + (2xy^2dx+2x^2ydy)$

$$= d(x^3) + d(x^2y^2)$$

$$= d(x^3+x^2y^2)$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $x^3+x^2y^2 = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 3.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $\left(x^2+y^2+1\right)dx+x\left(x-2y\right)dy=0$

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$

จัดรูปเป็น $(\cos y)dx + (1+x\sin y)dy = 0$

$M(x,y) = \cos y$ และ $N(x,y) = 1+x\sin y$

พบว่า $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -\sin y$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \sin y$

พบว่า $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{\cos y}(\sin y - (-\sin y)) = 2\tan y$

ดังนั้น $\mu = e^{\int 2\tan y\, dy} = e^{2\ln|\sec y|} = e^{\ln|\sec y|^2} = \sec^2 y$

ใช้ $\mu = \sec^2 y$ คูณทั้งสมการเชิงอนุพันธ์

3.2.4 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น คือสมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\boxed{y' + p(x)y = r(x)}$$

กรณีที่ $r\left(x\right)=0$ จะเรียกว่าเป็น homogeneous

กรณีที่ $r\left(x\right)\neq 0$ จะเรียกว่าเป็น nonhomogeneous

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นสามารถคำนวณได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u>. $r\left(x\right)=0$ $\qquad y'+p\left(x\right)y=r\left(x\right)$

ทำการแยกตัวแปร จะได้ $\dfrac{dy}{y}=-p\left(x\right)dx$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c$$

คำตอบทั่วไปคือ $$\boxed{y(x) = ce^{-\int p(x)dx}}$$

หมายเหตุ : ถ้าเลือกค่า $c = 0$ จะได้คำตอบ $y(x) = 0$ ซึ่งเป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

<u>กรณีที่ 2</u>. $r(x) \neq 0$ จัดรูปสมการเพื่อหาตัวประกอบอินทิเกรต

จะได้ว่า $F(x) = e^{\int pdx}$ เป็นตัวประกอบการอินทิเกรต

คำตอบทั่วไปคือ $$\boxed{y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]}$$

ตัวอย่างที่ 3.18 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป $$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]$$

จัดรูปสมการใหม่ ได้ $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$

ดังนั้น $$\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

ดังนั้นผลเฉลยคือ $$y = e^{\ln x}\left(\int \frac{1}{x}\left(x^2 + 3x - 2\right)dx\right) + C\ )$$

$$= x\left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ \ln\ x + C\right)$$

$$= \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x + Cx$$

ตัวอย่างที่ 3.19 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป $$y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]$$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\} \\
&= e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx + c\right] \\
&= e^{-x^2}\left[2e^{x^2} + c\right] \\
&= 2 + C\,e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

3.3 การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์

3.3.1 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

ณ เวลา t ใดๆ หากนำวัตถุที่มีอุณหภูมิ x ใส่ลงไปในตัวกลางที่มีอุณหภูมิ T จะได้

$$\frac{dx}{dt} = k(T-x) \quad \text{เมื่อ } k>0$$

ตัวอย่างที่ 3.20 หากนำเทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิภายในห้องได้ $75°F$ ออกมาข้างนอกห้อง พบว่าหลังจากนำออกมา 5 นาทีเทอร์โมมิเตอร์อ่านอุณหภูมิได้ $65°F$ และอีก 5 นาทีต่อมาเทอร์โมมิเตอร์อ่านอุณหภูมิได้ $60°F$ จงหาอุณหภูมิภายนอกห้อง

วิธีทำ จากสมการ $\frac{dx}{dy} = k(T-x), \quad k>0$

ให้ x แทน อุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ ณ เวลา t ใดๆ

และ T แทน อุณหภูมิภายนอกห้อง

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = k(T-x)$ เมื่อ $k>0$

จะได้ว่า $\frac{1}{T-x}dx = kdt$

นั่นคือ $\int \frac{1}{T-x}dx = \int kdt$

ดังนั้น $-\ell n|T-x| = kt + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ $T-x = C_1e^{-kt}$ เมื่อ C_1 เป็นค่าคงตัว

ถ้าแทน $t=0$ และ $x=75$ จะได้ว่า $T-75 = C_1$

ถ้าแทน $t=5$ และ $x=65$ จะได้ว่า $T-65 = C_1e^{-5k} = (T-75)e^{-5k}$

นั่นคือ $e^{-5k} = \frac{T-65}{T-75}$

ถ้าแทน $t=10$ และ $x=60$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T-60 &= C_1e^{-10k} \\ &= C_1\left(e^{-5k}\right)^2 \\ &= (T-75)\left(e^{-5k}\right)^2 \\ &= (T-75)\left(\frac{T-65}{T-75}\right)^2 \\ &= \frac{(T-65)^2}{T-75} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(T-60)(T-75) = (T-65)^2$

ดังนั้น $T^2-135T+4500 = T^2-130T+4225$

ดังนั้น $-5T = -275$

นั่นคือ $T = 55$

สรุปว่า อุณหภูมิภายนอกห้อง คือ 55°F

3.3.2 ปฏิกริยาเคมี

<u>กรณีเปลี่ยนแปลงจากสารชนิดหนึ่งไปเป็นสารอีกชนิดหนึ่ง</u>

ให้ x แทนปริมาณสาร A ที่ยังไม่เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B ณ เวลา t ใดๆ

จะได้ว่า $$\boxed{\frac{dx}{dt}=-kx, \quad k>0}$$

ตัวอย่างที่ 3.21 สาร A โดยปฏิกริยาเคมีเปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B พบว่า หนึ่งในสี่ของสาร A เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B ในเวลา 10 นาที จงหาระยะเวลาทีสาร A ถูกเปลี่ยนไปเก้าในสิบของปริมาณเริ่มต้น

วิธีทำ จากสมการ $$\frac{dx}{dt}=-kx, \quad k>0$$

ให้ x แทน ปริมาณของสาร A ที่ยังไม่เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B

จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} = -kx$ เมื่อ $k>0$

ดังนั้น $\frac{1}{x}dx = -kdt$

ดังนั้น $\int\frac{1}{x}dx = -\int kdt$

ดังนั้น $\ell n|x| = -kt+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ $x = C_1e^{-kt}$ เมื่อ C_1 เป็นค่าคงตัว

ถ้าแทน $t=0$ จะได้ว่า $x = C_1$

ถ้าแทน $t=10$ และ $x=\frac{3}{4}C_1$ จะได้ว่า $\frac{3}{4}C_1 = C_1e^{-10k}$

นั่นคือ $e^{-10k} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $-10k = \ell n\frac{3}{4}$

ดังนั้น $k = \frac{1}{-10}\ell n\frac{3}{4}$

ถ้าแทน $x = C_1 - \frac{9}{10}C_1 = \frac{1}{10}C_1$ จะได้ว่า $\frac{1}{10}C_1 = C_1e^{-kt}$

นั่นคือ $e^{-kt} = \frac{1}{10}$

ดังนั้น $-kt = \ell n\frac{1}{10}$

ดังนั้น
$$t = \frac{1}{-k}\ell n\frac{1}{10}$$
$$= 10\frac{\ell n\frac{1}{10}}{\ell n\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{10\ell n10}{\ell n4-\ell n3}$$

$\therefore$ ระยะเวลาที่สาร A ถูกเปลี่ยนไป คือ $\frac{10\ln 10}{\ln 4-\ln 3}$

<u>กรณีสาร A ทำปฏิกริยากับสาร B ได้สาร C</u>

ให้ x แทนปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ และa แทนปริมาณสาร A ที่ยังไมเกิดปฏิกริยา และ bแทนปริมาณสาร B ที่ยังไม่เกิดปฏิกริยา

จะได้ว่า $\boxed{\frac{dx}{dt} = kab, \quad k>0}$

ตัวอย่างที่ 3.22 A ทำปฏิกริยากับสาร B ได้สาร C โดยปฏิกริยานี้ใช้สาร A จำนวน 2 กรัม และสาร B จำนวน 1 กรัม ถ้าเริ่มต้นด้วยสาร A จำนวน 10 กรัม และสาร B จำนวน 20 กรัม เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ได้สาร C จำนวน 6 กรัม จงหาปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ และหาปริมาณสาร C ที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นได้

วิธีทำ จากสมการ $\frac{dx}{dt} = kab, \quad k > 0$

ให้ x แทน ปริมาณของสาร C ณ เวลา t ใดๆ

เพื่อให้ได้สาร C จำนวน x กรัม จะต้องใช้สาร A จำนวน $\frac{2}{3}x$ กรัม

และสาร A จำนวน $\frac{1}{3}x$ กรัม

ณ เวลา t พบว่า สาร A เหลือ $10-\frac{2}{3}x$ กรัม

สาร B เหลือ $20-\frac{1}{3}x$ กรัม

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = k\left(10-\frac{2}{3}x\right)\left(20-\frac{1}{3}x\right)$ เมื่อ $k>0$

ดังนั้น $\frac{1}{(15-x)(60-x)}dx = \frac{2}{9}kdt$

ดังนั้น $\frac{1}{45}\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \frac{2}{9}kdt$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = 10kdt$

ดังนั้น $\int\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \int 10kdt$

ดังนั้น $\ell n|60-x| - \ell n|15-x| = 10kt + C$

ดังนั้น $\ell n\left|\frac{60-x}{15-x}\right| = 10kt + C$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = C_1e^{10kt}$

ถ้าแทน $t=0$ และ $x=0$ จะได้ว่า $\frac{60-0}{15-0} = C_1e^0$ นั่นคือ $C_1 = 4$

ถ้าแทน $t=20$ และ $x=6$ จะได้ว่า $\frac{60-6}{15-6} = C_1e^{200k}$

นั่นคือ $9 = 4e^{200k}$

ดังนั้น $e^{10k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$

ดังนั้น $e^{10kt} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = C_1\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $x = 60\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}{4-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}\right)$

จะได้ว่า $\lim_{t\to\infty} x = 60\left(\frac{1-0}{4-0}\right) = 15$

สรุปว่า ปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ คือ $60\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}{4-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}\right)$ กรัม

ปริมาณสาร C ที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นได้ คือ 15 กรัม

แบบฝึกหัดท้ายบทที่3

แบบฝึกหัด 3.1

เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

1.1 $xdy - ydx = 0$

1.2 $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

1.3 $2ydx + (xy + 5x)dy = 0$

1.4 $(xy - 4x)dx + (x^2 y + y)dy = 0$

1.5 $y' = x - 1 + xy - y$

1.6 $(y + yx^2)dy + (x + xy^2)dx = 0$

1.7 $e^{x + 2y} dx - e^{2x - y} dy = 0$

1.8 $\cos x dy - ydx = 0$

1.9 $y(1+ x^3)y' + x^2(1+ y^2) = 0$

1.10 $x^2 y' - yx^2 = 0$

1.11 $x \tan y - y' \sec x = 0$

1.12 $e^y \sin x dx - \cos^2 x dy = 0$

1.13 $\sin y \cos x dx + (1 + \sin^2 x)dy = 0$

แบบฝึกหัด 3.2

เรื่อง สมการเอกพันธ์

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$

1.2 $xdy + (y + x\tan\frac{y}{x})dx = 0$

1.3 $(x^2 y + y^3)dx + x^3 dy = 0$

1.4 $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$

1.5 $xy' = x + y$

2.จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$ เมื่อ $y(-1)=0$

2.2 $x^2ydx-(x^3-y^3)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=1$

2.3 $14xyy' = 6x^2-7y^2$ เมื่อ $y(-2)=1$

2.4 $x^2y' = 3x^2-2xy+y^2$ เมื่อ $y(1)=\frac{3}{2}$

แบบฝึกหัด 3.3

เรื่อง สมการแม่นตรง

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $2x-y^3-3xy^2\frac{dy}{dx} = 0$

1.2 $(2x-5y)y' = 6x-2y$

1.3 $x(x\cos(x^2y)-2y)y'+2xy\cos(x^2y) = y^2$

1.4 $(\sin(xy)+xy\cos(xy))\frac{dy}{dx} + y^2\cos(xy) = 0$

1.5 $\frac{3xy+1}{y}dx - \frac{2y-x}{y^2}dy = 0$

1.6 $\pi y + (\pi yx+\arcsin y)\frac{dy}{dx} = 0$

1.7 $\frac{\ell n\, y}{x}dx + \left(\frac{\ell n\, x}{y}+\sin y\right)dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $(3x^2y+2xy)dx + (x^3+x^2+2y)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=2$

2.2 $\left(e^y+ye^x\right)dx + \left(e^x+xe^y\right)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=0$

2.3 $(\sin^2 x-2y\cos x)y'+2y\sin x\cos x+y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0)=-2$

2.4 $\ell n(1+y^2) = \left(\frac{1}{y}-\frac{2xy}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2)=\sqrt{e-1}$

2.5 $y(1+xy^2)dx + xdy = 0$ เมื่อ $y(1)=-1$

2.6 $(x^2+y)dx + (x^2\cos y - x)dy = 0$ เมื่อ $y(2)=0$

2.7 $(x\tan y-2\sec y)y' + 1 = 0$ เมื่อ $y(-1)=\pi$

แบบฝึกหัด 3.4

เรื่อง สมการเชิงเส้น

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1) $(x-2)\frac{dy}{dx} = y+2(x-2)^3$

2) $x^3\frac{dy}{dx} + (2-3x^2)y = x^3$

3) $y\ln y\,dx + (x-\ln y)dy = 0$

4) $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

5) $\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$

6) $\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

7) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \cos x$

8) $\cos t\,dr + (r\sin t - \cos^4 t)\,dt = 0$

9) $x\,dy - \{y + xy^3(1+\ln x)\}\,dx = 0$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

1) $2x(y+1)\,dx - (x^2+1)\,dy = 0 \quad , y(1) = -5$

2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{(xy)^3} \quad , y(1) = 4$

3) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 0$

4) $(x+2)\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \le x < 2 \\ 4 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 4$

แบบฝึกหัด 3.5

เรื่อง การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์

1. โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 40 นาทีสำหรับลดอุณหภูมิจาก 200 องศา เป็น 100 องศา เมื่อจุ่มลงในของเหลวชนิดหนึ่งซึ่งมีอุณหภูมิ 10 องศา แต่ถ้าของเหลวชนิดนี้มีอุณหภูมิ 5 องศา จงหาระยะเวลาที่โลหะแท่งนี้ใช้ในการลดอุณหภูมิจาก 100 องศา เป็น 10 องศา

2. เมื่อเทอร์โมมิเตอร์อยู่ในห้องที่มีอุณหภูมิคงตัวที่ $30°F$ และเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที พบว่าเทอร์โมมิเตอร์บอกอุณหภูมิที่ $0°F$ และเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที พบว่า เทอร์โมมิเตอร์บอกอุณหภูมิที่ $15°F$ จงหาอุณหภูมิเริ่มต้นของเทอร์โมมิเตอร์

3. ถังใบหนึ่งมีน้ำจืด 1000 ลิตร ถ้าเติมน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 1 กิโลกรัมต่อลิตร ลงในถังด้วยอัตราเร็วคงที่ 6 ลิตรต่อนาที และในขณะเดียวกันปล่อยน้ำในถังซึ่งได้คนให้เข้าเป็นเนื้อเดียวกันแล้วออกจากถังในอัตราเดียวกับอัตราการไหลเข้า จงหาเวลาเมื่อความเข้มข้นเกลือในถังเป็น 0.5 กิโลกรัมต่อลิตร

4. สาร A ทำปฏิกริยาเปลี่ยนเป็นสาร B พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที สาร A เปลี่ยนไปแล้ว $\frac{100}{3}\%$ จงหาว่าเมื่อปฏิกริยานี้ครบ 60 นาที จะมีสารละลายเหลือกี่เปอร์เซ็นต์

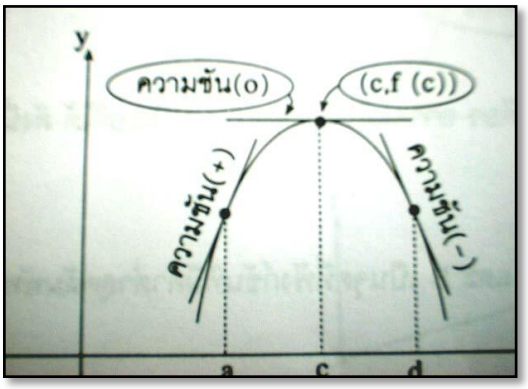
บทที่ 4

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

4.1 ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

4.1.1 นิยาม

1. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า xในช่วงเปิดนี้



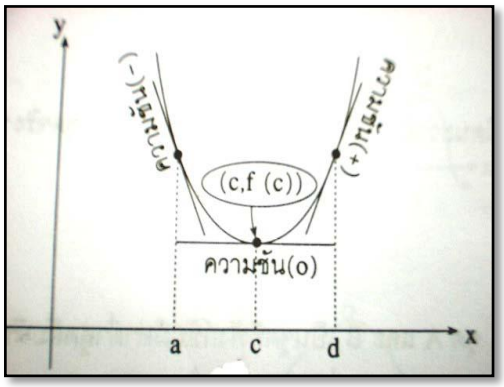
ภาพที่ 4.1 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$

ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย

แต่ $f'(x) < 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย

แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x)$

2. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ x = c ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้



ภาพที่ 4.2 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$

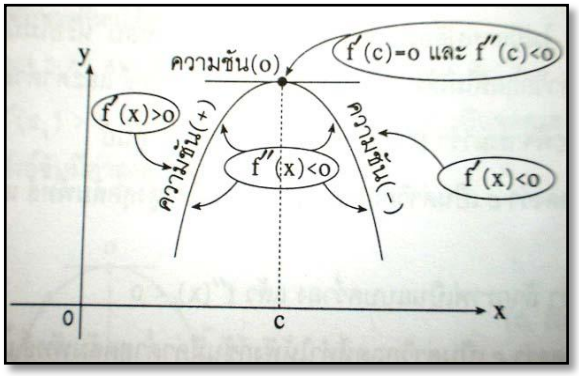
ถ้า f '(x)<0 เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย

แต่ f '(x)> 0 เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย

แล้วฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = c และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ f(c)

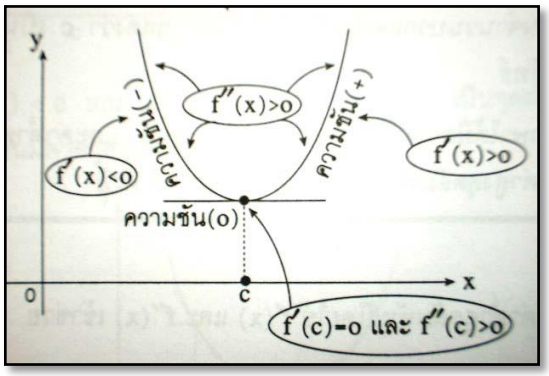
3. ถ้า c เป็นจำนวนในโดเมนของฟังก์ชัน f และถ้า $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้จะเรียก c ว่าเป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และจุด $(c, f(c))$ บนกราฟของ f ถูกเรียกว่าจุดวิกฤตของกราฟของf เมื่อทราบว่า $f'(c) = 0$ แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชันให้ระวังดังนี้

3.1 c อาจเป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ถ้ากราฟเป็นรูปคว่ำลงแล้ว $f''(x) < 0$ แสดงว่า $f''(c) < 0$ ด้วย



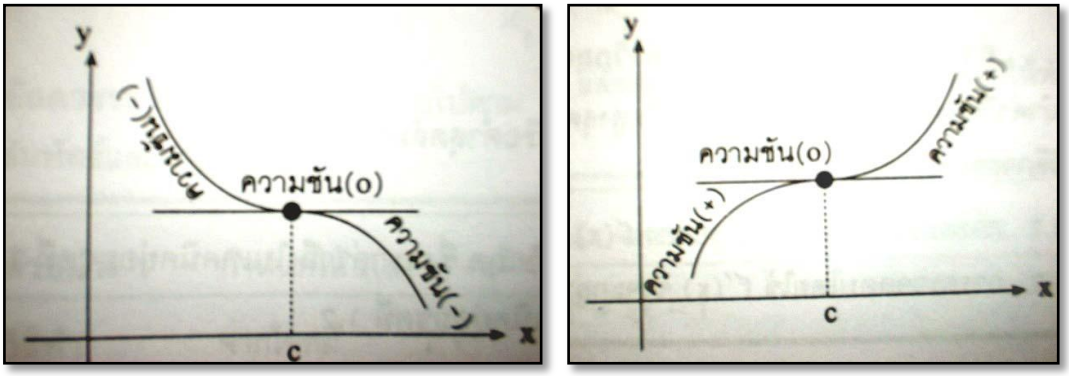
ภาพที่ 4.3 ค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

3.2 cอาจเป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้ากราฟเป็นรูปหงายขึ้น แล้ว $f''(x) > 0$ แสดงว่า $f''(c) > 0$ ด้วย



ภาพที่ 4.4 ค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3.3 cอาจเป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เช่น



ภาพที่ 4.5 ค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

<u>สรุป</u> ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f(x)

1. หา $f'(x)$

2. จาก $f'(x)$ หาจุดวิกฤต สมมติว่าจุดนั้นเป็น $x=c$

3. ทดสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ ดังนี้

- 3.1 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $+\Rightarrow-$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
- 3.2 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $-\Rightarrow+$ จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
- 3.3 ถ้า ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย จะได้ว่า f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ แต่ที่จุด $x=c$ จะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้ $f(x)=8-12x+3x^2+2x^3$

วิธีทำ จาก $f(x) = 8 - 12x + 3x^2 + 2x^3$

ดำเนินการตามลำดับ ดังนี้

1. หา $f'(x)$ จะได้ $f'(x) = -12 + 6x + 6x^2$

2. หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$

นั่นคือ $-12 + 6x + 6x^2 = 0$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2, 1$

3. หา $f''(x)$ จะได้ $f''(x) = 6 + 12x$

4. นำ x = −2, 1 ไปแทนค่าใน $f''(x)$

4.1 แทนค่าx = -2 จะได้ $f''(-2) = 6 + 12(-2) = -18$ เป็นจำนวนลบ แสดงว่าฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

นำ x = -2 แทนค่าใน $f(x) = 8-12x+3x^2+2x^3$ จะได้

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-2) = 8-12(-2)+3(-2)^2+2(-2)^3 = 28$

4.2 แทนค่าx = 1 จะได้ $f''(1) = 6+12(1) = 12$ เป็นจำนวนบวก แสดงว่าฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

นำ x = 1 แทนค่าใน $f(x) = 8-12x+3x^2+2x^3$ จะได้

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f(1) = 8-12(1)+3(1)^2+2(1)^3 = 1$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้ $f(x) = x^3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3$

ดำเนินการตามลำดับ ดังนี้

1. หา $f'(x)$ จะได้ $f'(x) = 3x^2$

2. หาค่า xที่ทำให้ $f'(x)=0$

นั่นคือ $3x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

3. นำค่า x = 0 ไปตรวจสอบด้วยวิธีที่2 ดังนี้

จาก $f'(x)=3x^2$

ดังนั้น $f''(x)=6x$

นั่นคือ $f''(0)=6(0)=0$

ดังนั้นไม่สามารถตรวจสอบด้วยวิธีที่ 2 ได้ ต้องย้อนกลับไปใช้วิธีที่ 1

3.1 ถ้า x < 0 เล็กน้อย จะได้ $f'(x)=3x^2$ เป็นจำนวนบวกเช่น แทน x = -1 จะได้ $f'(-1)=3(-1)^2=3$ เป็นจำนวนบวก

3.2 ถ้า x> 0 เล็กน้อย จะได้ $f'(x)=3x^2$ เป็นจำนวนบวกเช่น แทน x = 1 จะได้ $f'(1)=3(1)^2=3$ เป็นจำนวนบวก

การเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่าจุดที่ x = 0 คือจุด (0, 0) ไม่เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์และไม่เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น ฟังก์ชัน f นี้ จึงไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จาก $f'(x)=3x^2$ จะได้ว่า $f'(x)>0$ เมื่อ $x \geq 0$ หรือ $x \leq 0$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้

1. $f(x)=2x^2-2x$ 2. $f(x)=x^3-27x-1$

วิธีทำ จาก $f(x)=2x^2-2x$

จะได้ $f'(x)=4x-2$ (จะได้ค่าวิกฤตคือ $x=\frac{1}{2}$)

$f''(x)=4$ ซึ่งมากกว่า 0 (แสดงว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์)

ดังนั้น f จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

จาก $f(x)=x^3-27x-1$

จะได้ $f(x) = x^3 - 27x - 1$ (จะได้ค่าวิกฤตคือ $x = 3, \ -3$)

$f''(x) = 6x$ $f''(3) = 6(3) = 18$ (แสดงว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = 3)

$f''(-3) = 6(-3) = -18$ (แสดงว่า f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x = −3)

ดังนั้น f จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(3) = 3^3 - 27(3) - 1 = -55$

และ f จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-3) = (-3)^3 - 27(-3) - 1 = 53$

4.2 การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

เราจะนำเอาความรู้เกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันมาช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์ต่างๆ โดยจะต้องสร้างฟังก์ชันที่มีความสัมพันธ์กับโจทย์และสิ่งที่ต้องการหา ต่อจากนั้นจึงหาจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันดังกล่าวมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดไว้ด้วย

4.2.1 แนวทางในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การแปลงรูปโจทย์ให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 กำหนดตัวแปรให้กับสิ่งที่เกี่ยวข้องในโจทย์

1.2 เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในข้อ 1.1 และเงื่อนไขต่าง ๆ ที่มี (ในกรณีนี้เราอาจเขียนรูปประกอบเพื่อช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรชัดเจนขึ้น)

1.3 แยกแยะว่าตัวแปรใดเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>การหาคำตอบ

2.1 สร้างฟังก์ชันของตัวแปรที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

2.2 ถ้าฟังก์ชันในข้อ 2.1 ไม่เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว ให้ใช้ความสัมพันธ์ในข้อ 1.2 เข้าช่วย เพื่อทำให้เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว

2.3 หาโดเมนของฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ได้จากข้อ 2.2

2.4 หาคำตอบของฟังก์ชันโดยใช้ความรู้จากข้างต้น

2.5 หาค่าของตัวแปรที่เหลือจากคำตอบของตัวแปรที่ได้มาจากขั้นตอน 2.4 โดยใช้ความสัมพันธ์ในขั้นตอน 1.2

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>การแปลผล แปลงคำตอบที่ได้ให้อยู่ในรูปของภาษาทั่วไป

ตัวอย่างที่ 4.4 สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 2700 ตารางเมตร ต้องการล้อมรั้วโดยรอบและรั้วแบ่งครึ่งสนามซึ่งรั้วสำหรับแบ่งครึ่งสนามราคาเมตรละ 80 บาทส่วนรั้วโดยรอบสนามราคาเมตรละ 120 บาทจงหาขนาดของสนามซึ่งจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้สนามยาว x เมตร และกว้าง y เมตรให้ค่าทำรั้วทั้งหมด เป็น f(x)

ดังนั้น f(x) = 120 (2x + 2y) + 80y = 240x + 320y

แต่พื้นที่สนามทั้งหมดเท่ากับ 2700 ตารางเมตร เพราะฉะนั้น $x \cdot y = 2700$

ดังนั้น $y = \dfrac{2700}{x}$

นั้นคือ $f(x) = 240x + 320\dfrac{2700}{x}$

$f'(x) = 240 - \dfrac{864,000}{x^2}$ กำหนดให้ค่าของ $f'(x) = 0$

ได้ว่า $240 - \dfrac{864,000}{x^2} = 0$ นำ x^2 มาคูณตลอดสมการ

จะได้ว่า $240x^2 + 864,000 = 0$

$x^2 = \dfrac{864,000}{240}$, $x^2 = 3600$

ฉะนั้น $x = 60$

ดังนั้น 60 เป็นค่าวิกฤตของ f ใช้อนุพันธ์อันดับ2 ทดสอบว่า f(60) เป็นค่าต่ำสุดหรือไม่

$f''(x) = \dfrac{864,000}{x^3}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์

แสดงว่า f (60) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน (0, ∞)

เพราะว่าสนามมีพื้นที่เท่ากับ $x \cdot y = 2700$ ถ้า

$x = 60$ จะได้ $y = 45$

ดังนั้นสนามจะต้องกว้าง 45 เมตร ยาว 60 เมตร จึงจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 4.5 ถังเปิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตร 125 ลบ.เมตร ค่าวัสดุที่ใช้ทำก้นถังตารางเมตรละ160 บาท และวัสดุสำหรับด้านข้างตารางเมตรละ 80 บาทจงหาขนาดของถังที่มีความจุเท่าเดิมแต่เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ถังมีฐานยาวด้านละ x เมตรถังมีความสูง y เมตร

ถังนี้มีปริมาตร $x^2 y = 125$ ลบ.เมตร..... 1)

ให้ $f(x)$ เป็นค่าวัสดุที่ใช้ทำถัง

ดังนั้น $f(x)=160x^2+80(4xy)=160x^2+320xy$

จากสมการที่ 1 จะได้ว่า $y=\frac{125}{x^2}$

จะได้ว่า $f(x)=160x^2+320x\cdot\frac{125}{x^2}$

โดเมนของ f คือ $(0,\infty)$

หาอนุพันธ์อันดับ 2 $f'(x)=320-320\cdot\frac{125}{x^3}$

เมื่อ x = 0 เราหาค่า $f'(x)$ ไม่ได้แต่ให้ $f'(x)=0$

จะได้ $320-320\cdot\frac{125}{x^3}=0$, $\Rightarrow 320=320\cdot\frac{125}{x^3}\Rightarrow x^3=\frac{320(125)}{320}$

ได้ว่า $x^3=125\Rightarrow x=5$

ดังนั้น 5 เป็นค่าวิกฤตของ f ใช้อนุพันธ์อันดับ2 ทดสอบว่าf(5) เป็นค่าต่ำสุดหรือไม่

$f''(x)=320-320\cdot\frac{125}{x^3}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์

แสดงว่า f (5) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน $(0,\infty)$

เพราะว่าปริมาตรของถังคือ $x^2y=125$ ถ้า x = 5 จะได้ y = 5

ดังนั้นจะต้องทำถังซึ่งมีฐานจัตุรัสด้านละ 5 เมตร และสูง 5 เมตรจึงจะได้ถังมีปริมาตรตามต้องการและเสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

แบบฝึกหัด 4.1

เรื่อง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

1. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน fเมื่อกำหนดให้

1.1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$

1.2 $f(x)=3x^2-x^3$

1.3 $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$

1.4 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+7$

1.5 $f(x)=x^3-3x+7$

1.6 $f(x)=x^4+4x^3$

1.7 $f(x)=x^3-5x^2+3x$

1.8 $f(x)=x^4-16$

1.9 $f(x)=8x^5-5x^4-20x^3$

1.10 $f(x)=4x^{1/3}+x^{4/3}$

1.11 $f(x)=x^5+2x$

1.12 $f(x)=x^2(x-1)^2$

2. จงหาจุดสูงสุดสัมบูรณ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน fบนช่วงที่กำหนดให้

2.1 $f(x)=x^3-2x^2+x-1;-3\le x\le 3$

2.2 $f(x)=x^2-\frac{1}{6}x^3;-1\le x\le 5$

2.3 $f(x)=x^4-2x^2+1;0\le x\le 5$

2.4 $f(x)=2x^3-9x^2+12x;0\le x\le 2$

2.5 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+15;0\le x\le 3$

2.6 $f(x)=3-|x-2|;1\le x\le 4$

2.7 $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3};-1\le x\le 4$

2.8 $f(x)=x+\frac{4}{x};1\le x\le 4$

แบบฝึกหัด 4.2

เรื่อง การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

1. บริษัทแห่งหนึ่งทำกล่องดีบุกต้องการใช้แผ่นดีบุกขนาด 8×15 นิ้วโดยตัดทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วยกเป็นความสูงของกล่องดีบุก จงหาความยาวที่ยาวที่สุดของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจะทำให้กล่องดีบุกมีปริมาตรมากที่สุด

2. ชมรมคณิตศาสตร์จังหวัดยะลาเก็บเงินค่าสมาชิกต่อคนปีละ 99.50 บาทสำหรับสมาชิกที่เกิน 600 คนและเพิ่มอีก 50 สตางค์ ถ้าสมาชิกน้อยกว่า600 คน จงหาจำนวนสมาชิกที่จะทำให้ชมรมมีกำไรมากที่สุดทุกๆ ปี

3. การสร้างกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีก้นกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและไม่มีฝาปิดด้านบนและมีปริมาตร 62.5 ลูกบาศก์เซนติเมตร แล้วพื้นที่ผิวของกล่องใบนี้มีค่าน้อยที่สุดเท่าไร

4. นายล่องลอยลอยเรืออยู่ในทะเลที่จุด A ห่างจากหาดทรายที่จุด B ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เท่ากับ 9 ไมล์ เขาต้องการจะไปที่จุด D ซึ่งอยู่ที่หาดทรายห่างจากจุด B เท่ากับ 20 ไมล์ ถ้าเขาพายเรือได้ด้วยอัตราเร็ว 4 ไมล์ต่อชั่วโมงไปที่จุด C ซึ่งอยู่ระหว่างจุด B และ D หลังจากนั้นเขาเดินได้ด้วยอัตราเร็ว 5ไมล์ต่อชั่วโมง จากจุด C ถึง D แล้ว เขาต้องไปขึ้นฝั่งที่ไหนจึงจะใช้เวลาน้อยที่สุด

5. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานยาว12 ฟุต และสูง 6 ฟุต จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้ โดยมีฐานทับกับฐานของสามเหลี่ยม

บทที่ 5

การอินทิเกรต

5.1 การอินทิเกรตเบื้องต้น

5.1.1 สูตรมาตรฐานของอินทิเกรต

ความหมายแรกของอินทิเกรต คือ การดำเนินการผกผันอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x}$$

เรียกฟังก์ชัน sin x ว่าการอินทิกรัลของฟังก์ชัน cos x เทียบกับตัวแปร x สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $\int dx$ หมายถึงการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x เขียนแทนด้วย

$$\boxed{\int \cos x \ \ dx = \sin x}$$

5.1.2 ชนิดของอินทิเกรต แบ่งเป็น 2 ชนิด ได้แก่

1. การอินทิเกรตไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

ถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้ว เรียก $F(x)$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ (Anti derivetives) ของ $f(x)$ เทียบกับ x

$$F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{dc}{dx} = f(x) \qquad ; \ c = \text{ค่าคงตัวใดๆ}$$

2. การอินทิเกรตจำกัดเขต (Definite Integral)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์ เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้ว อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f คือ เซตทั้งหมดของปฏิยานุพันธ์ของ f เขียนแทนด้วย

$$\int f(x)dx \text{ โดยที่ } \int f(x)dx = F(x) + c$$

5.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือ ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการ บวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม

5.2.1 สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชันชันพีชคณิต

ให้ u และv เป็นฟังก์ชันของ x และ a, c, n เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้วจะได้

1. $\int (f'(x))dx = f(x) + C$
2. $\int du = u + C$
3. $\int audx = a\int udx$
4. $\int u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาค่า $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 5)dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 5)dx = \int 4x^3 dx + \int 3x^2 dx - \int 2xdx - \int 5dx$$

$$= 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - 2\int xdx - 5\int dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) - 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) - 5x + C$$

$$= x^4 + x^3 - x^2 - 5x + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาค่า $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$

$$\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx = \int\sqrt[3]{x}\,dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{2}xdx+\int\frac{3}{x}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int xdx+3\int\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{2x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+3\ln|x|+C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+4\sqrt{x}-\frac{x^{2}}{4}+3\ln|x|+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาค่า $\int(3-2x)\sqrt{x}dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$

$$\int(3-2x)\sqrt{x}\,dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}dx-\int 2x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}dx-2\int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาค่า $\int (2t-3)^2 dt$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int (2t-3)^2 dt = \int (4t^2 - 12t + 9)dt$$

$$= \int 4t^2 dt - \int 12tdt + \int 9dt$$

$$= 4\int t^2 dt - 12\int tdt + 9\int dt$$

$$= \frac{4t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} + 9t + C$$

$$= \frac{4t^3}{3} - 6t^2 + 9t + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงหาค่า $\int \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x + 3}{x^2} dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int \frac{2x^3 - 7x^2 + 4x + 3}{x^2} dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) dx$$

$$= \int \left(2x - 7 + \frac{4}{x} + 3x^{-2} \right) dx$$

$$= 2\int x dx - 7\int dx + 4\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2} dx$$

$$= x^2 - 7x + 4\ln|x| + \frac{3x^{-1}}{-1} + C$$

$$= x^2 - 7x + 4\ln|x| - \frac{3}{x} + C \blacksquare$$

5.2.2 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

มักจะใช้ช่วยในการอินทิเกรตที่มีรูปซับซ้อนให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งมีหลักของการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

1. พิจารณาตรวจสอบที่จะเลือกสูตรมาใช้ในการอินทิเกรต

2. เลือก $u = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรในตัวถูกอินทิเกรต

3. หา $\frac{du}{dx} = g'(x)$ และจะได้ $dx = \frac{du}{g'(x)}$

4. แทนค่า $g(x) = u$ และ $dx = \frac{du}{g'(x)}$ ซึ่งในขั้นนี้การอินทิกรัล จะต้องอยู่ในเทอม ของน โดยไม่ให้มีตัวแปร x เหลืออยู่

5. คำนวณอินทิกรัลในเทอมของ น

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาค่า $\int 2x^2\sqrt{x^3 + 1dx}$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า น และเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $u = x^3 + 1$ จะได้ $du = 3x^2 dx$ และ $dx = \frac{du}{3x^2}$ แทนค่าจะได้

$$\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int 2x^2\sqrt{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sqrt{u}du$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาค่า $\int \sin^4 x \cos x dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า น และเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $u = \sin x$ จะได้ $du = \cos x dx$ และ $dx = \frac{du}{\cos x}$ แทนค่าจะได้

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาค่า $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า น และแทนค่าลงไป

ให้ $u = x^2 + 2x - 5$ จะได้

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx = \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(x^2+2x-5)}{2x+2}$$

$$= \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}} \frac{d(x^2+2x-5)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}} d(x^2+2x-5)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= (x^2+2x-5)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{x^2+2x-5} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาค่า $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า u และแทนค่าลงไป

ให้ $u = \ln x$ จะได้

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \frac{\ln^2 x}{x} \cdot \frac{d(\ln x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{x} + C \quad \blacksquare$$

การอินทเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูป u นั้น ไม่สามารถใช้ได้กับทุกๆ ฟังกชันเช่น $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \sin(x^2)dx$ ซึ่งไม่สามารถทำได้โดยวิธีดังกล่าวและสำหรับอินทิกรัลใดๆ ก็ตามที่มีตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปเศษส่วน และทั้งเศษและส่วน เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่เศษมีกำลังสูงสุดมากกว่

หรือเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วนแล้ว ให้นำส่วนไปหารเศษ จนกระทั่งเศษมีกำลังสูงสุดน้อยกว่าส่วน แล้วจึงนำไปอินทิเกรตทีละเทอมได้

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาค่า $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ x^2+2x+1 ไปหาร x^2+2x+6 ได้ดังนี้

$$x^2+2x+1\overline{)x^2+2x+6}\,(1$$

$$\underline{x^2+2x+1}$$

$$\underline{\underline{5}}$$

ดังนั้น $\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{5}{x^2+2x+1}$ จะได้

$$\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx = \int\left(1+\frac{5}{x^2+2x+1}\right)dx$$

$$= \int dx + \int \frac{5}{x^2+2x+1}dx$$

$$= \int dx + \int \frac{5}{(x+1)^2}dx$$

$$= x + 5\int (x+1)^{-2}d(x+1) \qquad (\text{ให้ } u = x+1)$$

$$= x + \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= x - \frac{5}{x+1} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 5.11 จงหาค่า $\int \frac{x^3+2x^2-3}{x+1}dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ $x+1$ ไปหาร x^3+2x^2-3 ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{r|l}
x+1 & x^3+2x^2-3 \quad (x^2+x-1 \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & \quad x^2-3 \\
 & \quad \underline{x^2+x} \\
 & \qquad -x-3 \\
 & \qquad \underline{-x-1} \\
 & \qquad\quad \underline{\underline{-2}}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\frac{x^3+2x^2-3}{x+1} = x^2+x-1-\frac{2}{x+1}$ จะได้

$$\int \frac{x^3+2x^2-3}{x+1}dx = \int\left(x^2+x-1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \int x^2dx + \int x\,dx - \int dx - \int \frac{2}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{d(x+1)}{x+1} \quad (\text{ให้ } u = x+1)$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|+C \ \blacksquare$$

5.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Functions) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ, ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน, ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น

5.3.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม มี 1 สูตรอยู่ คือ

$$\boxed{\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c}$$

เนื่องจากสูตร $\int \frac{1}{u}du$ ก็คือ $\int u^{-1}du$ ซึ่งคล้ายกับสูตร $\int udu$ แต่แตกต่างกันที่กำลังเท่านั้น นั้นคือ ถ้ากำลังของ u เป็น -1 ให้ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$ แต่ถ้ากำลังของ u เป็นค่าคงที่อื่นๆ ที่ไม่ใช่ -1 ให้ใช้สูตร $\int u^n du$

ตัวอย่างที่ 5.12 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{2x+3}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x+3$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d(2x+3)}{dx}$ $\quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int \frac{1}{2x+3}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

แต่ $u = 2x+3$ ดังนั้น $\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$

ตัวอย่างที่ 5.13 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{x^3+5}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3+5$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d(x^3+5)}{dx}$ $\quad \frac{1}{3x^2}du = dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}dx = \int \frac{x^2}{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$= \quad \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{u}\frac{du}{x^2}$$

$$= \quad \frac{1}{3}\int \frac{\cancel{x^2}}{u}\frac{du}{\cancel{x^2}}$$

$$= \quad \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$

5.3.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลังมีสูตรใช้ 2 สูตร คือ

1. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
2. $\int e^u du = e^u + c$

ตัวอย่างที่ 5.14 จงหาค่าของ $\int 3^{5x} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

ให้ ให้ $u = 5x$ $\frac{du}{dx} = \frac{d(5x)}{dx}$ $\frac{1}{5}du = dx$

$$\int 3^{5x} dx = \int 3^u \cdot \frac{du}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int 3^u du = \frac{3^u}{5\ln 3} + c$$

แต่ $u = 5x$ ดังนั้น $\int 3^{5x} dx = \frac{3^{5x}}{5\ln 3} + c$

ตัวอย่างที่ 5.15 จงหาค่าของ $\int x10^{x^2-6} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

ให้ $u = x^2 + 6$ $\frac{du}{dx} = \frac{d(x^2+6)}{dx}$ $\frac{1}{2x}du = dx$

$$\int x10^{x^2-6} dx = \int x10^u \frac{du}{2x}$$

$$\int x10^{x^2-6}dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int 10^u du$$

$$\int x10^{x^2-6}dx \quad = \quad \frac{10^u}{2\ln 10}+c$$

แต่ $u = x^2+6$ ดังนั้น $\int x10^{x^2-6}dx = \frac{10^{x^2+6}}{2\ln 10}+c$

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาค่าของ $\int x^2 e^{x^3+5}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du = e^u + c$

ให้ $u = x^3+5$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d\left(x^3+5\right)}{dx}$ $\quad \frac{1}{3x^2}du = dx$

$$\int x^2 e^{x^3+5}dx \quad = \quad \int x^2 e^u \frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2 e^{x^3+5}dx \quad = \quad \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$\int x^2 e^{x^3+5}dx \quad = \quad \frac{1}{3}e^u + c$$

แต่ $u = x^3+5$ ดังนั้น $\int x^2 e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}e^{x^3+5}+c$

ตัวอย่างที่ 5.17 จงหาค่าของ $\int \left(e^x+1\right)^2 dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du = e^u + c$

จากสมการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้ว่า $\left(e^{2x}+2e^x+1\right)$

$$\int \left(e^x+1\right)^2 dx \quad = \quad \int \left(e^{2x}+2e^x+1\right)dx$$

$$\int \left(e^x+1\right)^2 dx \quad = \quad \int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx$$

จาก $\int e^{2x}dx$ ให้ $u = 2x$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d\left(2x\right)}{dx}$ $\quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int e^u du + \int 2e^x dx + \int 1dx$$

$$\int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}e^u + 2e^x + x$$

แต่ $u = 2x$ ดังนั้น $\int \left(e^x + 1\right)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$

แต่ $u = x^3 + 5$ ดังนั้น $\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3 + 5\right| + c$

5.3.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง

มีสูตรใช้ 2 สูตร คือ

1. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
2. $\int e^u du = e^u + c$

ตัวอย่างที่5.18 จงหาค่าของ $\int 3^{5x} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

ให้ ให้ $u = 5x$ $\frac{du}{dx} = \frac{d\left(5x\right)}{dx}$ $\frac{1}{5}du = dx$

$$\int 3^{5x} dx = \int 3^u \cdot \frac{du}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int 3^u du = \frac{3^u}{5\ln 3} + c$$

แต่ $u = 5x$ ดังนั้น $\int 3^{5x} dx = \frac{3^{5x}}{5\ln 3} + c$

ตัวอย่างที่ 5.19 จงหาค่าของ $\int x10^{x^2-6} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

ให้ $u = x^2 + 6$ $\frac{du}{dx} = \frac{d\left(x^2 + 6\right)}{dx}$ $\frac{1}{2x}du = dx$

$$\int x10^{x^2-6} dx = \int x10^u \frac{du}{2x}$$

$$\int x10^{x^2-6} dx = \frac{1}{2}\int 10^u du$$

$$\int x10^{x^2-6}dx \quad = \quad \frac{10^u}{2\ln 10}+c$$

แต่ $u = x^2+6$ ดังนั้น $\int x10^{x^2-6}dx = \frac{10^{x^2+6}}{2\ln 10}+c$

ตัวอย่างที่ 5.20 จงหาค่าของ $\int x^2e^{x^3+5}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du = e^u + c$

ให้ $u = x^3+5$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d\left(x^3+5\right)}{dx}$ $\quad \frac{1}{3x^2}du = dx$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx \quad = \quad \int x^2e^u \frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx \quad = \quad \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx \quad = \quad \frac{1}{3}e^u + c$$

แต่ $u = x^3+5$ ดังนั้น $\int x^2e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}e^{x^3+5}+c$

ตัวอย่างที่ 5.21 จงหาค่าของ $\int\left(e^x+1\right)^2dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du = e^u + c$

จากสมการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้ว่า $\left(e^{2x}+2e^x+1\right)$

$$\int\left(e^x+1\right)^2dx \quad = \quad \int\left(e^{2x}+2e^x+1\right)dx$$

$$\int\left(e^x+1\right)^2dx \quad = \quad \int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx$$

จาก $\int e^{2x}dx$ ให้ $u = 2x$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d\left(2x\right)}{dx}$ $\quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int e^u du+\int 2e^xdx+\int 1dx$$

$$\int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}e^u+2e^x+x$$

แต่ $u = 2x$ ดังนั้น $\int\left(e^x+1\right)^2dx = \frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x$

5.3.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

มีสูตรที่ใช้ คือ

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c \text{ เมื่อ } a > 0$$

$$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c \text{ เมื่อ } a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = \ln\left(u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2\pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2\pm a^2}}\,du = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2\pm u^2}}{u}\right) + c$$

การพิจารณาว่าอินทิเกรตแบบใดที่ใช้สูตรในกลุ่มฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน คือ อินทิเกรตที่มีนิพจน์ที่สามารถจัดให้เข้ารูป $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$

ลักษณะนิพจน์ที่สามารถจัดให้เข้ารูป $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$ มี 2 ประเภท คือ

1. นิพจน์ที่ประกอบด้วย 2 พจน์ คือ พจน์ที่เป็นตัวแปรและพจน์คงที่ เช่น

$$4x^2+9=(2x)^2+(3)^2; u=2x, a=3$$

$$3-16x^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-(4x)^2; u=4x, a=\sqrt{3}$$

$$3x+1=\left(\sqrt{3x}\right)^2+(1)^2; u=\sqrt{3x}, a=1$$

2. นิพจน์ที่ประกอบด้วยพจน์ต่างๆ เช่น $x^2-6x+25, -4x-3, x^4+2x^2+2$ ควนจัดให้อยู่ในรูของ $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$ โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ มีหลักการดังนี้

1. เรียงกำลังของตัวแปรจากมากไปน้อย

2. ทำสัมประสิทธิ์ หน้าพจน์ตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดให้เป็น 1

3. คิดคำนวณพจน์คงที่ที่จะต้องใช้จากสูตรต่อนี้

พจน์คงที่ = (ส.ป.ส. พจน์กลาง/2)^2

4. เติมพจน์คงที่ที่คำนวณไว้ แล้วปรับค่าให้เท่าเดิม

ตัวอย่าง เช่น $x^2-6x+25=x^2-6x+9-9+25=\left(x^2-6x+9\right)+16=\left(x-3\right)^2+\left(4\right)^2$

$$3x^2-4x-3=3\left(x^2-\frac{4}{3}x-1\right)=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-1\right)=3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{13}{9}\right]$$

$$=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2\right]$$

$$32+4x-x^2=32-x^2+4x=32-\left(x^2-4x\right)=32-\left(x^2-4x+4-4\right)$$

$$=32-\left(x^2-4x+4\right)+4=36-\left(x^2-4x+4\right)=\left(6\right)^2-\left(x-2\right)^2$$

ตัวอย่างที่ 5.22 จงหาค่าของ $\int\frac{4dx}{9x^2+16}$

วิธีทำ จากสูตร $\int\frac{1}{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$

จัดให้อยู่ใ *นรูปแบบของ* a^2+u^2

$$\int\frac{4dx}{9x^2+16}=4\int\frac{dx}{9x^2+16}$$

$$\int\frac{4dx}{9x^2+16}=4\int\frac{dx}{\left(3x\right)^2+\left(4\right)^2}$$

ใช้สูตรอนุพันธ์เข้าช่วย $u=3x,\frac{du}{dx}=\frac{d\left(3x\right)}{dx},dx=\frac{1}{3}du$

$$\int\frac{4dx}{9x^2+16}=\frac{4}{3}\int\frac{du}{\left(3x\right)^2+\left(4\right)^2}$$

$$\int\frac{4dx}{9x^2+16}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\left(3x\right)}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|$$

$$\int\frac{4dx}{9x^2+16}=\frac{2}{9x}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|+c$$

ตัวอย่างที่ 5.23 จงหาค่าของ $\int\sqrt{3-4x^2}\,dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$

จัดให้อยู่ในรูปแบบของ $a^2 - u^2$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)-\left(2x\right)^2}\,dx$$

ใช้สูตรอนุพันธ์เข้าช่วย $u = 2x, \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d\left(2x\right)}{dx}, dx = \dfrac{1}{2}du$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)-\left(2x\right)^2}\,du$$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(2x\right)^2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 \arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(2x\right)^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{\sqrt{3}-4x^2}+\dfrac{3}{2}\arcsin\dfrac{2x}{\sqrt{3}}+c$

ตัวอย่างที่ 5.24 จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx$

วิธีทำ จากสมการเห็นว่ากำลังของเศษมากกว่ากำลังของส่วนต้องหารก่อน

การหาร

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & 3x^3-4x^2+3x \quad 3x-4 \\ & \underline{3x^3+3x} \\ & \quad -4x^2 \\ & \quad \underline{-4x^2-4} \\ & \qquad\quad \underline{\underline{4}} \end{array}$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int\left(3x-4+\frac{4}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int 3x\,dx-\int 4\,dx+\int \frac{4}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = 3\int x\,dx-4\int dx+4\int \frac{1}{x^2+1^2}dx$$

จากสูตร $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \frac{3x^2}{2}-4x+\tan^{-1}x+c$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

แบบฝึกหัด 5.1

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

1.จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int (3x^2 + 2x - 5)dx$

2. $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 5x}{x^3} dx$

3. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2} - \sqrt{x} \right) dx$

4. $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

5. $\int (3t + 4)^2 dt$

6. $\int \sqrt{2x + 3}\, dx$

7. $\int (x^3 + 2)^6 3x^2 dx$

8. $\int \frac{8x^2 dx}{(x^3 + 2)^3}$

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3 + 2}}$

10. $\int \frac{(x + 3)dx}{(x^2 + 6x)^{1/3}}$

11. $\int 3x\sqrt{1 - 2x^2}\, dx$

12. $\int \frac{dx}{(a + bx)^{1/3}}$

13. $\int \frac{(x + 1)(x - 2)}{\sqrt{x}} dx$

14. $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$

15. $\int \frac{2\sin x}{\cos^4 x} dx$

16. $\int \frac{x^2 dx}{1 - 2x^3}$

17. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 9} dx$

18. $\int \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} d\theta$

19. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} dx$

20. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x + 1} dx$

แบบฝึกหัด 5.2

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

จงหาค่าของ

1. $\int \frac{dx}{x+3}$ 2. $\int \frac{xdx}{x^2+5}$ 3. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x}$

4. $\int \frac{x+1}{x-1}dx$ 5. $\int \frac{dx}{2+3x}$ 6. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+3x}dx$

7. $\int \frac{(2x+3)}{x+2}dx$ 8. $\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}}$ 9. $\int \left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2+1} \right)$

10. $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$

แบบฝึกหัด 5.3

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$ 2. $\int a^x e^x dx$ 3. $\int xe^{x^2} dx$ 4. $\int \frac{dx}{2+3x}$ 5. $\int \left(e^{5x}+a^{5x}\right)dx$ 6. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+3x}dx$ 7. $\int \frac{(2x+3)}{x+2}dx$ 8. $\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}}$ 9. $\int \left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1} \right)$

10 $\int \frac{(x^2+2x+2)}{x+2}dx$ 11. $\int e^x 5^{e^x} dx$ 12. $\int \frac{1+e^{2x}}{e^x}dx$

แบบฝึกหัด 5.4

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จงหาค่าอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \cos ec^2(4x+1)dx$ 2. $\int \cos ec3y \cos 3ydy$ 3. $\int \frac{\sec 5x}{\cot 5x}dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 5. $\int \frac{1+\sin 2x}{\tan 2x}dx$ 6. $\int \frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

7. $\int (\tan 2x - 1)^2 dx$ 8. $\int (\sec x + \cos ecx)^2 dx$ 9. $\int \frac{dx}{1-\cos 3x}$

10. $\int \frac{dx}{1+\sin\frac{x}{2}}$ 11. $\int \frac{dx}{1+\sec 2x}$ 12. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx$

แบบฝึกหัด 5.5

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

จงหาค่าอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \frac{5dx}{4x^2+25}$ 2. $\int \frac{dx}{25-16x^2}$ 3. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+3)^2}}$ 5. $\int \sqrt{x^2-36}dx$ 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-9x^4}}$ 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ 9. $\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx$

10. $\int \frac{2x^4-x^2}{2x^2+1}dx$ 11. $\int \frac{(2x-5)}{x^2-9}dx$ 12. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

บรรณานุกรม

ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, ศรีบุตร แววเจริญ, และศรีบุตร แววเจริญ. (๒๕๓๓). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์.** กรุงเทพฯ:สื่อเสริมกรุงเทพ.

ฝ่ายวิชาการ พีบีซี. (๒๕๕๒) **เวกเตอร์ ฉบับมินิ** (พิมพ์ครั้งที่ ๑). กรุงเทพฯ: ศูนย์*หนังสือ*แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปรียาพร โกษา. (๒๕๕๐). เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสถิตยศาสตร์วิศวกรรม. นครราชสีมา: สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

ฟิสิกส์ราชมงคล. (๒๕๕๑). **เวกเตอร์ ปริมาณเวกเตอร์**. ค้นเมื่อ มีนาคม ๑๑, ๒๕๕๖ จาก http://www.rmutphysics.com/physics/oldfront/72/vector.htm

Anton, Bivens and Davis. **Calculus 7th Edition.** John Wiley & Sons, U.S.A, 2002.

Holder, Defranza and Pasachoff. **Calculus 3th Edition.**