เอกสารประกอบการสอน

รายวิชา คณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรม

ศุภมาศ   ปั้นปัญญา

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

๒๕๕๗

บทที่ 1

เวกเตอร์

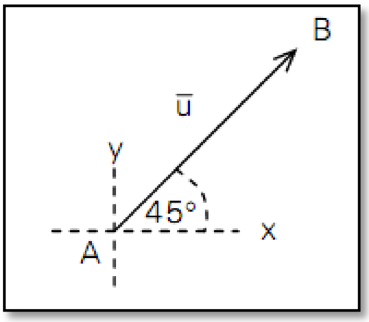
1.1 เวกเตอร์

1.1.1 นิยาม

ปริมาณในโลกมีสองชนิด คือ ปริมาณสเกลาร์ (Scalar Quantity) และปริมาณเวกเตอร์ (Vector Quantity) โดยที่ปริมาณสเกลาร์นั้นระบุเฉพาะขนาดเช่น ระยะเวลา มวล ราคาสิ่งของ แต่ปริมาณเวกเตอร์นั้นจะระบุทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว ความเร่ง โมเมนตัม บทเรียนเรื่องเวกเตอร์นี้เป็นพื้นฐานที่สำคัญของวิชาพื้นฐานทางอุตสาหกรรมและวิศวกรรมทุกสาขา

1.1.2 สัญลักษณ์ของเวกเตอร์

การเขียนปริมาณเวกเตอร์จะใช้รูปลูกศร โดยให้ความยาวลูกศรแทนขนาดและหัวลูกศรชี้บอกทิศทาง การเขียนชื่อเวกเตอร์ตามจุดเริ่มและจุดสิ้นสุดของลูกศร เช่น $\overrightarrow{AB}$ หรือ ใช้ตัวพิมพ์เล็ก (มีขีดด้านบน) ก็ได้เช่น $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ จากภาพเวกเตอร์มี “ขนาด” 4 หน่วย และมี “ทิศทาง” ทำมุม 45° กับแกน x ในทิศทวนเข็มนาฬิกา



ภาพที่ 1.1 การเขียนปริมาณเวกเตอร์

ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $|\bar{u}|$ เวกเตอร์ 2 อันจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน (ไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นเดียวกันและจุดสิ้นสุดเดียวกัน)

ถ้า $\bar{u} = (u_1, u_2)$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้วขนาดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ (magnitude of $\bar{u}$) จะนิยามโดย

$$|\bar{u}| = |u_1, u_2| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้ เมื่อ $\bar{a}$ = (3, 4) และ $\bar{b}$ = (-3, 0)

วิธีทำ จากนิยาม $|\bar{u}| = |u_1, u_2| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$\bar{a}$ = (3, 4) $\bar{b}$ = (-3, 0)

$\bar{a} = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\bar{b} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$

$\bar{a}$ = 5 $\bar{b}$ = 3

1.2 การบวกและลบเวกเตอร์

1.2.1 การบวกเวกเตอร์

สามารถหาผลลัพธ์ได้สองวิธี คือ หัวต่อหาง และหางต่อหาง

การบวกเวกเตอร์ มีสมบัติเหมือนการบวกจำนวนจริงทุกประการ ได้แก่

1. สมบัติปิด คือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้ว a + b เป็นจำนวนเต็มบวก

2.สมบัติการสลับที่ คือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้ว a + b = b + a หรือ $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

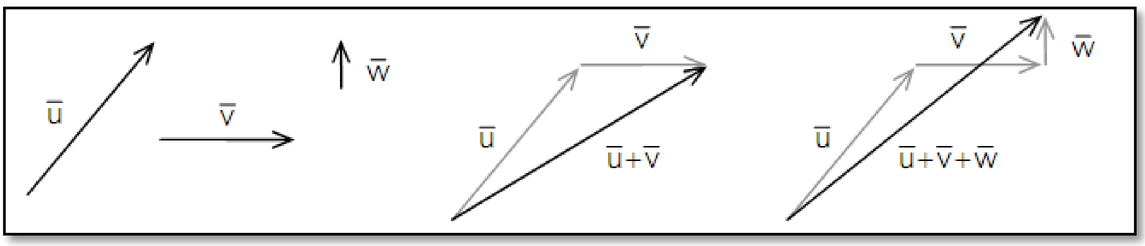
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม คือ ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนใดๆ แล้ว

a + (b + c) = (a + b) + c หรือ $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

4. การมีเอกลักษณ์ เอกลักษณ์การบวกของเวกเตอร์ คือ เวกเตอร์ศูนย์ $\bar{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดศูนย์หน่วย เช่น $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$

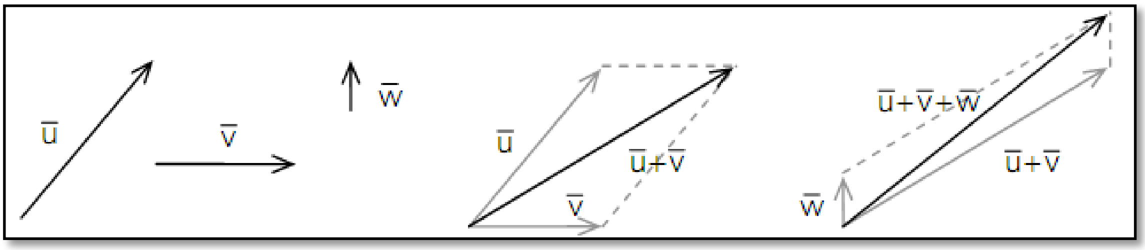
5. การมีอินเวอร์ส คือ นิเสธของ $\bar{u}$ เขียนสัญลักษณ์ว่า $-\bar{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

- หัวต่อหาง ให้นำเวกเตอร์มาเขียนต่อกัน โดยเอาหางลูกศรใหม่มาวางต่อที่หัวลูกศรเดิม เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ คือเวกเตอร์ที่ลากจากหางแรกสุด ไปถึงหัวลูกศรปลายสุด $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



ภาพที่ 1.2 การบวกเวกเตอร์แบบหัวต่อหาง

- หางต่อหาง ให้นำหางเวกเตอร์ชนกัน แล้วต่อเติมรูปให้กลายเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ คือเวกเตอร์ที่ลากจากหางที่ชนกัน ไปสุดแนวทแยงมุมสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{AD}$ = $\overrightarrow{AC}$ ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

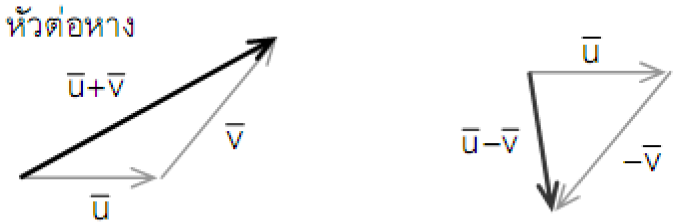


ภาพที่ 1.3 การบวกเวกเตอร์แบบหางต่อหาง

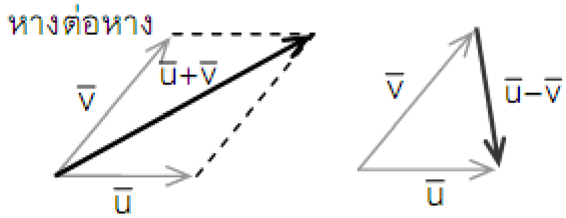
ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดเวกเตอร์ $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ ดังภาพ ให้วาดรูปหา $\overline{u}+\overline{v}$ และ $\overline{u}-\overline{v}$ โดยวิธีหัวต่อหาง และหางต่อหาง

กำหนด เวกเตอร์ $\overline{u}$ ——→ และ เวกเตอร์ $\overline{v}$

วิธีทำ 1. แบบหัวต่อหาง



2. แบบหางต่อหาง



ตัวอย่างที่ 1.3 จงหา $\overline{A}+\overline{B}$ เมื่อกำหนดให้ $\overline{A}$ = (4,-3) และ $\overline{B}$ = (0,5)

วิธีทำ

$\overline{A}+\overline{B}$ = (4,-3) + (0,5)

$\overline{A}+\overline{B}$ = (4+0,-3+5)

$\overline{A}+\overline{B}$ = (4,2)

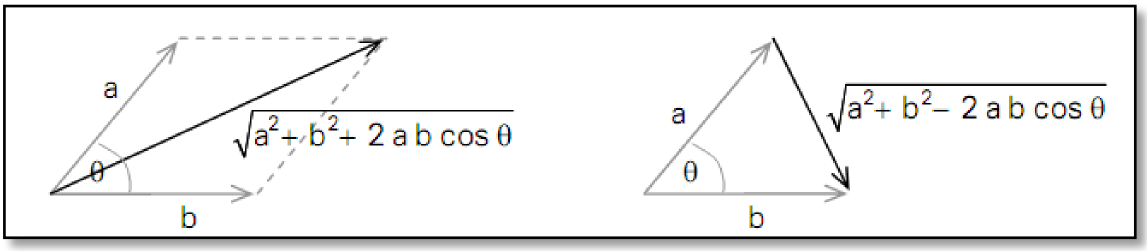
1.2.2 การลบเวกเตอร์

เป็นการบวกด้วยนิเสธ $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-\bar{v})$ ดังนั้นสามารถหาเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากวิธีการบวกทั้งสองวิธี คือหัวต่อหาง และหางต่อหาง

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ หาได้จากกฎของโคไซน์ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

$|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}$ และ $|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}$

เมื่อมุม θ คือมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ และมีขนาดไม่เกิน 180 องศา



ภาพที่ 1.4 กฎโคไซน์

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหา $|\bar{u}+\bar{v}|$ เมื่อ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 0°, 90 ° และ 180 °

วิธีทำ จากเวกเตอร์ลัพธ์ $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}$

มุม 0° $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos 0} = |\bar{u}| + |\bar{v}|$

มุม 90 ° $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos 90} = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2}$

มุม 180 ° $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos 180} = \left||\bar{u}| - |\bar{v}|\right|$

1.3 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้วการคูณเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยสเกลาร์ c จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ c$\vec{A}$ ซึ่งทิศทางของ c$\vec{A}$ จะขึ้นอยู่กับค่าของ c กล่าวคือ

1. ถ้า c = 0 จะได้ c$\vec{A}$ = 0

2. ถ้า c > 0 จะได้ c$\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศเดียวกันกับ $\vec{A}$ แต่มีขนาดเป็น $|c|\cdot|\vec{A}|$

3. ถ้า c < 0 จะได้ c$\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{A}$ และมีขนาดเป็น $|c|\cdot|\vec{A}|$

การคูณด้วยสเกลาร์ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจง เช่นเดียวกับจำนวนจริง นั่นคือ

1. $c\left(b\overline{A}\right)=\left(cb\right)\overline{A}$ 2. $\left(c+b\right)\overline{A}=c\overline{A}+b\overline{A}$ 3. $c\left(\overline{A}+\overline{B}\right)=c\overline{A}+c\overline{B}$

4. $1\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}$ 5. $0\overrightarrow{A} = \vec{0}$

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ $\overrightarrow{A}$ = (3,4) และ $\overrightarrow{B}$ = (2,1) จงหาค่าของ 5 $\overrightarrow{A}$ และ -2 $\overrightarrow{B}$

วิธีทำ

$\overrightarrow{A}$ = (3,4) และ $\overrightarrow{B}$ = (2,1)

5 $\overrightarrow{A}$ = 5(3,4) -2 $\overrightarrow{B}$ = -2(2,1)

5 $\overrightarrow{A}$ = (5×3,5×4) -2 $\overrightarrow{B}$ = (-2×2,-2×1)

5 $\overrightarrow{A}$ = (15,20) -2 $\overrightarrow{B}$ = (-4,-2)

การขนานกันของ 2 เวกเตอร์เวกเตอร์ $\overrightarrow{A}$ จะขนานกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{B}$ ก็ต่อเมื่อทั้ง 2 เวกเตอร์มีระยะห่างระหว่างเวกเตอร์เท่ากัน ซึ่งขนาดของเวกเตอร์ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน และทิศทางก็ไม่จำเป็นต้องเป็นทิศทางเดียวกันก็ได้ความสัมพันธ์ของ “การคูณด้วยสเกลาร์” และ “การขนานกันของเวกเตอร์”

เมื่อ $\overline{u}\neq 0$ และ $\overline{v}\neq 0$ จะได้ทฤษฎีว่า

1. $\overline{u}$ จะขนานกับ $\overline{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีค่า $a\neq 0$ ที่ทำให้ $\overline{u}=a\overline{v}$

2. ถ้า $\overline{u}$ ไม่ขนานกับ $\overline{v}$, หาก $a\overline{u}+b\overline{v}=\overline{0}$ แสดงว่า a = 0 และ b = 0

ตัวอย่างที่ 1.6 กำหนดให้ $\overline{u}+4\overline{v}=3\overline{v}-2\overline{w}$ และ $3\overline{v}-4\overline{w}=2\overline{w}-5\overline{u}$ ถ้า $\left|\overline{w}\right|=12$ จงหาค่า $\left|\overline{u}\right|+\left|\overline{v}\right|+\left|\overline{w}\right|$

วิธีทำ

$\overline{u}+4\overline{v}=3\overline{v}-2\overline{w}$ และ $3\overline{v}-4\overline{w}=2\overline{w}-5\overline{u}$

$2\overline{w}=3\overline{v}-4\overline{v}-\overline{u}$ $3\overline{v}-5\overline{u}=2\overline{w}+4\overline{w}$

$2\overline{w}=-\overline{v}-\overline{u}$ .... (1) $3\overline{v}-5\overline{u}=6\overline{w}$ .... (2)

(1) ×3 = $6\overline{w}=-3\overline{v}-3\overline{u}$ นำสมการที่ (1)- (2)

ดังนั้น $\left|\overline{u}\right|$ = 18, $\left|\overline{v}\right|$ = 6 และ $\left|\overline{w}\right|=12$

$\therefore \left|\overline{u}\right|+\left|\overline{v}\right|+\left|\overline{w}\right|$ = 18 + 6 + 12 = 36

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $\overline{u}\neq\overline{0},\overline{v}\neq\overline{0}$ และ $\overline{u}$ ขนานกับ $\overline{v}$ จงหาค่า x ที่ทำให้สมการ

$\left(x^2+6x-2\right)\overline{u}-\overline{v}=\left(x-2x^2\right)\overline{u}+x\overline{v}$

วิธีทำ $\overline{u}\,//\,\overline{v}$ แสดงว่า สัมประสิทธิ์ $\neq 0$ นั่นคือ

$x^2+6x-2-x+2x^2 \neq 0$ และ $-1-x \neq 0$

$3x^2+5x-2 \neq 0$

$(3x-1)(x+2) \neq 0$

$\therefore x \neq 1/3, -2$ และ -1

1.4 เวกเตอร์กับเรขาคณิต

เราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ พิสูจน์ส่วนประกอบของรูปเรขาคณิตหลายเหลี่ยมได้ รวมทั้งแก้โจทย์ปัญหาประเภท เขียนเวกเตอร์ที่กำหนด ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่นเทคนิคที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาแบบนี้ คือ

1. เขียนเวกเตอร์ที่กำหนด ในรูปผลรวมของเวกเตอร์อื่น แบบใดก็ได้ก่อน

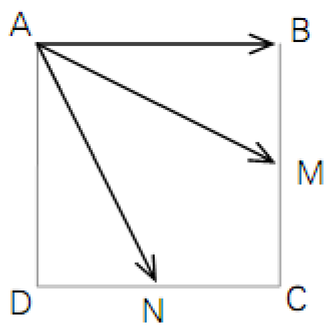
2. พยายามเปลี่ยนเวกเตอร์ที่ไม่ต้องการ เป็นผลรวมของเวกเตอร์ที่ต้องการ ไปทีละขั้นๆ

3. เมื่อเหลือเพียงเวกเตอร์ที่ต้องการแล้ว ก็จัดเป็นรูปอย่างง่าย แล้วจึงตอบ

4. บางครั้งเราต้องอาศัยสมการเวกเตอร์อื่น เพื่อช่วยแปลงให้เป็นเวกเตอร์ที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1.8 สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD มีจุด M และ N อยู่ที่กึ่งกลางด้าน BC และ CD ตามลำดับ จงหา $\overrightarrow{AB}$ ในเทอมของ $\overrightarrow{AM}$ กับ $\overrightarrow{AN}$

วิธีทำ เริ่มต้นเขียน $\overrightarrow{AB}$ ในเทอมของเวกเตอร์ใดๆ ก่อน จากนั้นพยายามเปลี่ยน $\overrightarrow{MB}$ ให้เป็น $\overrightarrow{AM}$ หรือ $\overrightarrow{AN}$ ให้ได้เช่น $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ .... (1)



จากรูป เราเชื่อม $\overrightarrow{MB}$ กับ $\overrightarrow{AN}$ ได้ดังนี้

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MB}$

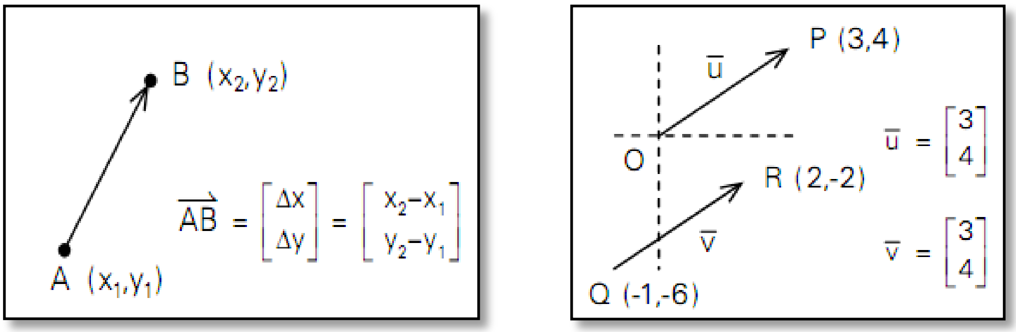
หรือจัดสมการได้ว่า $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ .... (2)

เมื่อแทน (2) ลงใน (1) จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}\right)$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$$

1.5 เวกเตอร์ในพิกัดฉาก และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์ที่ผ่านมาทั้งหมด เป็นการมองในพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate) คืออ้างถึงเวกเตอร์ใดๆ ด้วยค่าขนาด (ความยาว) และทิศทาง แต่นอกจากนั้นเรายังสามารถอ้างถึงเวกเตอร์เหล่านี้ในพิกัดฉาก (Cartesian Coordinate) ได้ด้วยค่าทิศทางในแนวนอน (Δx) และแนวตั้ง (Δy) ดังภาพ



ภาพที่ 1.5 เวกเตอร์ในพิกัดฉากในแนวนอน (Δx) และแนวตั้ง (Δy)

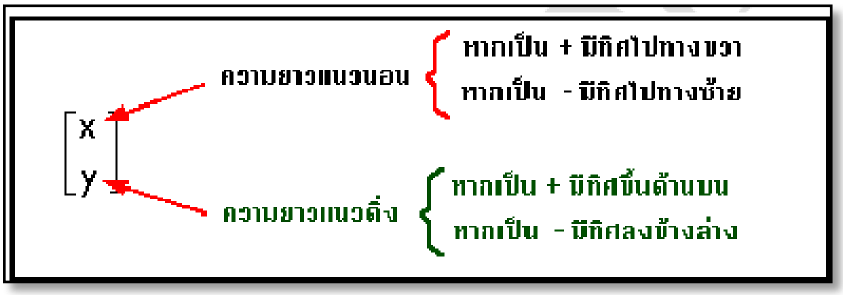
1.5.1 เวกเตอร์พิกัดฉาก (Cartesian Coordinate)ในระบบพิกัดฉากสองมิตินั้น เราอาจเขียนสัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ใดๆ ในรูป $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

โดยที่ x คือความยาวจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสุดท้ายของเวกเตอร์ในแนวนอน

- x มีค่าเป็นบวกแสดงว่ามีทิศไปทางขวามือ
- x มีค่าเป็นลบแสดงว่ามีทิศไปทางซ้ายมือ

และ y คือความยาวจากจุดเริ่มต้นถึงจุดสุดท้ายของเวกเตอร์ในแนวดิ่ง

- y มีค่าเป็นบวกแสดงว่ามีทิศขึ้นไปด้านบน
- y มีค่าเป็นลบแสดงว่ามีทิศลงไปทางด้านล่าง



ภาพที่ 1.6 เวกเตอร์ในพิกัดฉาก ความยาวแนวนอนและความยาวแนวดิ่ง

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว กับพิกัดฉาก

$\Delta x = r\cos\theta$ และ $\Delta y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ และ $\tan\theta = (\Delta y / \Delta x)$

เวกเตอร์สองอันจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ (Δx) เท่ากัน และ (Δy) เท่ากัน เช่น ในภาพ $\bar{u} = \bar{v}$ เวกเตอร์สองอันจะขนานกัน $\bar{u} // \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อความชันเท่ากัน (การขนานกันนั้น มีทั้งแบบทิศเดียวกันและทิศตรงข้ามกัน) และเวกเตอร์สองอันจะตั้งฉากกัน $\bar{u} \perp \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อความชันคูณกันได้ -1

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้เวกเตอร์ AB มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุด A (x_1,y_1) และจุดสุดท้ายอยู่ที่ B (x_2,y_2) จะได้ว่า

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - & x_1 \\ y_2 - & y_1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 1.10 กำหนดให้จุด A (1, 2) และ B (3, 4) แล้ว $\overrightarrow{AB}$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - & x_1 \\ y_2 - & y_1 \end{bmatrix}$ แทนค่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 4-2 \end{bmatrix}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.5.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์ทีมีขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วย เวกเตอร์หน่วยบนระนาบที่มีบทบาทมาก คือ เวกเตอร์ $\bar{i}$ และเวกเตอร์ $\bar{j}$ เมื่อ $\bar{i} = (1,0)$ และ $\bar{j} = (0,1)$ ซึ่งขนาดของเวกเตอร์ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ มีค่าเท่ากับ 1

นั่นคือ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เราสามารถเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ ในรูป ผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{i}$ และ $\bar{j}$ ได้ดังนี้ เช่น $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$

ให้ $\bar{a}=(a_1,a_2)=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}$ และ $\bar{b}=(b_1,b_2)=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}$ จะได้ว่า

1. $(a_1\bar{i}+a_2\bar{j})+(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}) = (a_1+b_1)\bar{i}+(a_2+b_2)\bar{j}$

2. $(a_1\bar{i}+a_2\bar{j})-(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}) = (a_1-b_1)\bar{i}+(a_2-b_2)\bar{j}$

3. $c(a_1\bar{i}+a_2\bar{j})=(ca_1)\bar{i}+(ca_2)\bar{j}$ เมื่อ c เป็นสเกลาร์ใดๆ

ตัวอย่างที่ 1.11 จงหา $\bar{u}+\bar{v}$ และ $8\bar{u}-3\bar{v}$ เมื่อกำหนดให้ $\bar{u}=2\bar{i}-3\bar{j}$ และ $\bar{v}=-4\bar{i}+6\bar{j}$

วิธีทำ

$$\bar{u}+\bar{v} = (2\bar{i}-3\bar{j})+(-4\bar{i}+6\bar{j})$$

$$\bar{u}+\bar{v} = (-2\bar{i}+3\bar{j})$$

$$8\bar{u}-3\bar{v} = 8(2\bar{i}-3\bar{j})-3(-4\bar{i}+6\bar{j})$$

$$8\bar{u}-3\bar{v} = 16\bar{i}-24\bar{j}+12\bar{i}-18\bar{j} = 28\bar{i}-42\bar{j}$$

1.6 ผลคูณเชิงสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์คู่หนึ่ง จะเกิดผลลัพธ์ได้ 2 แบบ คือ

1. การคูณแบบดอท (Dot Product) $\bar{u}\cdot\bar{v}$ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ (ตัวเลข) หรือเรียกว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product)

2. การคูณแบบครอส (Cross Product) $\bar{u}\times\bar{v}$ ยังคงให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ หรือเรียกว่าผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product)

1.6.1 นิยาม

การคูณแบบดอท ในพิกัดฉาก. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=(a\bar{i}+b\bar{j})\cdot(c\bar{i}+d\bar{j})=ac+db$

การคูณแบบดอท ในพิกัดเชิงขั้ว $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ เราสามารถใช้สมการทั้งสองร่วมกัน ในการคำนวณเกี่ยวกับมุม θระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ได้

หมายเหตุ: การหาขนาดผลรวมเวกเตอร์ด้วยกฎของโคไซน์ อาจเขียนใหม่ได้ว่า

$$|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2+2(\bar{u}\cdot\bar{v})}$$

$$|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2-2(\bar{u}\cdot\bar{v})}$$

เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

ภาพที่ 1.7 การหาขนาดผลรวมเวกเตอร์ด้วยกฎของโคไซน์

สมบัติของการคูณเวกเตอร์แบบดอท

- $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$
- $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$
- $a(\bar{u} \cdot \bar{v}) = a\bar{u} \cdot \bar{v}$
- $\bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2$
- $\bar{0} \cdot \bar{u} = 0$
- $\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \bar{u} \perp \bar{v}}$

ตัวอย่างที่ 1.12 จงหา $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\bar{u} = 3\bar{i} - 5\bar{j}, v = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

วิธีทำ จาก
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \left(a\bar{i} + b\bar{j}\right) \cdot \left(c\bar{i} + d\bar{j}\right) = ac + db$$

$\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\qquad \bar{u} \cdot \bar{v}$ = (3×2) + (-4×-3)

$\therefore \bar{u} \cdot \bar{v}$ = 18

และ $\bar{u} = 3\bar{i} - 5\bar{j}, v = -4\bar{i} + 2\bar{j}$ $\qquad \bar{u} \cdot \bar{v}$ = (3×-4) + (-5×2)

$\therefore \bar{u} \cdot \bar{v}$ = -22

ตัวอย่างที่ 1.13 $\bar{u} = -\bar{i} + \bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + x\bar{j}$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เป็น 135 ° จงหาค่าของ x

วิธีทำ จาก
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

$$-2 + x = \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4 + x^2}\right)\cos 135°$$

$x - 2 = -\sqrt{4 + x^2}$ นำไปยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$x^2 - 4x + 4 = 4 + x^2$$

$\therefore$ x = 0

1.7 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์แบบครอส เช่น $\bar{u} \times \bar{v}$ จะยังคงให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์

1.7.1 นิยาม

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

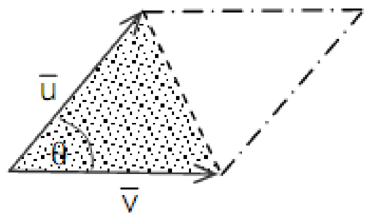
ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ที่ได้ $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ ช่วยคำนวณมุม θ ระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ได้

สมบัติของการคูณเวกเตอร์แบบครอส

- $\bar{u} \times \bar{v} = -(\bar{v} \times \bar{u})$
- $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$
- $a(\bar{u} \times \bar{v}) = a\bar{u} \times \bar{v}$
- $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$
- $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$
- $\bar{0} \times \bar{u} = \bar{0}$
- $\boxed{\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0} \leftrightarrow \bar{u} \,//\, \bar{v}}$

หมายเหตุ : $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$

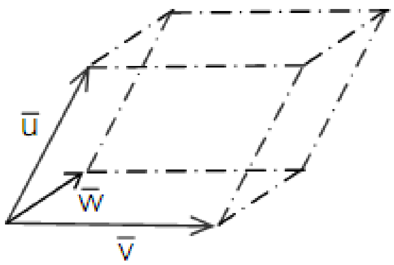
สูตรในการหาพื้นที่สามเหลี่ยม เมื่อมีด้านประชิดเป็น $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ และมุมระหว่างเวกเตอร์เป็น θ คือ $\frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta \to \frac{1}{2}|\bar{u} \times \bar{v}|$ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ $|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta \to |\bar{u} \times \bar{v}|$



ปริมาตรของ ทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน (Parallelepiped) ที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ คือผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ มีค่าเท่ากับ

$$\left|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})\right| = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|$$

หมายเหตุ : หากสลับลำดับเวกเตอร์ไม่ถูกต้อง ผลคูณที่ได้อาจติดลบ จึงต้องใส่ค่าสัมบูรณ์กำกับไว้ด้วย



ตัวอย่างที่ 1.14 ให้หา $\bar{u} \times \bar{v}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ในแต่ละข้อ

1. $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{i} - 5\bar{j}$ 2. $\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} - \bar{k}$

วิธีทำ $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{i} - 5\bar{j}$

เนื่องจาก $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{u}\times\bar{v} = \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}, \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}, \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$

$\bar{u}\times\bar{v} = 0\bar{i}+0\bar{j}-7\bar{k}=-7\bar{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ก็คือ เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{u}\times\bar{v}$ นั่นเอง

$\therefore$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\pm\bar{k}$

$\bar{u}=\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\bar{v}=3\bar{i}-\bar{k}$

เนื่องจาก $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{u}\times\bar{v} = -2\bar{i}-\bar{j}=+6\bar{k}$

$\therefore$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{41}}\left(-2\bar{i}-\bar{j}+6\bar{k}\right)$

ตัวอย่างที่ 1.15 ให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดดังนี้P(1, 2, 3), Q(1, 3, 5) และ R(3, 1, 0)

วิธีทำ P(1, 2, 3), Q(-1, 3, 5) และ R(3, -1, 0)

เนื่องจาก $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$

$\bar{u}\times\bar{v} = \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}, \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}, \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$

$\overrightarrow{PQ}=-2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ $\overrightarrow{PR}=2\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$

สูตรในการหาพื้นที่สามเหลี่ยม $\frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta \rightarrow \frac{1}{2}|\bar{u}\times\bar{v}|$

จาก $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} = 3\bar{i}-2\bar{j}+4\bar{k}$

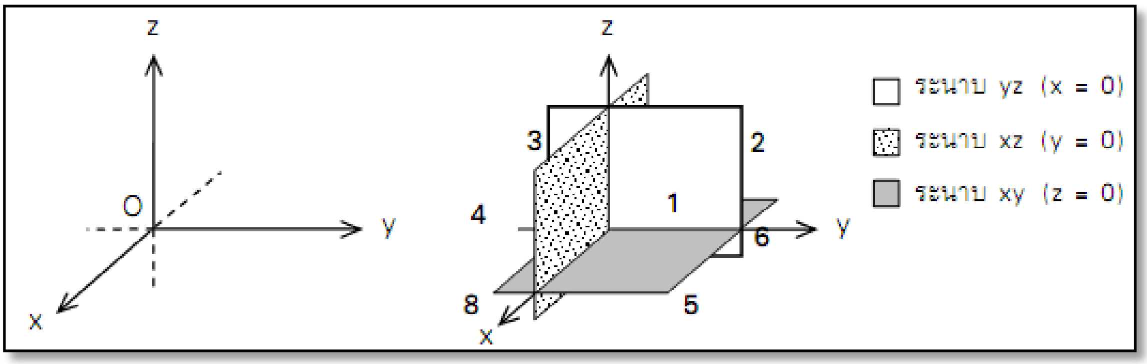
$\therefore$ พื้นที่ $\sqcup$ = $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ ตารางหน่วย

1.8 เวกเตอร์ในพิกัดฉากสามมิติ

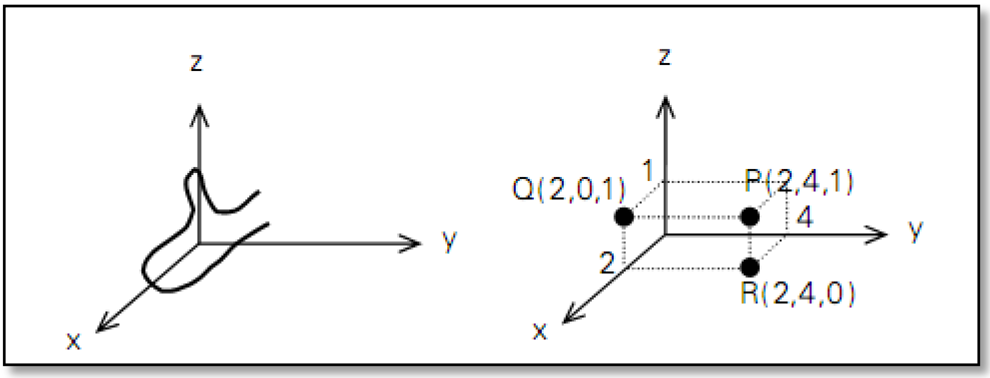
1. ในระนาบ (Plane :R^2) หนึ่งๆ เราจะอ้างถึงตำแหน่งหรือจุดใดๆ ได้ด้วยค่า พิกัด (Coordinate) โดยระบบที่นิยมใช้มากที่สุดคือระบบ พิกัดฉาก (Cartesian Coordinate) ประกอบด้วยแกนอ้างอิง 2 แกนที่ตั้งฉากกัน ณ จุดกำเนิด (จุด O) เรียกชื่อแกนนอนและแกนตั้ง ว่าแกน x และ y ตามลำดับ

2. แกนทั้งสองแบ่งพื้นที่ในระนาบ xy ออกเป็น 4 ส่วน เรียกแต่ละส่วนว่า จตุภาค (Quadrant)

3. การอ้างถึงพิกัดในระบบพิกัดฉาก นิยมเขียนในรูป คู่อันดับ (Ordered Pair) ที่สมาชิกตัวแรกแทนระยะทางในแนว +x และตัวหลังแทนระยะทางในแนว +y เช่น คู่อันดับ (2, 4) แต่ในความเป็นจริงจุดใดๆ ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกันเสมอไป แต่อยู่ใน ปริภูมิสามมิติ (3-Dimensional Space : R^3) ดังนั้นเราจำเป็นต้องใช้พิกัดฉาก 3 มิติซึ่งประกอบด้วยแกน x, y, และ z ตั้งฉากกันที่จุดกำเนิด ระนาบ xy, yz, xz แบ่งปริภูมิออกเป็น 8 ส่วน เรียกแต่ละส่วนว่า อัฐภาค (Octant) โดยอัฐภาคที่ 1-4 และ 5-8 จะมีลำดับเหมือนจตุภาคที่ 1-4 ดังรูป

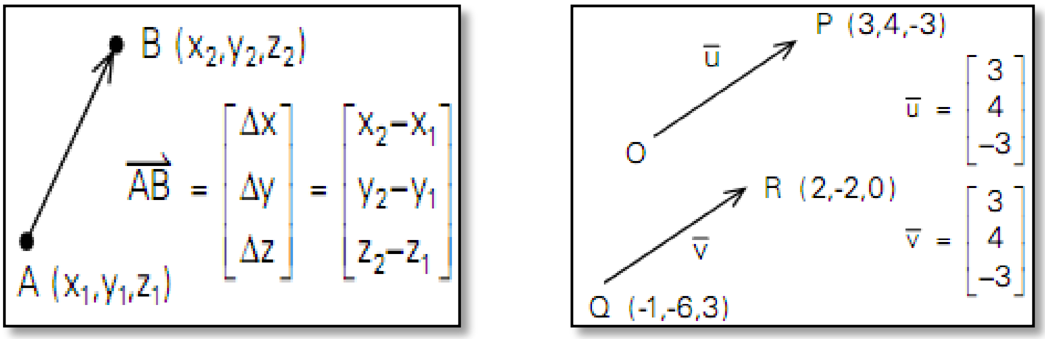


ภาพที่ 1.8 การอ้างถึงพิกัดในระบบพิกัดฉากจุดกำเนิด ระนาบ xy, yz, xz



ภาพที่ 1.9 การอ้างถึงพิกัดในระบบพิกัดฉากคู่อันดับ

หลักในการตั้งลำดับแกนตามมาตรฐานคือ กฎมือขวา (Right Hand Rule) เมื่อแบมือขวาขึ้นตรงๆ และแยกนิ้วโป้งให้ตั้งฉากกับนิ้วชี้ จะได้ว่าปลายนิ้วทั้งสี่ชี้ไปในทิศ +x, ฝ่ามือหันไปในทิศ +y, และนิ้วโป้งชี้ไปในทิศ +z ระบุตำแหน่งสิ่งต่างๆ ด้วย สามสิ่งอันดับ (Ordered Triple) ที่สมาชิกแต่ละตัวแทนระยะทางในแนว +x, แนว +y, และแนว +z ตามลำดับ เช่น สามสิ่งอันดับ (2, 4, 1)เวกเตอร์ในพิกัดฉากสามมิติ จะอ้างถึงด้วย $\Delta x, \Delta y$ และ Δz ดังรูป



ภาพที่ 1.10 การตั้งลำดับแกนตามมาตรฐาน

การคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์สามมิติ

1.เวกเตอร์สองอันจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ Δx เท่ากัน Δy เท่ากันและ Δz เท่ากัน

2. เมื่อกำหนดเวกเตอร์หนึ่งหน่วยบนแต่ละแกนดังนี้

$\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, และ $\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ก็จะเขียนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ได้เป็น $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$

3. ขนาดของเวกเตอร์ $r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ (ใช้เป็นสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด คล้ายทฤษฎีบทปีทาโกรัสใน 2 มิติ)

4.การบวกลบเวกเตอร์ และการคูณด้วยสเกลาร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix} \qquad k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix}$$

5. การคูณแบบดอท

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = (a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}) \cdot (d\bar{i}+e\bar{j}+f\bar{k}) = ad + be + cf$$

และ $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{u}|\cos\theta$ ใช้สมการทั้งสองร่วมกัน ในการคำนวณมุม θ ระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

สังเกตได้ว่าการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิตินั้น คล้ายคลึงกับเวกเตอร์ในสองมิติและสมบัติของเวกเตอร์ก็เป็นเช่นเดียวกันทั้งหมด จะมีเพียงสิ่งเดียวที่ต่างออกไป นั่นคือ *การบอกทิศทางในสามมิติ* จะไม่กล่าวถึงความชัน แต่จะวัดมุมที่เวกเตอร์กระทำกับแกนทั้งสาม เรียกว่า มุมกำหนดทิศทาง (Direction Angle) ได้แก่ มุม α (alpha), β (beta) และ γ (gamma)

มุม αคือมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกน +x

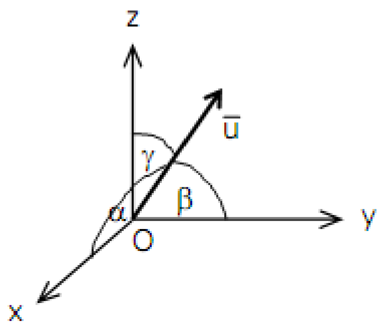
มุม βคือมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกน +y +

มุม γคือมุมที่เวกเตอร์ทำกับแกน +z

อาศัยผลคูณแบบดอท (นำเวกเตอร์ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ มาดอทกับ $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ทีละอัน) จะได้

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\bar{u}|},\quad \cos\beta = \frac{b}{|\bar{u}|},\ \text{และ}\ \cos\gamma = \frac{c}{|\bar{u}|}$$

เรียกค่าทั้งสามนี้ว่า โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction Cosine) มักกล่าวถึงค่าเหล่านี้แทนมุม



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

เวกเตอร์สองอันจะขนานกัน $\bar{u} // \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทั้งชุด..

1. มีค่าตรงกัน (แสดงว่า $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน) หรือ

2. เป็นค่าติดลบของกัน ... (แสดงว่า $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน)

เวกเตอร์สองอันจะตั้งฉากกัน $\bar{u} \perp \bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนดพิกัดจุด P(1,2,3) และ Q(1,3,5) ให้หา

1. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$

2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$

3. เวกเตอร์ขนาด 7 หน่วย ในทิศเดียวกับ $\overrightarrow{QP}$

วิธีทำ เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ} = (-1-1)\bar{i} + (3-2)\bar{j} + (5-3)\bar{k}$

$$\overrightarrow{PQ} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศเดียวกับ $\overrightarrow{PQ}$

$$r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\left(-2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}\right)$$

เวกเตอร์ขนาด 7 หน่วย ในทิศเดียวกับ $\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = -1\left(-2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}\right)$$

$$\overrightarrow{QP} = 2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}$$

$$7\overrightarrow{QP} = \frac{7}{3}\left(2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}\right)$$

ตัวอย่างที่ 1.17 ให้หา $\bar{u}\cdot\bar{v}$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ของ $\bar{u}=-\bar{i}-\bar{k}$ และ $\bar{v}=3\bar{i}+\bar{j}$

วิธีทำ จาก $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\left(a\bar{i}+b\bar{j}\right)\cdot\left(c\bar{i}+d\bar{j}\right)=ac+db$

$$\bar{u}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = -3+0+0 = -3$$

จาก $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cos\theta$$

$$\theta=\arccos\frac{-3}{\sqrt{20}}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

แบบฝึกหัด 1.1

เรื่อง การบวกและการลบเวกเตอร์

1. ให้เขียนเวกเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 40 กม.ต่อ ชม. ไปทางทิศตะวันออก และ 60 กม. ต่อ ชม. ไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้

2. ถ้า $\bar{u}$ แทนระยะทาง 50 กม. ในทิศ 170 ° จะได้ว่า -$\bar{u}$ คือเท่าไร

3. นาย ก ออกเดินทางในทิศ 30 ° เป็นระยะทาง 1,000 กม. แล้วเดินทางต่อในทิศ 150 ° เป็นระยะทาง 500 กม. จงหาว่าเขาอยู่ททางทิศใดของจุดเริ่มต้น และอยู่ห่างเท่าไร

4.เครื่องบินออกแรงบินด้วยความเร็ว 200 กม.ต่อ ชม. ในทิศ 30 ° ถ้ากระแสลงพัดด้วยความเร็ว 50 กม. ต่อ ชม. ในทิศ 330 ° จงหาอัตราเร็วของเครื่องบินที่แท้จริง

5. จงหา $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|$ เมื่อ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน0 ° , 90 ° และ 180 °

6. ถ้า $\bar{u}+\bar{v}+\ \bar{w}=\bar{0}$ และ $\left|\bar{u}\right|=2,\left|\bar{v}\right|=4,\left|\bar{w}\right|=2$ จงหา $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|$ และ $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$

7. กำหนดให้ $\left|\bar{u}\right|=1,\left|\bar{v}\right|=2,\left|\bar{w}\right|=3$, $\bar{w}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ และมีทิศเดียวกับ $\bar{u}$ จงหาค่าของ $\left|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}\right|$

8. ถ้า $\left|\bar{u}\right|=4,\left|\bar{v}\right|=3,\left|\bar{u}+\bar{v}\right|=6$ จงหา $\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$

9. ถ้า $\left|\bar{u}\right|=4,\left|\bar{v}\right|=5$ และ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ จงหา $2\left|\bar{u}+\bar{v}\right|+3\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$

10. ถ้า $\left|\bar{u}\right|=\left|\bar{v}\right|$ จงหามุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ที่ทำให้ $\left|\bar{u}+\bar{v}\right|$ = $2\left|\bar{u}-\bar{v}\right|$

11. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มี O เป็นจุดกึ่งกลาง และ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$ หน่วย เวกเตอร์ใดต่อไปนี้ยาวกว่า 4 หน่วย

ก. $\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{FD}\right|$ ข. $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{ED}\right|$

ค. $\left|\overrightarrow{FO}\right|+\left|\overrightarrow{DO}\right|$ ง. $\left|\overrightarrow{OD}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|$

แบบฝึกหัด 1.2

เรื่อง การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. กำหนดให้ $\bar{u}\neq\bar{0},\bar{v}\neq\bar{0}$ และ $\left(x^2-5\right)\bar{u}-\bar{v}=\left(1-x\right)\bar{u}-3\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ จะขนานกับ $\bar{v}$ เมื่อ x มีค่าเท่าใด

2. กำหนดให้ $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ และ $(x^2-5)\bar{u}-\bar{v}=(1-x)\bar{u}-3\bar{v}$ แล้ว $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ จะมีทิศทางเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเท่าใด

3. $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน ถ้า $\frac{2}{5}\bar{u}+(6-3x^2)\bar{v}=100\bar{u}+\frac{2}{3}\bar{v}$ จงหาค่า x

4. กำหนดให้ $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x\bar{u}+(x-8)\bar{v}=(2+2y)\bar{u}-y\bar{v}$

5. กำหนดให้ $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกัน ถ้า $3\bar{u}+8\bar{v}=a(3\bar{u}+\bar{v})+b(\bar{u}-2\bar{v})$ จงหาค่า a และ b

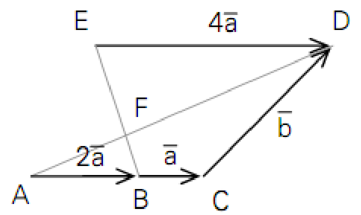
6. ถ้า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ และ $\bar{w}=(a+4b)\bar{u}+(2a+b+1)\bar{v}$,
$\bar{s}=(b-2a+2)\bar{u}+(2a-3b-1)\bar{v}$ จงหาค่าa กับ b ที่ทำให้ $3\bar{w}=2\bar{s}$

แบบฝึกหัด 1.3

เรื่อง เวกเตอร์กับเรขาคณิต

1. สี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD มีจุด P เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกัน จุด O อยู่บนด้าน AB โดย $AQ:QB=3:5$ถ้า $\overrightarrow{AB}=\bar{u}$ และ $\overrightarrow{AD}=\bar{v}$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ ในรูปของ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

2. จากภาพ $|\overrightarrow{EF}|:|\overrightarrow{FB}|=2:1$ จงหา $\overrightarrow{AF}$ ในรูปผลรวมของ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$



3. สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ให้ $\overrightarrow{AB}=\bar{a}$และ $\overrightarrow{AC}=\bar{b}$ ถ้า $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ คือ มัธยฐานของสามเหลี่ยม ตัดกันที่จุด O จงเขียน $\overrightarrow{DO}$ ในรูปของ $\bar{a}$ กับ $\bar{b}$

4. สี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด E อยู่บน $\overrightarrow{CB}$โดย $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, จุด F เป็นจุดตัดของ $\overrightarrow{AC}$ กับ $\overrightarrow{DE}$ หาก $\overrightarrow{EF}=a\overrightarrow{ED}$ และ$\overrightarrow{CF}=b\overrightarrow{CA}$ จงหาค่า a กับ b

5. ให้ D เป็นจุดแบ่งด้าน AC ของสามเหลี่ยม ABC โดยที่$|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DC}|=m:n$ จงหา $\overrightarrow{BD}$ในเทอมของ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{BC}$

แบบฝึกหัด 1.4

เรื่องเวกเตอร์ในพิกัดฉาก และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. จงเขียน $\overrightarrow{PQ}$ ให้อยู่ในระบบแกนฉาก เมื่อกำหนดจุดดังนี้

1.1 P(2,4), Q(3,7) 1.2 P(2,3), Q(4, 5)

2. ถ้า $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ ให้หา

2.1 จุดเริ่มต้น เมื่อสิ้นสุดที่Q(2, 5) 2.2 จุดสิ้นสุด เมื่อเริ่มต้นที่ P(4, 6)

3. คู่อันดับ A(3, 4), B(6,3), C(7, 1) จงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ พร้อมขนาด

4. $\bar{u}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$, $\bar{v}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$, $\bar{w}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ จงหา $\left|2\bar{u}-3\bar{v}+\bar{w}\right|$ และ $\left|2\bar{u}\right|-\left|3\bar{v}\right|+\left|\bar{w}\right|$

5. เวกเตอร์ในแต่ละข้อ ขนานกันหรือไม่ ถ้าขนานให้บอกว่ามีทิศเดียวกันหรือตรงข้ามกัน

5.1 $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$ 5.2 $\begin{bmatrix}-4\\0\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

5.3 $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$ 5.4 $\begin{bmatrix}7\\-14\end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

6. ให้เขียนเวกเตอร์ $\bar{w}=\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\bar{u}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

7. กำหนดให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix},\bar{w}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$

7.1 $\bar{u}$ 7.2 $\bar{v}$ 7.3 $\bar{w}$

7.4 $\bar{u}+\bar{v}$ 7.5 $2\bar{u}-\bar{w}$

8. กำหนดคู่อันดับ $A(-1,2),B(-4,-2),C(-3.4),D(2,-16/3)$ จงหา

8.1 $2\overline{AB}-3\overline{CD}$.ในรูป $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$ 8.2 $\left|2\overline{AB}-3\overline{CD}\right|$

9. กำหนดจุด P(c,d) และ Q(c + a, d+b) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศตรงข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$

แบบฝึกหัด 1.5

เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์

1. กำหนดคู่อันดับ A(3, 2), B(3,5), C(2,4) จงหา

1.1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 1.2 $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right)$

2. ถ้า $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 60 ° และ $|\bar{u}|=2,|\bar{v}|=3$ จงหามุมระหว่าง $\bar{v}-\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

3. $\bar{u}=\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix},\bar{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{w}=-11$ และ $\bar{v}\cdot\bar{w}=8$ จงหา $|\bar{w}-\bar{v}|$

4. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มี $\overrightarrow{AB}=\bar{u},\overrightarrow{BC}=\bar{v},\overrightarrow{CA}=\bar{w}$ โดย $|\bar{u}|=7,|\bar{w}|=15$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v}=28$ จงหาค่า $\bar{w}\left(\bar{v}-2\bar{u}\right)$

5. ถ้า $\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}=\bar{0},|\bar{u}|=2,|\bar{v}|=3,|\bar{w}|=4$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

6. จงแสดงว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยอาศัยการคูณเวกเตอร์ เมื่อกำหนดคู่อันดับดังนี้ A(2,2), B(6,4), C(10, 14) และให้บอกว่ามุมใดเป็นมุมฉาก

7. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมตามที่กำหนด

7.1 สามเหลี่ยม OAB เมื่อ $\overrightarrow{OA}=3\bar{i}+5\bar{j},\overrightarrow{OB}=8\bar{i}+2\bar{j}$

7.2 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อ $\overrightarrow{AB}=2\bar{i}+2\bar{j},\overrightarrow{AC}=-3\bar{i}+3\bar{j}$

7.3 สามเหลี่ยมที่มี $\bar{u}+\bar{v}$ กับ $\bar{u}-\bar{v}$ เป็นด้านสองด้าน เมื่อ $\bar{u}=2\bar{i}-\bar{j},\bar{v}=\bar{i}+\bar{j}$

8. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j},\bar{b}=4\bar{i}-3\bar{j}$ และ $\bar{c}=-5\bar{i}+5\bar{j}$ ถ้า $\bar{a}\perp\bar{b},|\bar{a}|=3$ และ $\bar{a}\cdot\bar{c}>0$ จงหาค่า x + y

9. $\bar{u}=3\bar{i}-4\bar{j},\bar{v}=2\bar{i}-3\bar{j}$ ถ้า $\bar{a}$ เป็น unit vector ที่ตั้งฉากกับ $\bar{u}$ จงหาค่า $\bar{v}\cdot\bar{a}$

แบบฝึกหัด 1.6

เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. กำหนด $\bar{u}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$ และ $\bar{v}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$

1.1 $\bar{u}\times\bar{v}$ 1.2 ค่า sin ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

1.3 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด่นประชิดเป็น $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

2. ให้หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดนี้ $A(2.0.3),B(1,4,5),C(7,2,9)$

3. ให้หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อกำหนด

3.1 $A(2.0.-3),B(1,4,5),C(7,2,9)$ 3.2 $\overrightarrow{AB}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{DA}=-\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$

4. ให้หาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน ที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์ดังนี้

$\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{w} = \bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$

แบบฝึกหัด 1.7

เรื่อง เวกเตอร์ในพิกัดฉากสามมิติ

1. กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + 3\bar{j}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ ให้หา

1.1 $|\bar{u} + \bar{v}|$ 1.2 $|\bar{u}| + |\bar{v}|$

1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{v}$ 1.4 ขนาดมุมระหว่าง $\bar{u} + \bar{v}$ กับ $\bar{v}$

2. ให้หา $\bar{u} \cdot \bar{v}$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ ของ $\bar{u} = -2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

3. กำหนด $\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{w} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$ ให้พิจารณาว่าเวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ตั้งฉากกัน

4. รูปสามเหลี่ยมที่มีจุด A(2, 1,1), B(7,0, 2) และ C(3,2, 1) เป็นจุดยอด, เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ถ้าเป็นมุมใดเป็นมุมฉาก

5. ให้หาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = -4\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k}$ และพิจารณาว่าเวกเตอร์ดังกล่าวขนานกันหรือไม่

บทที่ 2

เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์

2.1 เมตริกซ์

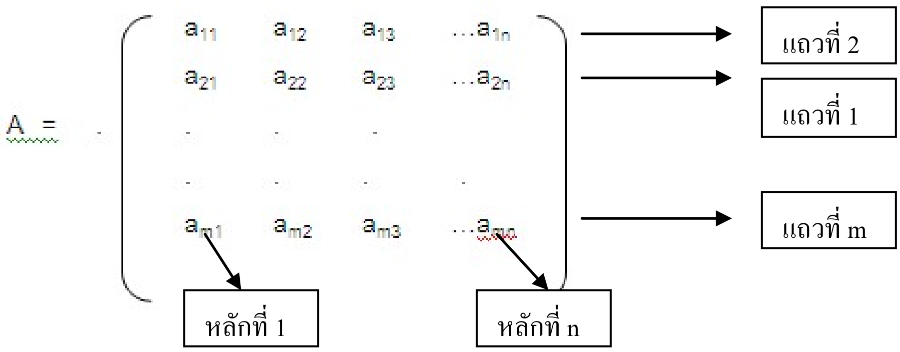
2.1.1 นิยาม

เมตริกซ์ หมายถึง การแสดงข้อมูลหรือตัวเลขชุดหนึ่งหรือกลุ่มหนึ่งด้วยการจัดลำดับของตัวเลขให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแถวนอน (Row) และแนวหลัก(Column) ตัวอย่าง เมตริกซ์ A, B และ C ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2.1.2 สัญลักษณ์ของเมตริกซ์

สัญลักษณ์ของเมตริกซ์ (symbol of matrix) หมายถึงสิ่งที่ใช้บ่งบอกความเป็นเมตริกซ์หรือการเขียนเมตริกซ์อันประกอบด้วยสัญลักษณ์ของเมตริกซ์สัญลักษณ์ที่มีความหมายเฉพาะตัวเพื่อนำไปสู่เมตริกที่สมบูรณ์โดยเครื่องหมาย ( )หรือ [ ] ปิดล้อมไว้ กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ ประกอบด้วย m แถว และ n หลัก



ลักษณะทั่วไปของเมตริกซ์

1. ใช้อักษร A, B, C, ...แทนชื่อเมตริกซ์และใช้ตัวอักษรพิมพ์เล็ก a, b, c , ... แทนสมาชิกของเมตริกซ์ เช่น

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}\text{หลักที่1} & \text{หลักที่2} & \text{หลักที่3}\end{matrix} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{matrix}\text{แถวที่ 1} \\ \text{แถวที่ 2}\end{matrix} \end{array}$$

ตัวเลข 2 หลักที่เขียนกำกับอยู่ด้านล่างขวาของ a ทำหน้าที่บ่งบอกถึงตำแหน่งของสมาชิกในเมตริกซ์ โดยเลขตัวแรกบ่งบอกตำแหน่งแถวที่เท่าใด และตัวเลขตัวหลังบ่งบอกตำแหน่งหลักที่เท่าใด เช่น

a_{11} เป็นสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1

a_{21} เป็นสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 1

ถ้ากำหนดให้ a_{ij} เป็นสมาชิกใดๆ ของเมตริกซ์ A แล้ว หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถว i และหลัก j ของเมตริกซ์

2. สมาชิกในแต่ละแถวของเมตริกซ์ A จะประกอบด้วยจำนวน n จำนวนเท่ากันทุกแถว และแต่ละหลักของเมตริกซ์ A จะประกอบด้วยจำนวน m จำนวนเท่ากันทุกหลัก

3. ขนาดของเมตริกซ์ไม่ได้บอกเป็นจำนวนตัวเลขหรือจำนวนจริง แต่บอกเป็นขนาดในรูปจำนวนแถวและจำนวนหลักของเมตริกซ์นั้นๆ เช่น A เป็นเมตริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิก m แถว และ n หลัก เมตริกซ์นี้จะมีสมาชิกทั้งหมด mn จำนวน

หมายเหตุ มิติของเมตริกซ์ = จำนวนแถว × จำนวนหลัก หรือ $A_{m \times n}$

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดเมตริกซ์ A และ B ให้ จงตอบคำถามต่อนี้ไปเกี่ยวกับเมตริกซ์

1. A มีมิติของเมตริกซ์เท่าไร และ a_{11}, a_{21} มีค่าเท่าไร

2. B มีมิติของเมตริกซ์เท่าไร และ b_{12}, b_{22}มีค่าเท่าไร

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ 1. A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ 3×2 เพราะ A มี 3 แถว และ 2 หลัก

a_{11} = 2 เพราะหมายถึง สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1 ของเมตริกซ์ A

a_{21} = 1 เพราะหมายถึง สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของเมตริกซ์ A

2. B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ 3×2 เพราะ B มี 3 แถว และ 2 หลัก

b_{12} = 1 เพราะหมายถึง สมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของเมตริกซ์ B

b_{22} = -1 เพราะหมายถึง สมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 2 ของเมตริกซ์ B

2.2 ชนิดของเมตริกซ์

โดยทั่วไปสามารถแบ่งเมตริกซ์ตามลักษณะของเมตริกซ์ได้ ดังต่อนี้

1. เมตริกซ์แถว (Row Matrix) คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกแถวเพียงแถวเดียว หรือ เมตริกซ์ที่มีขนาด $1\times n$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. เมตริกซ์หลัก (Column Matrix) คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกหลักเพียงหลักเดียว หรือ เมตริกซ์ที่มีขนาด $m\times 1$ เช่น

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.เมตริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด และเมตริกซ์ศูนย์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ 0 เช่น

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลักหรือ เมตริกซ์ที่มีขนาด $n\times n$ หรือเมตริกซ์ขนาด n เช่น

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

5. เมตริกซ์เฉียง (Diagonal Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกอยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์

เส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal) คือ สมาชิกในตำแหน่ง $a_{11}, a_{22}, a_{33},\ldots, a_{nn}$ ของเมตริกซ์จัตุรัส

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. สเกลาร์เมตริกซ์ (Scalar Matrix) คือ เมตริกซ์เฉียงที่มีสมาชิกในตำแหน่งเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันหมด เช่น

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

7. เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีในตำแหน่งเส้นทแยงมุมหลัก มีค่าเป็น 1 ทั้งหมด ส่วนสมาชิกในตำแหน่งอื่นมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด กำหนดให้ I_nเป็นสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด n×n

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 การเท่ากันของเมตริกซ์

เมตริกซ์ A และ B จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีมิติเดียวกันหรือมีขนาดเท่ากันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันนั่นคือ A = B ก็ต่อเมื่อ $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2^{-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sqrt{16} & \sqrt{25} \\ \sqrt{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A = B เพราะว่า - เมตริกซ์ A และ B มีมิติหรือขนาดเท่ากัน คือ 2×2

- สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันทุกคู่

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{16} \\ \sqrt{4} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$C \neq D$ เพราะว่าสมาชิกในตำแหน่งแถวที่2 หลักที่ 2 มีค่าไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าเมตริกซ์ C และ D จะมีมิติหรือขนาดเท่ากันก็ตาม

สรุป เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

1. เมตริกซ์ทั้งสองมีมิติหรือขนาดเท่ากัน

2. สมาชิกในตำแหน่งหลัก และแถว มีค่าเท่ากันทุกคู่

ตัวอย่าง 2.2 ให้ A = $\begin{bmatrix} x+y & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 8 & \sqrt{16} \\ 1 & x-y \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์ A เท่ากับ เมตริกซ์ B

วิธีทำ ถ้า A = B สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันจะมีค่าเท่ากันคือ

$$x + y = 8 \quad \text{..........(1)}$$

$$x - y = 6 \quad \text{...........(2)}$$

สมการที่ (1) + (2) ; $2x = 14$

$$x = 7$$

สมการที่ (1) - (2) ; $2y = 2$

$$y = 1$$

นั่นคือ A = B ก็ต่อเมื่อ x = 7 และ y = 1

ตัวอย่างที่ 2.3 ให้C = $\begin{bmatrix} 6x^2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ D = $\begin{bmatrix} 9x-y \\ y \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y เมื่อกำหนดให้ เมตริกซ์ C เท่ากับ เมตริกซ์ D

วิธีทำ ถ้า C = D สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันจะมีค่าเท่ากันคือ

$$6x^2 = 9x-y \quad \text{..........(1)}$$

$$3 = y \quad \text{...........(2)}$$

แทนค่า y= 3 ในสมการที่ (1)

$$6x^2 = 9x-3$$

$$6x^2-9x+3 = 0$$

$$(6x-3)(x-1) = 0$$

$$6x-3 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x-1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad x = 1$$

ดังนั้น C = D ก็ต่อเมื่อ x = $\frac{1}{2}$ หรือ x = 1 และ y = 3

ตัวอย่างที่ 2.4กำหนดให้ E = $\left[e_{ij}\right]_{2\times 2}$ เมื่อ e_{ij} = (i-j)^2

F=$\left[f_{ij}\right]_{2\times 2}$ เมื่อ f_{ij} = $\begin{cases}0, i=j\\1, i\neq j\end{cases}$ จงแสดงว่า E= F

วิธีทำ ให้ E = $\left[e_{ij}\right]_{2\times 2}$ = $\begin{bmatrix}e_{11} & e_{12}\\e_{21} & e_{22}\end{bmatrix}$ เมื่อ e_{ij} = (i-j)^2 ดังนั้น

e_{11} = (1-1)^2 = 0 e_{12} = (1-2)^2 = 1

e_{21} = (2-1)^2 = 1 e_{22} = (2-2)^2 = 0

$\therefore$ E = $\begin{bmatrix}e_{11} & e_{12}\\e_{21} & e_{22}\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

ให้ F = $\left[f_{ij}\right]_{2\times 2}$ = $\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}$ เมื่อ f_{ij} = $\begin{cases}0, i=j\\1, i\neq j\end{cases}$ ดังนั้น

f_{11} = 0 (เพราะ 1=1) f_{12} = 1 (เพราะ $1\neq 2$)

f_{21} = 1 (เพราะ $2\neq 1$) f_{22} = 0 (เพราะ 2=2

$\therefore$ F = $\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

ดังนั้น E = F เพราะว่า $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

2.4 การคูณจำนวนคงที่กับเมตริกซ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใดๆ และ k เป็นจำนวนค่าคงที่ แล้ว kA คือการคูณเมตริกซ์ A กับจำนวนค่าคงที่ โดยนำจำนวนค่าคงที่คูณกับสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์ A และขนาดหรือมิติของเมตริกซ์ยังคงเท่าเดิม เช่น

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix},\ k = 3,\ 3A = \begin{bmatrix}3\times 1 & 3\times 3 & 3\times 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 9 & 0\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & -2\end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์ 2A, -3A และ $\frac{1}{2}$A

วิธีทำ ให้ค่าคงที่ (k) = 2, -3 และ $\frac{1}{2}$ ตามลำดับ

1. 2A = $2\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & -2\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}2\times 2 & 2\times 1\\2\times 4 & 2\times -2\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}4 & 2\\8 & -4\end{bmatrix}$

2. -3A = $-3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -3\times 2 & -3\times 1 \\ -3\times 4 & -3\times -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 1 \\ \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}\times -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

2.5 การบวกและลบเมตริกซ์

2.5.1 การบวกเมตริกซ์

กำหนดให้ เมตริกซ์ A= $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ เมตริกซ์ B= $\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ จะได้ว่า

$$\boxed{A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}}$$

เช่น ให้ A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

สรุป การบวกกันของเมตริกซ์ มีเงื่อนไขดังนี้

1. เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ จะต้องมีมิติหรือขนาดเท่ากัน
2. นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันแต่ละเมตริกซ์มาบวกกันเป็นคู่ๆ จนครบทุกคู่

ตัวอย่าง 2.6 จงหาค่าของ เมตริกซ์ A บวกกับ เมตริกซ์ B เมื่อกำหนดให้

A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

วิธีทำ A และB มีขนาดเท่ากัน คือ 3×3

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+2) & (4+1) & (6+5) \\ (1+-3) & (3+4) & (7+5) \\ (-3+-4) & (-2+0) & (5+6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 11 \\ -2 & 7 & 12 \\ -7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.7 กำหนดให้

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

จงแสดงว่า (C+D)+E = C+(D+E)

วิธีทำ

$$C + D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -11 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(C+D)+E = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -11 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D + E = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C+(D+E) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(C+D)+E = C+(D+E) = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -11 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.8 กำหนดสมการเมตริกซ์

$\begin{bmatrix} 2u-1 & 2x \\ 0 & -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+u & 0 \\ 4z & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 5x \\ 7z & 2y \end{bmatrix}$ จงหาค่าตัวแปร u, x, y และ z

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 2u-1 & 2x \\ 0 & -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ z & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+u & 0 \\ 4z & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u & 5x \\ 7z & 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2u-1+5 & 2x+(-2) \\ 0+z & -y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+u+(-u) & 0+5x \\ 4z+7z & -2+2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2u+4 & 2x-2 \\ z & -y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5x \\ 11z & -2+2y \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์มีมิติเท่ากัน สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังนี้

2u+4 = 3   z = 11z   2x-2 = 5x   -y+3 = -2+2y

2u = 7   0 = 10z   -3x = 2   5 = 3y

u $= \frac{7}{2}$ z = 0   x = $-\frac{2}{3}$ y = $\frac{5}{3}$

$\therefore$ จะได้ว่า u = $\frac{7}{2}$, z = 0, x = $-\frac{2}{3}$ และ y = $\frac{5}{3}$

2.5.2 การลบเมตริกซ์

ถ้าเมตริกซ์ A และ B มีขนาดเท่ากันแล้ว ดังนั้น

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

สรุป การลบกันของเมตริกซ์ มีเงื่อนไขดังนี้

1. เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ จะต้องมีมิติหรือขนาดเท่ากัน
2. นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันแต่ละเมตริกซ์มาลบกันเป็นคู่ๆ จนครบทุกคู่

ตัวอย่าง 2.9 กำหนดให้ F = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ G = $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ F – G = F + (-G)

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2-(-5)) & (-3-(-2)) \\ (1-1) & (0-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ดังนั้น F – G = F + (-G) = $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 2.10 กำหนดสมการเมตริกซ์ให้ $2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงหาค่า x และ y

วิธีทำ $$2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x-5 \\ 2y-(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -3 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์มีมิติเท่ากัน สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังนี้

2x-5 = 12 2y-(-6) = -3

2x = 17 2y = -9

x $= \frac{17}{2}$ y $= -\frac{9}{2}$

$\therefore$ จะได้ x $= \frac{17}{2}$ y $= -\frac{9}{2}$

2.6 สมบัติของเมตริกซ์

กำหดให้เมตริกซ์ A, B, C และ $\underline{O}$ มีมิติหรือขนาดเท่ากัน k เป็นจำนวนค่าคงที่ใดๆ

1. k(A+B) = kA + Kb
2. k $\cdot \underline{O}$ = $\underline{O}$
3. 0 ·A = $\underline{O}$
4. A + B = B + A
5. (A+B)+C = A+(B+C)
6. A + $\underline{O}$ = A
7. A + (-A) = $\underline{O}$

ตัวอย่าง 2.11 กำหนดเมตริกซ์A และ B ให้จงหาเมตริกซ์ X เมื่อ 2X + B = 3(A +X)

A $= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ B $= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 2X + B = 3(A +X)

$$2X + B = 3A + 3X$$

$$B - 3A = 3X - 2X$$

$$X = B - 3A$$

แทนค่า A และ B ลงในสมการ

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 3 & 0 & 9 \\ 15 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} (0-3) & (3-(-6)) & (1-12) \\ (1-3) & (0-0) & (-2-9) \\ (-4-15) & (-1-(-9)) & (5-3) \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -11 \\ -2 & 0 & -11 \\ -19 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

2.7 การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์

2.7.1 นิยาม

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ใด ๆ การนำเมตริกซ์ A มาคูณกับเมตริกซ์ B จะเกิดผลขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่างต่อไปนี้

1. ไม่สามารถหาผลคูณได้

2. สามารถหาผลคูณได้

มิติของเมตริกซ์ที่นำมาหาผลคูณถ้า A เป็นเมตริกซ์ $m \times p$ B เป็นเมตริกซ์ $q \times n$ ผลคูณ AB จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $p \times q$ และ AB จะมีมิติ $m \times n$

- โดยที่ สมาชิกของผลคูณของเมตริกซ์ในแถวที่ i หลักที่ j จะเกิดสมาชิกในแถวที่ i ของเมตริกซ์ที่อยู่หน้า คูณกับสมาชิกในหลักที่ j ของเมตริกซ์หลักเป็นคู่ๆ แล้วนำมาบวกกัน

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2p} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mp} \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{pn} \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{mn} \end{bmatrix}}$$

หมายเหตุ : A คูณกับ B ได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B และผลลัพธ์ C จะมีขนาดเท่ากับ (แถวของ A) × (หลักของ B)

$$A_{1\times 2} \times B_{2\times 2} = C_{1\times 2}$$

ตัวอย่างที่ 2.12 กำหนด A = $\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

วิธีทำ จาก $A_{1\times 2}$คูณกับ $B_{2\times 2}$เท่ากับ $C_{1\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB = \left[\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}}_{\text{แถว 1A}} \underbrace{\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}}_{\text{หลัก 1B}} \ \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}}_{\text{แถว 1A}} \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}}_{\text{หลัก 2B}} \right]$$

$$AB = \left[(1\times 3)+(3\times 5)\ \ (1\times 1)(3\times 2)\right]$$

$$AB = \left[3+15\ \ 1+6\right] \quad = \quad \begin{bmatrix}18 & 7\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.13 กำหนดเมตริกซ์ A, B และ C ให้ดังต่อไปนี้ จงหา AB

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

วิธีทำ จาก $A_{2\times 2}$คูณกับ $B_{2\times 3}$เท่ากับ $C_{2\times 3}$

$$AB = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}(2\times 3)+(1\times 4) & (2\times 2)+(1\times 1) & (2\times 3)+(1\times 5)\\ (3\times 3)+(0\times 4) & (3\times 2)+(0\times 1) & (3\times 3)+(0\times 5)\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}(6)+(4) & (4)+(1) & (6)+(5)\\ (9)+(0) & (6)+(0) & (9)+(0)\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 11 \\ 9 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2.7.2 เมตริกซ์ยกกำลัง

กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$A^n = A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots A$ นำ A จำนวน n เมตริกซ์คูณกัน

ตัวอย่างที่ 2.14 กำหนดให้A $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่า A^3

วิธีทำ $A^3 = A \cdot A \cdot A$ หา A^2 ก่อน

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times2)+(1\times3) & (2\times1)+(1\times0) \\ (3\times2)+(0\times3) & (3\times1)+(0\times0) \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ นำคูณกับ A

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times7)+(1\times6) & (2\times2)+(1\times3) \\ (3\times7)+(0\times6) & (3\times2)+(0\times3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น A^3 มีค่าเท่ากับ $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 21 & 6 \end{bmatrix}$

2.7.3 สมบัติการคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์

1. (kA)+B = k(AB) =A(kB)
2. A(BC) = (AB)C
3. A(B+C) = AB + AC
4. AI =IA = A
5. $A\underset{\sim}{O}$ = $\underset{\sim}{O}$

2.8 สลับเปลี่ยนของเมตริกซ์

2.8.1 นิยาม

เมตริกซ์สลับเปลี่ยน (*ทรานสโพส*) คือเมตริกซ์ที่ได้จากการสลับสมาชิก จากแถวเป็นหลัก และจากหลักเป็นแถว ของเมตริกซ์ต้นแบบ เมตริกซ์สลับเปลี่ยนของAที่มีมิติ$m\times n$จะเขียนแทนด้วยA^{T} (บางครั้งอาจพบในรูปแบบA^{t}, A^{tr}, ${}^{t}A$หรือA') ซึ่งจะมีมิติเป็น$n\times m$ (สลับกัน) นิยามโดย

$$A^{\mathbf{T}}_{ij} = A_{ji}$$

สำหรับทุกค่าของiและjที่ $1 \le i \le n$และ $1 \le j \le m$ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 2.14 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\\ -6 & 7\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 5\\ -3 & 0\end{bmatrix}$

จงหาค่าของ $(A+B)^T$ และ A^T+B^T

วิธีทำ ทำ $(A+B)$ ก่อน $(A+B) = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\\ -6 & 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 5\\ -3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\\ -9 & 7\end{bmatrix}$

$$(A+B)^T = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\\ -9 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & -9\\ 1 & 7 & 7\end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 2\\ -6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ -3 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix}0 & 4\\ -1 & 5\\ -3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & -3\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(A+B)^T$ มีค่าเท่ากับ $A^T + B^T$ คือ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

2.8.2 สมบัติการทรานสโพส

กำหนดให้เมตริกซ์*A*, *B*และสเกลาร์*c*คุณสมบัติของเมตริกซ์สลับเปลี่ยนมีดังนี้

1. เมตริกซ์ที่สลับเปลี่ยนสองครั้งจะได้เมตริกซ์ต้นแบบ

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$$

2. การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์มีคุณสมบัติการกระจายในการบวก เมื่อเมตริกซ์ทั้งสองสามารถบวกกันได้

$$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$$

3. การสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์มีคุณสมบัติการกระจายในการคูณเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้ โปรดสังเกตว่าลำดับของการคูณจะเรียงย้อนกลับ ไม่ว่าจะมีกี่เมตริกซ์ก็ตาม

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

4. การสลับเปลี่ยนของสเกลาร์ ก็จะได้สเกลาร์ตัวเดิม จึงสามารถดึงตัวร่วมออกมาได้

$$(cA)^{\mathrm{T}} = cA^{\mathrm{T}}$$

5. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จะมีค่าเท่ากับดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์สลับเปลี่ยน

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$$

6. ผลคูณจุด (dot product) ของเวกเตอร์สองคอลัมน์ a กับ b สามารถคำนวณได้จาก

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$$

7. เมตริกซ์ผกผันของการสลับเปลี่ยน เท่ากับเมตริกซ์สลับเปลี่ยนของการผกผัน

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

2.9 อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

อินเวอร์สของเมตริกซ์ในที่นี้หมายถึงอินเวอร์สของการคูณของเมตริกซ์ ซึ่งเมตริกซที่จะหาอินเวอร์สได้นั้นจะต้องมีค่ากำหนดไม่เท่ากับศูนย์ อินเวอร์สของเมตริกซ์A จะใช้สัญลักษณ์ A^{-1} ทั้งนี้

$$\boxed{AA^{-1} = I = A^{-1}A}$$

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์มิติ 1×1

กำหนดให้ $a \in R$ ถ้า $A = [a]$ แล้ว $A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $A = [3]$ แล้ว $A^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right]$

การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์มิติ 2×2 กำหนดให้ $a, b, c, d \in R$

$$\text{ถ้า} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{ตัวอย่างเช่น ถ้า} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว} \quad A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.10 อินเวอร์ของเมตริกซ์ขนาดnxn $(n \geq 3)$

ในการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ $(n \geq 3)$โดยทั่วไปมี 2 วิธีคือ

1. การหาอินเวอร์ส โดยใช้เมตริกซ์ผูกพัน (Adjoint Matrix)
2. การหาอินเวอร์ส โดยใช้การดำเนินงานแบบแถว

2.10.1 การหาอินเวอร์สโดยใช้เมตริกซ์ผูกผัน

สำหรับเมตริกซ์ A ที่มีขนาด $n \times n$ ถ้า c_{ij} เป็นโคแฟกเตอร์ในแถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์ A โดยที่ $i, j = 1, 2, 3,\ldots,n$ แล้วเมตริกซ์ผูกพันของ A เขียนแทนด้วย $\text{Adj}(A) = [c_{ij}]^t_{n \times n}$

ทฤษฎีบท 7.14 กำหนด A เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$

ตัวอย่าง 2.15 จงหาค่าของเมตริกซ์ A

$$\text{กำหนด } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \text{ จงหา } A^{-1}$$

วิธีทำ หาค่าของอินเวอร์สโดยใชเมตริกซ์ผูกผัน

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 2,\ c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 2,\ c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 6,\ c_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -11,\ c_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$c_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,\ c_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,\ c_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

จะได้ $\det(A) = 1\,(2) + 2\,(2) + 3\,(-3) = 2 + 4 - 9 = -3$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

2.10.2 การหาอินเวอร์สโดยใช้การดำเนินงานแบบแถว

สำหรับเมตริกซ์ A ที่มีขนาด $n \times n$ การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ A สามารถทำได้โดยเติมเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ เข้ากับเมตริกซ์ A ซึ่งสามารถเขียนแทนได้ด้วยเมตริกซ์ [A : I] เมตริกซ์ดังกล่าวเรียกว่าเป็นเมตริกซ์แต่งเติม (Augumented Matrix) จากนั้นจะใช้การดำเนินงานแบบแถวในการที่จะเปลี่ยนเมตริกซ์ [A : I] ให้เป็นเมตริกซ์ [I : B] ซึ่งจะได้ว่า $B = A^{-1}$

ตัวอย่าง 2.16 จากตัวอย่างที่ 2.15 จะได้เมตริกซ์แต่งเติมของเมตริกซ์ A คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & : & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากนั้นจะได้การดำเนินงานแบบแถวดังต่อไปนี้

$$\begin{matrix} -4R_1 + R_2 \\ -7R_1 + R_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & : & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & : & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -11 & : & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2R_2 + R_1 \\ 6R_2 + R_3 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} R_3 + R_1 \\ 2R_3 + R_2 \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.10.3 คุณสมบัติของอินเวอร์ส

กำหนด A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ n×nที่สามารถหาอินเวอร์สได้ จะได้ว่า

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
4. $(A^P)^{-1} = (A^{-1})^P$ โดยที่ P เป็นจำนวนเต็มบวก
5. $(k\,A)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

2.11 ดีเทอร์มิแนนท์

ค่ากำหนดหรือดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์นั้น เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของเมตริกซ์จัตุรัสและมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง สัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่ากำหนดของเมตริกซ์ A จะแทนด้วย det(A) หรือ | A |

1. กำหนด Aเป็นเมตริกซ์มิติ n×n จะเรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเมตริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) ถ้า det(A) = 0

2. กำหนด Aเป็นเมตริกซ์มิติ n×n จะเรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน (Non-singular Matrix) ถ้า det(A) $\neq$ 0

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว A สามารถหาอินเวอร์สการคูณได้ การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์นั้นเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างมาก เพราะจะต้องนำไปใช้ในกระบวนการหาคำตอบจากระบบสมการเชิงเส้น ดังนั้นจำเป็นที่จะต้องทราบให้ได้ว่า เมตริกซ์นั้น สามารถหาอินเวอร์สการคูณได้หรือไม่ ซึ่งจะทราบได้ ถ้าสามารถหาค่ากำหนดของเมตริกซ์นั้นได้

2.11.1 การหาค่ากำหนด

การหาค่ากำหนดของเมตริกซ์มิติ 1×1

$A = [a]$, a เป็นจำนวนจริง แล้ว $\det(A) = a$

การหาค่ากำหนดของเมตริกซ์มิติ 2×2

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงแล้ว $\det(A) = ad - bc$

ตัวอย่างที่ 2.16 จงหาค่ากำหนดของเมตริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = [3]$ 2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ หาค่าของ

1. $A = [3]$ จะได้ว่า $\det(A) = 3$
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(B) = 1(4) - 2(3)$

$= 4 - 6 = -2$

การหาค่ากำหนดของเมตริกซ์มิติ 3×3

การหาค่ากำหนดของเมตริกซ์มิติ 3×3 นั้นสามารถหาได้ด้วยหลายวิธีด้วยกัน คือ

1. วิธีการเติมหลัก
2. วิธีโคแฟคเตอร์ (Co-factor)
3. วิธีการดำเนินงานแบบแถวหรือแบบหลัก (Row/Column Operation)

1. วิธีการเติมหลัก

สำหรับเมตริกซ์มิติ 3×3 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีการเติมหลักนั้น หาได้โดยการเติม 2 หลักแรกของเมตริกซ์ดังกล่าวเข้าไปกับเมตริกซ์เดิม จากนั้นค่ากำหนดจะหาได้จากการหาผลรวมของการนำเอาสมาชิกในเส้นทแยงมุมมาคูณกัน ทั้งนี้โดยมีเงื่อนไขว่า ให้กำหนดเครื่องหมายของผลคูณที่ได้จากเส้นทแยงมุมที่นำมาคูณกันนั้น เป็นบวกถ้าเป็นผลคูณในแนวเส้นทะแยงมุมหลักและ เป็นลบถ้าเป็นผลคูณในส้นทแยงมุมรองดังตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.17 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ จงหาค่า } \det(A)$$

วิธีทำ เติม 2 หลักแรกของเมตริกซ์ A เข้ากับเมตริกซ์ได้ A ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & : & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & : & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1(5)(9) + 2(6)(7) + 3(4)(8) - 7(5)(3) - 8(6)(1) - 9(4)(2)$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \quad = 0$$

2. วิธีโคแฟคเตอร์

สำหรับเมตริกซ์ $n \times n$ ใดๆ โคแฟคเตอร์ (Co-factor) ในตำแหน่งที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j เขียนแทนด้วย c_{ij} นั้นจะเท่ากับ $(-1)^{i+j}$ คูณกับค่ากำหนดของเมตริกซ์ย่อย (Sub-matrix) ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออกจากเมตริกซ์นั้น

ตัวอย่างที่ 2.18 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \quad c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6, \quad c_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12, \quad c_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$c_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3, \quad c_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6, \quad c_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

3. วิธีการดำเนินงานแบบแถว (หลัก)

วิธีดำเนินงานแบบแถว (หลัก) มีอยู่ 3 แบบด้วยกันคือ

1. การสลับแถว (หลัก)
2. การนำค่าคงที่คูณแถว (หลัก) ใดแถว (หลัก) หนึ่ง
3. การนำค่าคงที่คูณแถว (หลัก) ใดแถว (หลัก) หนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีกแถว (หลัก) หนึ่ง

2.11.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับค่ากำหนด

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $\det(A^t) = \det(A)$
3. $\det(A^m) = (\det(A))^m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวก
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ โดยที่ A เป็นเมตริกซ์ไม่เอกฐาน
5. $\det(kA) = k^n \det(A)$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

แบบฝึกหัด 2.1

เรื่อง เมตริกซ์

1. จงบอกขนาดมิติและชนิดของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B $= \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ C $= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $= \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ E $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ F $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

G $= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ H $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

2. จงสร้างเมตริกซ์ขนาด 5×5 ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งบอกสมาชิกในตำแหน่งเส้นทแยงมุมหลักของเมตริกซ์ด้วย

2.1 $a_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ 1, i \langle j \\ 2, i \rangle j \end{cases}$ 2.2 $a_{ij} = \begin{cases} i, i \rangle j \\ j, i \langle j \\ 0, i = j \end{cases}$

2.3 $a_{ij} = i+j$ 2.4 $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$

3. จงหา A $= \left[a_{ij}\right]_{3\times 4}$ เมื่อ $a_{ij} = 2i + 3j$

4. จงหา B $= \left[b_{ij}\right]_{2\times 2}$ เมื่อ $b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (i^2 + j^2)$

5. จงหาค่าของตัวแปรจากสมการเมตริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $\begin{bmatrix} 2x+1 & y \\ z & 1+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ 5.2 $\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 5 & -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 3 \\ 5 & y \end{bmatrix}$

5.3 $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ x & -4 \\ 5y & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 9 & -4 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$ 5.4 $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3x & y & 5z \\ 0 & 7w & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \\ 0 & 14 & 9 \end{bmatrix}$

6. กำหนดให้

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\underset{\sim}{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงหาเมตริกซ์ต่อไปนี้

6.1 -A 6.2 -A+B 6.3 (A+B) 6.4 $2\cdot\underset{\sim}{0}$ 6.5 A+B-C

6.6 2(A+3B) 6.7 0(A+B) 6.8 $4(A-C)+6\cdot\underset{\sim}{0}$ 6.9 2A+3C-2B

6.10 (3C+2A)-2B 6.11 $\frac{1}{2}A-2(3B+2C)$ 6.12 $3A-\frac{1}{2}(B+C-A)$

7. จงหาค่าของ x, y และ z จากสมการเมตริกซ์ที่กำหนดให้

7.1 $x\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - y\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 13 \\ 17 \end{bmatrix}$ 7.2 $5\begin{bmatrix} 2x \\ 4y \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัด 2.2

เรื่อง การคูณเมตริกซ์กับเมตริกซ์

1. ถ้า A มีขนาด 2×3 B มีขนาด 3×1 C มีขนาด 2×5 D มีขนาด 4×3 E มีขนาด 3×2 และ F มีขนาด 2×3 จงหาขนาดและจำนวนสมาชิกของผลคูณเมตริกซ์ต่อไปนี้

1.1 AE 1.2 DE 1.3 EC 1.4 DB

1.5 FB 1.6 BA 1.7 EA 1.8 E(AE)

1.9 E(FB) 1.10 (F+A)B

2. จงหาผลคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

2.1 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ 2.2 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

2.3 $\begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2.4 $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & 7 & -5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -13 & 10 & -11 \end{bmatrix}$

2.5 $\left[-4\right]\left[-2\right]$

2.6 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

3. กำหนดให้

$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $F=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$G=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงคำนวณหาเมตริกซ์ต่อนี้

3.1 AB 3.2 CF 3.3 DG 3.4 EC

3.5 DI-$\frac{1}{3}G$ 3.6 3A-2BC 3.7 2I-$\frac{1}{2}GH$ 3.8 (DC)A

4. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของเมตริกซ์ต่อไปนี้

4.1 A^2, A^3, A^6, A^8 4.2 $(A+B)(A-B), A^2-B^2$

แบบฝึกหัด 2.3

เรื่อง สลับเปลี่ยนของเมตริกซ์ และการอินเวอร์สของเมตริกซ์

1. จงหาค่ากำหนดของเมตริกซ์ต่อไปนี้

1.1 $A = [3]$

1.2 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

1.3 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

1.4 $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

1.5 $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. กำหนด A, B และ C เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ จงหาเงื่อนไขที่ทำให้

2.1 ถ้า $AB = AC$ แล้ว $A = C$

2.2 ถ้า $AB = \underline{O}$ แล้ว $A = \underline{O}$ หรือ $B = \underline{O}$

3. จงหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ต่อไปนี้

3.1 $A = [3]$

3.2 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3.3 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

3.4 $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

3.5 $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

บทที่ 3

ลิมิตและความต่อเนื่อง

บทนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาที่เป็นพื้นฐานที่สำคัญของแคลคูลัส นั่นคือเรื่องของลิมิต และความต่อเนื่อง ซึ่งเนื้อหาประกอบด้วยการให้นิยามและความหมาย ตลอดจนทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการแสดงวิธีการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชัน และการทดสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุดต่างๆ

3.1 ลิมิต

ในเรื่องของฟังก์ชันโดยทั่วไปนั้นมักจะเป็นการหาค่าของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง ซึ่งในบางครั้งก็ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันที่บางจุดได้ แต่อย่างไรก็ตามเราอาจให้ความสนใจค่าของฟังก์ชันที่พารามิเตอร์ของฟังก์ชันนั้นมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

พิจารณาฟังก์ชัน $f\left(x\right)=2x^2+1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 แล้วค่าของ f (x) เป็นเท่าไร

ใช้วิธีแทนค่า x ที่มีค่าใกล้เคียง 3 ซึ่ง x อาจมีค่าน้อยกว่า 3 หรือ มากกว่า 3 ดังตาราง

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
$f(x) = 2x^2 + 1$	17.82	18.8802	18.988002	19.012002	19.1202	20.22

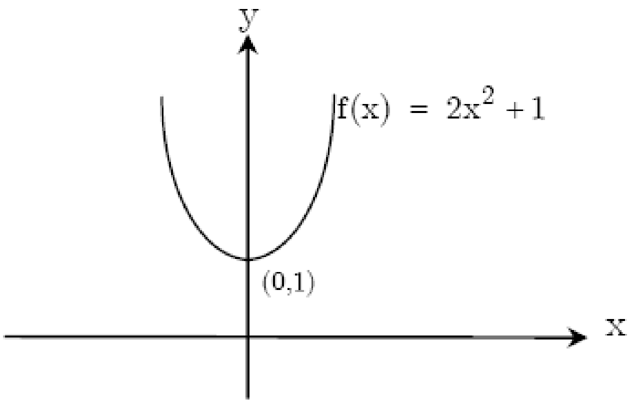
เมื่อ x มีค่าน้อยกว่า 3 เล็กน้อย หรือกล่าวว่า “x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านซ้าย” แล้วค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 19 (ดังตาราง) และเราจะเรียกค่านี้ว่า “ลิมิตทางซ้ายของ f(x)” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to3^-} f\left(x\right)=19$

เครื่องหมาย – หมายถึง การเข้าใกล้จากทางด้านซ้ายเพียงทางเดียว

เมื่อ x มีค่ามากกว่า 3 เล็กน้อย หรือกล่าวว่า “x มีค่าเข้าใกล้ 3 ทางด้านขวา” แล้วค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 19 (ดังตาราง) และเราจะเรียกค่านี้ว่า “ลิมิตทางขวาของ f(x)” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to3^+} f\left(x\right)=19$

เครื่องหมาย “+” หมายถึงการเข้าใกล้จากทางด้านขวาเพียงทางเดียว

ดังนั้น เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 แล้วค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 19 หรือกล่าวว่า “ลิมิตของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 คือ 19” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to3} f\left(x\right)=19$ ดังรูป



ภาพที่ 3.1 ฟังก์ชันของลิมิต

3.1.1 นิยาม

ค่าที่ f(x) เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านที่น้อยกว่า a หรือ ทางซ้ายของ a เรียกค่านั้นว่า "ลิมิตซ้ายของ f(x)" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^-} f(x)$

ค่าที่ f(x) เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านที่มากกว่า a หรือ ทางขวาของ a เรียกค่านั้นว่า "ลิมิตขวาของ f(x)" และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^+} f(x)$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหาลิมิตของ f(x) เมื่อ $x \to 0$

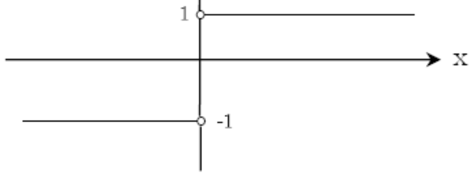
วิธีทำ เนื่องจาก

$$|x| = \begin{cases} x; & x \ge 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1; & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1; & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$



เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย (x<0) จะได้ว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ –1คือ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา (x>0) จะได้ว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ 1 คือ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x)$ ไม่มีลิมิต เพราะว่า เราไม่สามารถสรุปได้ว่า เมื่อ $x \to 0$ แล้ว f(x) มีค่าเข้าใกล้ค่าใด

3.2 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตนี้ ให้เฉพาะทฤษฎีบทที่สำคัญๆ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าลิมิตต่างๆ ได้ n เป็นจนวนเต็มบวก k เป็นค่าคงตัว f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีลิมิต เมื่อ $x \to 0$

ทบ. 1. $\lim_{x\to a} k = k$ $\boxed{\text{ลิมิตของค่าคงที่คือค่าคงที่}}$

ทบ. 2. $\lim_{x\to a} x = a$

ทบ. 3. $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$

ทบ. 4. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]+[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 5. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]-[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 6. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]\cdot[\lim_{x\to a} g(x)]$

ทบ. 7. $\lim_{x\to a}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

ทบ. 8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

ทบ. 9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ ถ้า n เป็นเลขคู่ $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to a} 3x+2$ 2. $\lim_{x\to a} x^3+x-3$ 3. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-7}{2x^2+x+3}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กำหนดให้

1. $\lim_{x\to a} 3x+2$ $= \lim_{x\to a} 3x + \lim_{x\to a} 2$

$= 3\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 2$

$= 3a+2$

2. $\lim_{x\to a} x^3+x-3$ $= \lim_{x\to a} x^3 + \lim_{x\to a} x - \lim_{x\to a} 3$

$= a^3+a-3$

3. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-7}{2x^2+x+3}$ $= \frac{\lim_{x\to a}(x^2-7)}{\lim_{x\to a} 2x^2+x+3}$

$= \frac{\lim_{x\to a} x^2 - \lim_{x\to a} 7}{2\lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 3}$

$= \frac{a^2-7}{2a^2+a+3}$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตที่กำหนดให้หาค่า

1. ในการหา $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$ ถ้าแทน x ด้วย 3 จะได้ x^2-2x-3 มีค่าเป็นศูนย์ และ x-3 มีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} x+1 = 4$$

2. การหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ นั้นมีลักษณะเช่นเดียวกับข้อ 1. คือลิมิตอยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ แต่การหาค่าของลิมิตในกรณีนี้ ทำได้โดยการคูณด้วยสังยุค (Conjugate) ของ $\sqrt{x+4}-2$ ทั้งเศษ และส่วนดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}$$

3.3 ลิมิตข้างเดียว

สามารถแบ่งออกเป็น 2 ระเภท คือ ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา (Left-Hand and Right-Hand Limits)

3.3.1 นิยามลิมิตทางขวา

กำหนด f (x) นิยามบนช่วงเปิด (a, c) โดยที่ c > a และถ้า f (x) มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x เข้าใกล้ a ในช่วง (a, c) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตขวาที่ a เท่ากับ L และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

3.3.1 นิยามลิมิตทางซ้าย

กำหนด f (x) นิยามบนช่วงเปิด (b, a) โดยที่ b < a และถ้า f (x) มีค่าเข้าใกล้ K เมื่อ x เข้าใกล้ aในช่วง (b, a) แล้ว กล่าวได้ว่า f มีลิมิตซ้ายที่ a เท่ากับ K และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = K$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาค่าของลิมิต $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ และ $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$

วิธีทำ

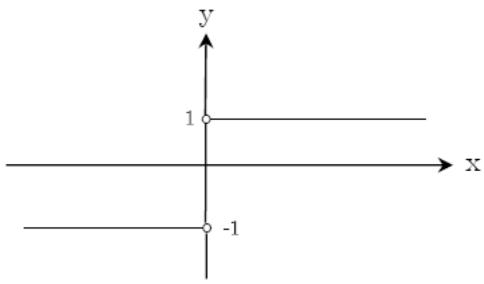
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} \text{ เพราะว่า } x>0$$

$$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x} \text{ เพราะว่า } x<0$$

$$\lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

หมายเหตุ:จาก $f\left(x\right)=\dfrac{|x|}{x}$ จะเขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย (x<0) จะได้กราฟอยู่ข้างใต้แกน และได้ $f\left(x\right)=-1$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$

และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา (x>0) จะได้กราฟอยู่ข้างบนแกน และได้ $f\left(x\right)=1$ นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$

หมายเหตุ : ฟังก์ชัน f อาจจะไม่มีลิมิตที่จุด x = a ด้วยเหตุผลดังนี้

1. ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตทางซ้าย หรือไม่มีลิมิตทางขวาที่จุด x = a

2. ฟังก์ชัน f มีลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาที่จุด x = a แต่ลิมิตทั้งสองไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3.5 ให้ f(x) = 4x – 3 จงหา $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(4x-3\right)=4(2)-3=8-3=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(4x-3\right)=4(2)-3=5$$

ตัวอย่างที่ 3.6 ให้ f(x) = | x-3 | จงหา

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก f(x) เป็นค่าสัมบูรณ์ ค่า x ภายในค่าสัมบูรณ์มี 2 ค่า

$$|x|=\begin{cases}+x & ,x\ge 0\\ -x & ,x<0\end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases}x-3 & ,x-3\ge 0 \Rightarrow x\ge 3\\ -(x-3) & ,x-3<0 \Rightarrow x<3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} |x-3| = \lim_{x\to 3^-} -(x-3) = -(3-3) = 0$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} |x-3| = \lim_{x\to 3^+} \left(x-3\right) = 3-3 = 0$$

$$\lim_{x\to\ -3^-} f(x) = \lim_{x\to\ -3^-} |x-3| = \lim_{x\to\ -3^-} -(x-3) = -(-3-3) = 6$$

$$\lim_{x\to\ -3^+} f(x) = \lim_{x\to\ -3^+} |x-3| = \lim_{x\to\ -3^+} \left(x-3\right) = -3-3 = -6$$

3.4 ความต่อเนื่อง

ให้ f(x) เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นจำนวนจริงใดๆฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อเป็นจริงทั้ง 3 ข้อดังนี้

1. f(a) หาค่าได้
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ : ถ้าเงื่อนไขข้อใด ข้อหนึ่งขาดไป แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่อง x = a

ตัวอย่างที่ 3.7 ถ้า $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ,x \ge 3 \\ 2x+5 & ,-1 \le x < 3 \\ 3x-2 & ,x < -1 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f ต่อเนื่องที่x = – 1 แต่ไม่ต่อเนื่องที่ x =3
2. f ต่อเนื่องที่x = – 1 และ x =3
3. f ไม่ต่อเนื่องที่x = – 1 แต่ต่อเนื่องที่ x =3
4. f ไม่ต่อเนื่องที่x = – 1 และ x =3

วิธีทำ มี 2 จุดที่ต้องพิจารณาคือ x = -1 และ x = 3

พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ x = –1

1. f(a) หาค่าได้
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

แทนค่า f(-1) = 2(-1) + 5 = 3

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3(-1)^2 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+5) = 2(-1)+5 = 3$$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x =-1

พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ x = 3

แทนค่า f(3) = 3(3) - 2 = 9 – 2 = 7

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(2x+5) = 2(3)+5 = 6+5 = 11$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3+}(3x-2) = 3(3)-2 = 9-2 = 7$$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3

$\therefore$ fต่อเนื่องที่ x = -1 แต่ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3

ตัวอย่างที่ 3.8 ถ้า $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1} & ,0 < x < 1 \\ 1 & ,x = 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} & ,x > 1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดถูกและข้อใดผิด

ก. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ข . f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่x = 1

วิธีทำ พิจารณาความต่อเนื่องที่ x = 1

1. f(1) = 1

2. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{3x+1} = \dfrac{1}{3(1)+1} = \dfrac{1}{4}$

3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} \times \dfrac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{4-(5-x)}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(2+\sqrt{5-x})} = \frac{1}{(2+\sqrt{5-1})} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

ก. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ถูก

ข . f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่x = 1 ผิด

ตัวอย่างที่ 3.9 ถ้า $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x>1 \\ x-1 & ,0<x\le 1 \\ 0 & ,x\le 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ เท่าไร

วิธีทำ พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)$ จาก $x\to 0^-$ จะได้ $x^2\to 0^+$ แสดงว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^2)=\lim_{x^2\to 0^+} f(x^2)=\lim_{x^2\to 0^+}(x^2-1)=0-1=-1$$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ จาก $x\to 1^+$ จะได้ $x-1\to 0^+$ แสดงว่า

$$\lim_{x\to 1^+} f(x-1)=\lim_{(x-1)\to 0^+} f(x-1)=\lim_{(x-1)\to 0^+}\left[(x-1)-1\right]=0-1=-1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^2)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x-1)$ = -1-1 = -2

3.5 ลิมิตอนันต์

ในการพิจารณาขอบเขตของ f(x) บ่อยครั้งที่จำเป็นต้องศึกษาถึงค่าของ f(x) เมื่อ x มีค่าเพิ่มมากขึ้นไปจนถึงบวกอนันต์ หรือลดลงจนถึงลบอนันต์ การศึกษาดังกล่าวสามารถทำได้โดยใช้

3.5.1 นิยามการบวกอนันต์

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=K$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ K (หรือมีค่าลิมิต = K) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้บวกอนันต์

3.5.2 นิยามการลบอนันต์

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ หมายถึง f(x) มีค่าเข้าใกล้ L (หรือมีค่าลิมิต = L) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ลบอนันต์

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} 7+\dfrac{3}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2}$

วิธีทำ ใช้วิธีการหาค่าเหมือนกับค่า x = a

$$1. \quad \lim_{x\to\infty} 7+\frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty} 7 + 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$= 7+0$$

$$= 7$$

$$2. \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2} = 4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

$$= 4\,(0)\,(0)$$

$$= 0$$

ตัวอย่างที่ 3.11 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-3}{5x^2+7}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4}{2x^2-3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{4x+3}$

วิธีทำ ใช้วิธีการหาค่าเหมือนกับค่า x = a

$$1. \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+3}{5x^2+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(5+\frac{7}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{7}{x^2}}$$

$$= \frac{2+0+0}{5+0}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$2. \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{2x^2-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(2-\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}$$

$$= 0$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-2}{4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$= \infty \text{ (หาค่าไม่ได้)}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

แบบฝึกหัด 3.1

เรื่อง ลิมิต

1.จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้เมื่อ x เข้าใกล้จุด a ที่กำหนดให้

1.1 $f(x)=x^2-5x+3 \quad ;a=1$

1.2 $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4} \quad ;a=4$

1.3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{2x} \quad ;a=0$

1.4 $f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x+3} \quad ;a=-3$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x+1}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+3}$

2.4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

2.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-a}{x^2-a^2}$

3. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right]$

3.2 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}\right]$

3.3 $\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}\right]$

3.4 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2x}{\sqrt{x+9}-3}\right]$

3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$

3.6 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-2x}\right]$

4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-3x}{h}$

5. จงหาค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

6. จงใช้นิยามของลิมิต พิสูจน์ว่า

6.1 $\lim\limits_{x\to -1} x^3-x^2=-2$

6.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{5}$

แบบฝึกหัด 3.2

เรื่อง ลิมิตข้างเดียว

จงหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ในกรณีที่ไม่มีลิมิต จงหาลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวา

1. $\lim\limits_{x \to 0}\left(1+\frac{|x|}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x \to 0}|x-1|$

3. $f(x)=\begin{cases} x^3 & ;x \geq 2 \\ 1 & ;x < 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4. $f(x)=\begin{cases} -x-7 & ;x < 3 \\ x-1 & ;x > -3 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

5. $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt{x-4}$

6. $\lim\limits_{x \to 4} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

แบบฝึกหัด 3.3

เรื่อง ความต่อเนื่อง

1. ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

2. ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$$

3. ฟังก์ชัน $f(x)=|x+1|$ ต่อเนื่องที่ x = -1หรือไม่

4. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} -3/2, & x \leqslant -1 \\ \dfrac{2x^2+x-1}{2(x+1)}, & -1 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$$

ก. fต่อเนื่องที่ $x=-1$ ข. f ต่อเนื่องที่ $x=1$

5. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ให้แล้ว ข้อความใดถูกบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3x+1}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

ก. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ข. fเนฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=1$

6. จงหาค่า a ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x+a, & x=2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \end{cases}$ มีความต่อเนื่องที่ x = 2

7. ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} ax, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ x+b, & x>1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่จุดซึ่ง x = 1 แล้ว จงหาค่า a, b

8. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-4x-4}{4-x^2}, x \neq \pm 2$ และ $f(2)=a, f(-2)=b$ แล้ว a และ b มีค่าเท่าไร

แบบฝึกหัด 3.4

เรื่อง ลิมิตอนันต์

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2-2}{3x^2+10x-100}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2x^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{x^2 - 4}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{7x^2 - 51}$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x + 5}{3x - 4}$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 7x - 3}{5 - x^3}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 2x - 3}{8 - 5x^3}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{7x^2 - 5}$

บทที่ 4

สมการเชิงอนุพันธ์

4.1 สมการเชิงอนุพันธ์

4.1.1 นิยาม

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = 3x^2y$$

$$2)\quad (y')^2 - y' + 2x = 0$$

$$3)\quad \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6xy = 0$$

$$4)\quad y' - 2x\sqrt{1+2y''} = 0$$

$$5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

4.1.2 อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์

อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏอยู่ในสมการเช่น

1. $y'' + (y')^2 = 2xy$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง เพราะว่า อันดับที่สูง ที่สุดของอนุพันธ์ คือ 2

2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = 2x^2y^3\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สามเพราะว่า อันดับที่สูงที่สุดของอนุพันธ์ คือ 3

3. $(y')^4 - (y')^3 - 2xy' = 1$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เพราะว่า อันดับที่สูงที่สุดของอนุพันธ์ คือ 1

4.1.3 ดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับต่างๆ โดยจัดให้มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด จะเรียกเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับที่สูงที่สุดที่ปรากฏอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้นว่า ดีกรี (degree) เช่น

1. $\frac{dy}{dx}-2xy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับหนึ่ง ดีกรีหนึ่ง

2. $(y'')^2-(y')^3=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสอง ดีกรีสอง

3. $x^2y\cdot\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสาม ดีกรีหนึ่ง

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสอง ดีกรีสาม

เพราะว่า จาก $\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}$ ยกกำลังสามทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\left(\sqrt[3]{1-x\frac{dy}{dx}}\right)^3 \quad = \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=1-x\frac{dy}{dx}$$

5. $\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}=\sqrt{(y''-1)^3}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ อันดับสาม ดีกรีเก้า

เพราะว่า จาก $\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}=\sqrt{(y''-1)^3}$ ยกกำลังหกทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\left(\sqrt[3]{(1-y\cdot y'')^2}\right)^6=\left(\sqrt{(y''-1)^3}\right)^6$$

$$\left((1-y\cdot y'')^2\right)^2=\left(\sqrt{(y''-1)^3}\right)^3$$

$$(1-y\cdot y'')^4=(y''-1)^9$$

4.1.4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรเพียงตัวแปรเดียว (Ordinary differential equations) เช่น

1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-xy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2) $(y''')^3-2y''+y = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

4.1.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

หมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีตัวแปรหลายตัวแปร (Partial differential equations) เช่น

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3xy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

4.2 สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งที่พิจารณาในบทนี้ หมายถึง สมการที่เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

ตัวอย่างที่ 4.1 สมการ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+y}$ สามารถเขียนอยู่ในรูปค่าเชิงอนุพันธ์เป็น

$$2ydx-(x+y)dy=0$$

สมการอันดับหนึ่ง (first order equations) แบ่งเป็นประเภทต่างๆ โดยอาศัยรูปแบบของสมการ ซึ่งจะทำให้สามารถบอกวิธีการแก้สมการได้ง่าย แบ่งได้ดังนี้ คือ

1. สมการแยกกันได้หรือสมการแยกตัวแปรได้ (separable equations)
2. สมการเอกพันธุ์ (homogeneous equations)
3. สมการแม่นตรง (exact equations)
4. สมการเชิงเส้น (linear equations)

สมการแต่ละประเภทจะมีวิธีการหาผลเฉลยแตกต่างกันออกไป ดังต่อไปนี้

4.2.1 สมการแยกกันได้หรือสมการแยกตัวแปรได้

สามารถให้บทนิยามของสมการที่แยกตัวแปรได้ ดังนี้ คือ

$$\boxed{F(x)+G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=0}$$

หมายเหตุ : ผลเฉลยของ $F(x)dx+G(y)dy=0$ หาจาก $\int F(x)dx+\int G(y)dy=c$

ตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์แบบที่สามารถแยกตัวแปรได้ เช่น

1. $2x+1+\left(y^2-3\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ จะเห็นว่า $F(x)=2x+1$ และ $G(y)=y^2-3$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin 2x}{\cos y^2+1}$ ซึ่งสามารถจัดรูปของสมการได้เป็น

$$\left(\cos y^2+1\right)\frac{dy}{dx}=\sin 2x$$
$$-\sin 2x+\left(\cos y^2+1\right)\frac{dy}{dx}=0$$

ซึ่งจะเห็นว่า $F(x)=-\sin 2x$ และ $G(y)=\cos y^2+1$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถแยกตัวแปรได มีหลักการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้ คือ จากสมการ $F(x)+G(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ สามารถเขียนได้ในรูปของค่าเชิงอนุพันธ์ ได้ว่า

$$F(x)dx=-G(y)dy \qquad \text{หรือ} \qquad F(x)dx+G(y)dy=0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int F(x)dx=\int -G(y)dy \quad \text{หรือ} \qquad \int F(x)dx+\int G(y)dy=c$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงแก้สมการ $2x^2+(y-1)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx+G(y)dy=0$ จะได้ว่า

$$2x^2dx+(y-1)dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int 2x^2dx+\int (y-1)dy = 0$$
$$\frac{2x^3}{3}+\frac{y^2}{2}-y = c_1$$
$$4x^3+3y^2-6y = c$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $4x^3+3y^2-6y = c$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-x+1}{3y^2-2y}$, $y(0)=1$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx+G(y)dy=0$ จะได้ว่า

$$(3x^2 - x + 1)dx - (3y^2 - 2y)dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int (3x^2 - x + 1)dx - \int (3y^2 - 2y)dy = c_1$$

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + x - (y^3 - y^2) = c_1$$

$$2x^3 - x^2 + 2x - 2y^3 + 2y^2 = c$$

เนื่องจาก $y(0) = 1$ นั่นคือ ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 1$

แทนค่าจะได้ว่า $2(0)^3 - (0)^2 + 2(0) - 2(1)^3 + 2(1)^2 = c$ นั่นคือ $c = 0$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $2x^3 - x^2 + 2x - 2y^3 + 2y^2 = 0$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงแก้สมการ $5(1-y^2)dx - 2xydy = 0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$ จะได้ว่า

จากสมการ $5(1-y^2)dx - 2xydy = 0$ นำ $1-y^2$ หารทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{5}{x}dx - \frac{2y}{1-y^2}dy = 0$$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{5}{x}dx - \int \frac{2y}{1-y^2}dy = c_1$$

$$5\ln|x| + \ln|1-y^2| = c_1$$

หรือ $\ln x^5 + \ln(1-y^2) = c_1$

$$\ln x^5(1-y^2) = c_1$$

$$x^5(1-y^2) = e^{c_1} = c$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $x^5(1-y^2) = c$

ในการแก้สมการแยกตัวแปรได้นั้น จะเห็นว่าฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยจะเป็นฟังก์ชันที่ แตกต่างกันออกไป เช่น ผลเฉลยที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ, ฟังก์ชันลอการิทึม หรือฟังก์ชันอดิศัย

ตัวอย่างที่ 4.5 จงแก้สมการ $xdx - y^2dy = 0$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$ แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง

จะได้ว่า $\int x\,dx - \int y^2 dy = c_1$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c_1$$

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 3c_1$$

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - c\right)^{\frac{1}{3}}$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = \left(\frac{3x^2}{2} - c\right)^{\frac{1}{3}}$

ตัวอย่างที่ 4.6 จงแก้สมการ $\frac{dy}{dx} = y^2x^3$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$

จะได้ว่า $x^3 dx - \frac{1}{y^2} dy = 0$

แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\int x^3 dx - \int y^{-2} dy = c$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{y} = c$$

$y = \frac{-4}{x^4 - 4c}$ หรือ $y = \frac{-4}{x^4 + c}$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = \frac{-4}{x^4 + c}$

ตัวอย่างที่ 4.7 จงแก้สมการ $y' = 5y$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$

จาก $\frac{dy}{dx} = 5y$ หรือ $\frac{dy}{y} - 5dx = 0$

แล้วอินทิเกรตทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$\int 5dx - \int \frac{dy}{y} = c_1$$

$$5x - \ln|y| = c_1$$

เขียนสมการผลเฉลยในรูปสมการชัดแจ้งจะได้ว่า $\ln|y| = 5x - c_1$

$$|y| = e^{5x-c_1}$$

$$y = ce^{5x}$$

ดังนั้นสมการผลเฉลยคือ $y = ce^{5x}$

4.2.2 สมการเอกพันธ์

สมการเอกพันธุ์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีลักษณะเฉพาะตัว แต่ก่อนที่จะศึกษาการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบสมการเอกพันธุ์ จะต้องให้บทนิยามของฟังก์ชันเอกพันธุ์ก่อนดังนี้ **หมายเหตุ :**ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์หาได้จาก การแปลงให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ โดยกำหนด $y = vx$ และเปลี่ยนตัวแปร

1. ฟังก์ชัน f (x,y) ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธ์ดีกรี n ถ้า

$$\boxed{f(kx,ky) = k^n f(x,y)}$$

ตัวอย่างที่ 4.8 จงพิจารณาฟังก์ชันเอกพันธ์ $f(x,y) = 2x^4 - x^3y$

วิธีทำ จากฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n สมการ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

จากฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^4 - x^3y \\ f(kx,ky) &= 2(kx)^4 - (kx)^3(ky) \\ &= 2k^4x^4 - k^4x^3y \\ &= k^4(2x^4 - x^3y) \\ &= k^4 f(x,y) \end{aligned}$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x,y) = 2x^4 - x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 4

ตัวอย่างที่ 4.9 จงพิจารณาฟังก์ชันเอกพันธ์ $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$

วิธีทำ จากฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n สมการ $f(kx,ky) = k^n f(x,y)$

จากฟังก์ชัน $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$

$$h(kx,ky) = \frac{(ky)^2}{kx}$$

$$= \frac{ky^2}{x}$$

$$= kh(x,y)$$

ดังนั้นฟังก์ชัน $h(x,y) = \frac{y^2}{x}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 1

2. สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0$ ถ้า สมการเอกพันธุ์ ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรีเดียวกัน

จากสมการ

$$\boxed{\begin{aligned} &M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0 \\ &y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \end{aligned}}$$

และถ้ากำหนดให้ $f(x,y)=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ดังนั้นจะได้ว่า $y'=f(x,y)$ หรืออาจจะ

กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y'=f(x,y)$ หรือ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

จะเป็นสมการเอกพันธุ์ ถ้า $f(kx,ky)=f(x,y)$

ตัวอย่างที่ 4.10 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}$ เป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

จากสมการ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$

$$f(kx,ky) = \frac{(ky)^2}{kx}$$

$$= \frac{k^2y^2}{kx}$$

$$= \frac{ky^2}{x}$$

$$= kf(x,y) \neq f(x,y)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$ ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

ตัวอย่างที่ 4.11 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ ว่าเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y' = f(x,y)$

จากสมการ $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$

ดังนั้น $f(kx,ty) = \frac{(kx)^2+(ky)^2}{(kx)(ky)}$

$$= \frac{k^2(x^2+y^2)}{k^2(xy)}$$

$$= \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$= f(x,y)$$

ดังนั้น $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$ เป็นสมการเอกพันธุ์

ตัวอย่างที่ 4.12 จงพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$ ว่าเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป $y' = f(x,y)$

จากสมการ $y' = \dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$

กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$

$$f(kx,ky) = \frac{2(ky)^4+(kx)^4}{(kx)(ky)^3}$$

$$= \frac{k^4(2y^4+x^4)}{k^4(xy^3)}$$

$$= \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ เป็นสมการเอกพันธุ์

4.2.3 สมการแม่นตรง

สมการแม่นตรงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีลักษณะเฉพาะตัว ซึ่งสามารถให้บทนิยามได้ดังนี้คือ

$$\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ เ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่า สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$

หมายเหตุ: ผลเฉลยของสมการแม่นตรง คือ $F(x,y)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 4.13 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $2xydx+\left(1+x^2\right)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

จากสมการ $2xydx+(1+x^2)dy = 0$ จะได้ว่า

$M(x,y) = 2xy$ ดังนั้น $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x$

และ $N(x,y) = 1+x^2$ ดังนั้น $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x$

จะเห็นว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แสดงว่าสมการ

$\therefore 2xydx+\left(1+x^2\right)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 4.14 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $(x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง หรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$\mathrm{M(x,y)} = \mathrm{x+\sin y} \text{ ดังนั้น } \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{M(x,y)} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{x+\sin y})$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\sin y)$$

$$= 0+\cos y$$

$$= \cos y$$

ในทำนองเดียวกัน $\mathrm{N(x,y)} = \mathrm{x\cos y-2y}$ ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x\cos y-2y})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{x\cos y})-\frac{\partial}{\partial x}(2\mathrm{y})$$

$$= \left(\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial x}(\cos y)+(\cos y)\frac{\partial x}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(2\mathrm{y})$$

$$= \cos y$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{M(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N(x,y)}$ หรือ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore (x+\sin y)dx+(x\cos y-2y)dy=0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่างที่ 4.15 จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $\sin x\cdot\cos ydx-\sin y\cdot\cos xdy=0$ เป็นสมการแม่นตรง หรือไม่

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$\mathrm{M(x,y)} = \sin \mathrm{x}\cos \mathrm{y}$$

ดังนั้น $\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x(-\sin y) = -\sin x\sin y$

และ $\mathrm{N(x,y)} = -\sin y\cos x$

ดังนั้น $\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin y(-\sin x) = \sin x\sin y$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ แสดงว่า $\sin x\cdot\cos ydx-\sin y\cdot\cos xdy = 0$

$$\therefore \sin x \cdot \cos y dx - \sin y \cdot \cos x dy = 0$$ ไม่เป็นสมการแม่นตรง

สำหรับกรณีที่สมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้อยู่ในรูป (บรอนสัน. 2542)
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ แต่ไม่เป็นสมการแม่นตรง นั่นคือ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ การหาผลเฉลยจะทำเหมือนกับการหาผลเฉลยของสมการแม่ตรงไม่ได้สามารถจัดสมการที่กำหนดให้เป็นสมการแม่นตรงได้ โดยการหาฟังก์ชันที่เหมาะสมมาคูณสมการ แล้วทำให้สมการกลายเป็นสมการแม่นตรง และสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นได้เราเรียกว่า ตัวประกอบอินทิเกรต $\mu(x,y)$ หรือ ตัวประกอบปริพันธ์ $I(x,y)$

การหาผลเฉลยตัวประกอบอินทิเกรต สามารถหาได้ดังนี้ คือ

ถ้า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ไม่มีตัวแปร y แล้ว $\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$

ถ้า $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ ไม่มีตัวแปร x แล้ว $\mu = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$

ตัวอย่างที่ 4.16 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(3x + 2y^2)dx + 2xydy = 0$

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y) = 3x + 2y^2$ และ $N(x,y) = 2xy$

พบว่า $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4y$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$

พบว่า $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy}(4y - 2y) = \frac{1}{x}$

ดังนั้น $\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ell n|x|} = |x|$

ใช้ $\mu = x$ คูณทั้งสมการเชิงอนุพันธ์

จะได้สมการแม่นตรง $(3x^2+2xy^2)dx + 2x^2ydy = 0$

ดังนั้น $(3x^2+2xy^2)dx + 2x^2ydy = 3x^2dx + (2xy^2dx+2x^2ydy)$

$$= d(x^3) + d(x^2y^2)$$

$$= d(x^3+x^2y^2)$$

ผลเฉลยทั่วไป คือ $x^3+x^2y^2 = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 4.17 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(x^2+y^2+1)dx+x(x-2y)dy=0$

วิธีทำ จากสมการแม่นตรงที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

จัดรูปเป็น $(\cos y)dx + (1+x\sin y)dy = 0$

$M(x,y) = \cos y$ และ $N(x,y) = 1+x\sin y$

พบว่า $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -\sin y$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \sin y$

พบว่า $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{\cos y}(\sin y - (-\sin y)) = 2\tan y$

ดังนั้น $\mu = e^{\int 2\tan y\, dy} = e^{2\ell n|\sec y|} = e^{\ell n|\sec y|^2} = \sec^2 y$

ใช้ $\mu = \sec^2 y$ คูณทั้งสมการเชิงอนุพันธ์

4.2.4 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้น คือสมการที่สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\boxed{y' + p(x)y = r(x)}$$

กรณีที่ $r(x)=0$ จะเรียกว่าเป็น homogeneous

กรณีที่ $r(x)\neq 0$ จะเรียกว่าเป็น nonhomogeneous

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเชิงเส้นสามารถคำนวณได้ดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u>. $r(x)=0$ $\qquad y'+p(x)y=r(x)$

ทำการแยกตัวแปร จะได้ $\qquad \dfrac{dy}{y}=-p(x)dx$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + c$$

คำตอบทั่วไปคือ $\boxed{y(x) = ce^{-\int p(x)dx}}$

หมายเหตุ : ถ้าเลือกค่า $c = 0$ จะได้คำตอบ $y(x) = 0$ ซึ่งเป็นคำตอบหนึ่งของสมการ

<u>กรณีที่ 2</u>. $r(x) \neq 0$ จัดรูปสมการเพื่อหาตัวประกอบอินทิเกรต

จะได้ว่า $F(x) = e^{\int pdx}$ เป็นตัวประกอบการอินทิเกรต

คำตอบทั่วไปคือ $\boxed{y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]}$

ตัวอย่างที่ 4.18 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป $y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]$

จัดรูปสมการใหม่ ได้ $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$

ดังนั้น $\int P(x)dx = \int -\dfrac{1}{x}dx = -\ln x$

$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$

ดังนั้นผลเฉลยคือ $y = e^{\ln x}\left(\int \dfrac{1}{x}(x^2 + 3x - 2)dx + C\right)$

$= x\left(\dfrac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right)$

$= \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln x + Cx$

ตัวอย่างที่ 4.19 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

วิธีทำ จากสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป $y(x) = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]$

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right\} \\
&= e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx + c\right] \\
&= e^{-x^2}\left[2e^{x^2} + c\right] \\
&= 2 + C\,e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

4.3 การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์

4.3.1 การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

ณ เวลา t ใดๆ หากนำวัตถุที่มีอุณหภูมิ x ใส่ลงไปในตัวกลางที่มีอุณหภูมิ T จะได้

$$\frac{dx}{dt} = k(T-x) \quad \text{เมื่อ } k>0$$

ตัวอย่างที่ 4.19 หากนำเทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิภายในห้องได้ $75°F$ ออกมาข้างนอกห้อง พบว่า หลังจากนำออกมา 5 นาทีเทอร์โมมิเตอร์อ่านอุณหภูมิได้ $65°F$ และอีก 5 นาทีต่อมาเทอร์โมมิเตอร์อ่านอุณหภูมิได้ $60°F$ จงหาอุณหภูมิภายนอกห้อง

วิธีทำ จากสมการ $\frac{dx}{dy} = k(T-x), \quad k>0$

ให้ x แทน อุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ ณ เวลา t ใดๆ

และ T แทน อุณหภูมิภายนอกห้อง

ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = k(T-x)$ เมื่อ $k>0$

จะได้ว่า $\frac{1}{T-x}dx = kdt$

นั่นคือ $\int \frac{1}{T-x}dx = \int kdt$

ดังนั้น $-\ell n|T-x| = kt + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ $T-x = C_1e^{-kt}$ เมื่อ C_1 เป็นค่าคงตัว

ถ้าแทน $t=0$ และ $x=75$ จะได้ว่า $T-75 = C_1$

ถ้าแทน $t=5$ และ $x=65$ จะได้ว่า $T-65 = C_1e^{-5k} = (T-75)e^{-5k}$

นั่นคือ $e^{-5k} = \frac{T-65}{T-75}$

ถ้าแทน $t=10$ และ $x=60$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T-60 &= C_1 e^{-10k} \\ &= C_1\left(e^{-5k}\right)^2 \\ &= (T-75)\left(e^{-5k}\right)^2 \\ &= (T-75)\left(\frac{T-65}{T-75}\right)^2 \\ &= \frac{(T-65)^2}{T-75} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(T-60)(T-75) = (T-65)^2$

ดังนั้น $T^2-135T+4500 = T^2-130T+4225$

ดังนั้น $-5T = -275$

นั่นคือ $T = 55$

สรุปว่า อุณหภูมิภายนอกห้อง คือ $55^{\circ}\mathrm{F}$

4.3.2 ปฏิกริยาเคมี

กรณีเปลี่ยนแปลงจากสารชนิดหนึ่งไปเป็นสารอีกชนิดหนึ่ง

ให้ x แทนปริมาณสาร A ที่ยังไม่เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B ณ เวลา t ใดๆ

จะได้ว่า $$\boxed{\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k>0}$$

ตัวอย่างที่ 4.20 สาร A โดยปฏิกริยาเคมีเปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B พบว่า หนึ่งในสี่ของสาร A เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B ในเวลา 10 นาที จงหาระยะเวลาทีสาร A ถูกเปลี่ยนไปเก้าในสิบของปริมาณเริ่มต้น

วิธีทำ จากสมการ $$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k>0$$

ให้ x แทน ปริมาณของสาร A ที่ยังไม่เปลี่ยนแปลงไปเป็นสาร B

จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} = -kx$ เมื่อ $k>0$

ดังนั้น $\frac{1}{x}dx = -kdt$

ดังนั้น $\int\frac{1}{x}dx = -\int kdt$

ดังนั้น $\ell n|x| = -kt+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

นั่นคือ $x = C_1e^{-kt}$ เมื่อ C_1 เป็นค่าคงตัว

ถ้าแทน $t=0$ จะได้ว่า $x = C_1$

ถ้าแทน $t=10$ และ $x=\frac{3}{4}C_1$ จะได้ว่า $\frac{3}{4}C_1 = C_1e^{-10k}$

นั่นคือ $e^{-10k} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $-10k = \ell n\frac{3}{4}$

ดังนั้น $k = \frac{1}{-10}\ell n\frac{3}{4}$

ถ้าแทน $x = C_1 - \frac{9}{10}C_1 = \frac{1}{10}C_1$ จะได้ว่า $\frac{1}{10}C_1 = C_1e^{-kt}$

นั่นคือ $e^{-kt} = \frac{1}{10}$

ดังนั้น $-kt = \ell n\frac{1}{10}$

ดังนั้น
$$t = \frac{1}{-k}\ell n\frac{1}{10}$$
$$= 10\frac{\ell n\frac{1}{10}}{\ell n\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{10\ell n10}{\ell n4-\ell n3}$$

$\therefore$ ระยะเวลาที่สาร A ถูกเปลี่ยนไป คือ $\frac{10\ln 10}{\ln 4-\ln 3}$

<u>กรณีสาร A ทำปฏิกริยากับสาร B ได้สาร C</u>

ให้ x แทนปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ และa แทนปริมาณสาร A ที่ยังไมเกิดปฏิกริยา และ bแทนปริมาณสาร B ที่ยังไม่เกิดปฏิกริยา

จะได้ว่า $$\boxed{\frac{dx}{dt} = kab\,, \quad k>0}$$

ตัวอย่างที่ 4.21 สาร A ทำปฏิกริยากับสาร B ได้สาร C โดยปฏิกริยานี้ใช้สาร A จำนวน 2 กรัม และสาร B จำนวน 1 กรัม ถ้าเริ่มต้นด้วยสาร A จำนวน 10 กรัม และสาร B จำนวน 20 กรัม เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ได้สาร C จำนวน 6 กรัม จงหาปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ และหาปริมาณสาร C ที่มากทีสุดที่เกิดขึ้นได้

วิธีทำ จากสมการ $$\frac{dx}{dt} = kab\,, \quad k>0$$

ให้ x แทน ปริมาณของสาร C ณ เวลา t ใดๆ

เพื่อให้ได้สาร C จำนวน x กรัม จะต้องใช้สาร A จำนวน $\frac{2}{3}x$ กรัม

และสาร A จำนวน $\frac{1}{3}x$ กรัม

ณ เวลา t พบว่า สาร A เหลือ $10-\frac{2}{3}x$ กรัม

สาร B เหลือ $20-\frac{1}{3}x$ กรัม

ดังนั้น $$\frac{dx}{dt} = k\left(10-\frac{2}{3}x\right)\left(20-\frac{1}{3}x\right) \quad \text{เมื่อ } k>0$$

ดังนั้น $$\frac{1}{(15-x)(60-x)}dx = \frac{2}{9}kdt$$

ดังนั้น $$\frac{1}{45}\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \frac{2}{9}kdt$$

ดังนั้น $$\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = 10kdt$$

ดังนั้น $$\int\left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x}\right)dx = \int 10kdt$$

ดังนั้น $$\ell n|60-x| - \ell n|15-x| = 10kt+C$$

ดังนั้น $$\ell n\left|\frac{60-x}{15-x}\right| = 10kt+C$$

ดังนั้น $$\frac{60-x}{15-x} = C_1e^{10kt}$$

ถ้าแทน $t=0$ และ $x=0$ จะได้ว่า $\frac{60-0}{15-0} = C_1e^0$ นั่นคือ $C_1 = 4$

ถ้าแทน $t=20$ และ $x=6$ จะได้ว่า $\frac{60-6}{15-6} = C_1e^{200k}$

นั่นคือ $9 = 4e^{200k}$

ดังนั้น $e^{10k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$

ดังนั้น $e^{10kt} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = C_1\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $\frac{60-x}{15-x} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

ดังนั้น $x = 60\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}{4-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}\right)$

จะได้ว่า $\lim_{t\to\infty} x = 60\left(\frac{1-0}{4-0}\right) = 15$

สรุปว่า ปริมาณสาร C ณ เวลา t ใดๆ คือ $60\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}{4-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{20}}}\right)$ กรัม

ปริมาณสาร C ที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นได้ คือ 15 กรัม

แบบฝึกหัดท้ายบทที่4

แบบฝึกหัด 4.1

เรื่อง สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

1.1 $xdy - ydx = 0$

1.2 $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

1.3 $2ydx + (xy + 5x)dy = 0$

1.4 $(xy - 4x)dx + (x^2 y + y)dy = 0$

1.5 $y' = x - 1 + xy - y$

1.6 $(y + yx^2)dy + (x + xy^2)dx = 0$

1.7 $e^{x + 2y} dx - e^{2x - y} dy = 0$

1.8 $\cos x dy - y dx = 0$

1.9 $y(1+ x^3)y' + x^2(1+ y^2) = 0$

1.10 $x^2 y' - yx^2 = 0$

1.11 $x \tan y - y' \sec x = 0$

1.12 $e^y \sin x\, dx - \cos^2 x dy = 0$

1.13 $\sin y \cos x dx + (1 + \sin^2 x)dy = 0$

แบบฝึกหัด 4.2

เรื่อง สมการเอกพันธ์

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

1.2 $xdy + (y + x\tan\dfrac{y}{x})dx = 0$

1.3 $(x^2 y + y^3)dx + x^3 dy = 0$

1.4 $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$

1.5 $xy' = x + y$

2.จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+x}{y-x}$ เมื่อ $y(-1)=0$

2.2 $x^2ydx-(x^3-y^3)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=1$

2.3 $14xyy' = 6x^2-7y^2$ เมื่อ $y(-2)=1$

2.4 $x^2y' = 3x^2-2xy+y^2$ เมื่อ $y(1)=\dfrac{3}{2}$

แบบฝึกหัด 4.3

เรื่อง สมการแม่นตรง

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $2x-y^3-3xy^2\dfrac{dy}{dx} = 0$

1.2 $(2x-5y)y' = 6x-2y$

1.3 $x(x\cos(x^2y)-2y)y'+2xy\cos(x^2y) = y^2$

1.4 $(\sin(xy)+xy\cos(xy))\dfrac{dy}{dx} + y^2\cos(xy) = 0$

1.5 $\dfrac{3xy+1}{y}dx - \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$

1.6 $\pi y + (\pi yx+\arcsin y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

1.7 $\dfrac{\ell n\, y}{x}dx + \left(\dfrac{\ell n\, x}{y}+\sin y\right)dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $(3x^2y+2xy)dx + (x^3+x^2+2y)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=2$

2.2 $\left(e^y+ye^x\right)dx + \left(e^x+xe^y\right)dy = 0$ เมื่อ $y(1)=0$

2.3 $(\sin^2 x-2y\cos x)y'+2y\sin x\cos x+y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0)=-2$

2.4 $\ell n(1+y^2) = \left(\frac{1}{y}-\frac{2xy}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2)=\sqrt{e-1}$

2.5 $y(1+xy^2)dx + xdy = 0$ เมื่อ $y(1)=-1$

2.6 $(x^2+y)dx + (x^2\cos y - x)dy = 0$ เมื่อ $y(2)=0$

2.7 $(x\tan y-2\sec y)y' + 1 = 0$ เมื่อ $y(-1)=\pi$

แบบฝึกหัด 4.4

เรื่อง สมการเชิงเส้น

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1) $(x-2)\frac{dy}{dx} = y+2(x-2)^3$

2) $x^3\frac{dy}{dx} +(2-3x^2)y = x^3$

3) $y\ln y\,dx+(x-\ln y)dy = 0$

4) $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

5) $\frac{dy}{dx} + 2xy+xy^4 = 0$

6) $\frac{dy}{dx}+y = y^2(\cos x-\sin x)$

7) $\frac{dy}{dx}+y\tan x = \cos x$

8) $\cos t\,dr+(r\sin t-\cos^4 t)\,dt = 0$

9) $x\,dy - \{y+xy^3(1+\ln x)\}\,dx = 0$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

1) $2x(y+1)\,dx - (x^2+1)\,dy = 0 \quad , y(1) = -5$

2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \sqrt{(xy)^3} \quad , y(1) = 4$

3) $\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 0$

4) $(x+2)\dfrac{dy}{dx} + y = f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \le x < 2 \\ 4 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$ โดยที่ $y(0) = 4$

แบบฝึกหัด 4.5

เรื่อง การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์

1. โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 40 นาทีสำหรับลดอุณหภูมิจาก 200 องศา เป็น 100 องศา เมื่อจุ่มลงในของเหลวชนิดหนึ่งซึ่งมีอุณหภูมิ 10 องศา แต่ถ้าของเหลวชนิดนี้มีอุณหภูมิ 5 องศา จงหาระยะเวลาที่โลหะแท่งนี้ใช้ในการลดอุณหภูมิจาก 100 องศา เป็น 10 องศา

2. เมื่อเทอร์โมมิเตอร์อยู่ในห้องที่มีอุณหภูมิคงตัวที่ $30°F$ และเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที พบว่าเทอร์โมมิเตอร์บอกอุณหภูมิที่ $0°F$ และเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที พบว่า เทอร์โมมิเตอร์บอกอุณหภูมิที่ $15°F$ จงหาอุณหภูมิเริ่มต้นของเทอร์โมมิเตอร์

3. ถังใบหนึ่งมีน้ำจืด 1000 ลิตร ถ้าเติมน้ำเกลือที่มีความเข้มข้น 1 กิโลกรัมต่อลิตร ลงในถังด้วยอัตราเร็วคงที่ 6 ลิตรต่อนาที และในขณะเดียวกันปล่อยน้ำในถังซึ่งได้คนให้เข้าเป็นเนื้อเดียวกันแล้วออกจากถังในอัตราเดียวกับอัตราการไหลเข้า จงหาเวลาเมื่อความเข้มข้นเกลือในถังเป็น 0.5 กิโลกรัมต่อลิตร

4. สาร A ทำปฏิกิริยาเปลี่ยนเป็นสาร B พบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที สาร A เปลี่ยนไปแล้ว $\dfrac{100}{3}\%$ จงหาว่าเมื่อปฏิกิริยานี้ครบ 60 นาที จะมีสารละลายเหลือกี่เปอร์เซ็นต์

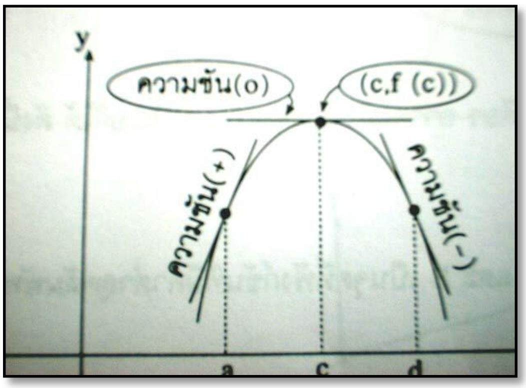
บทที่ 5

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

5.1 ค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

5.1.1 นิยาม

1. ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$ ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้



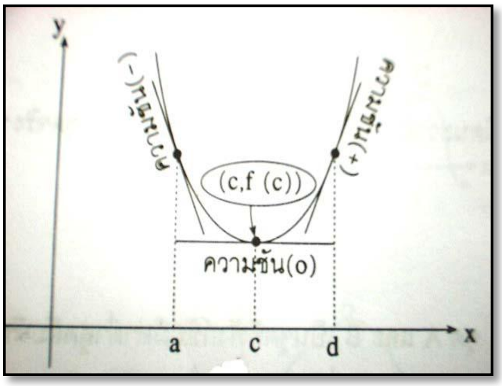
ภาพที่ 5.1 ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$

ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย

แต่ $f'(x) < 0$ เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย

แล้วฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = c$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(x)$

2. ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ x = c ถ้าในช่วงเปิดมีค่า c ที่ทำให้ $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า x ในช่วงเปิดนี้



ภาพที่ 5.2 ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ณ ที่ $x = c$

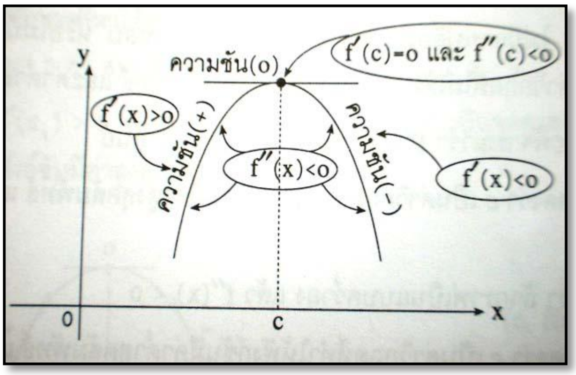
ถ้า f '(x)<0 เมื่อ x น้อยกว่า c เล็กน้อย

แต่ f '(x)> 0 เมื่อ x มากกว่า c เล็กน้อย

แล้วฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = c และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ f(c)

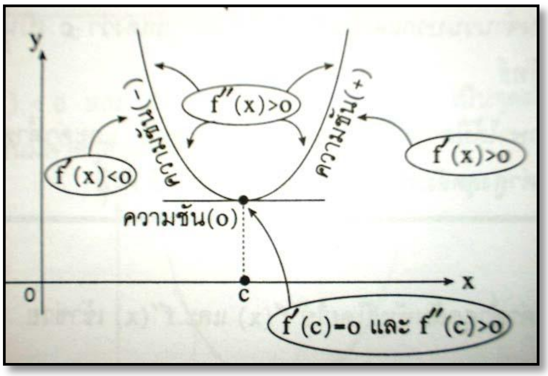
3. ถ้า c เป็นจำนวนในโดเมนของฟังก์ชัน f และถ้า $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้จะเรียก c ว่าเป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และจุด $(c, f(c))$ บนกราฟของ f ถูกเรียกว่าจุดวิกฤตของกราฟของf เมื่อทราบว่า $f'(c) = 0$ แสดงว่า c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชันให้ระวังดังนี้

3.1 c อาจเป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ถ้ากราฟเป็นรูปคว่ำลงแล้ว $f''(x) < 0$ แสดงว่า $f''(c) < 0$ ด้วย



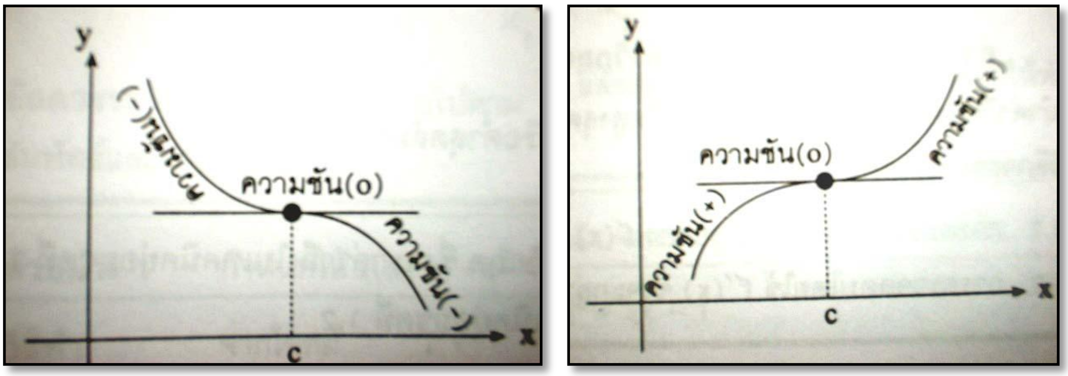
ภาพที่ 5.3 ค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

3.2 cอาจเป็นค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้ากราฟเป็นรูปหงายขึ้น แล้ว $f''(x) > 0$ แสดงว่า $f''(c) > 0$ ด้วย



ภาพที่ 5.4 ค่าวิกฤตที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3.3 cอาจเป็นค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เช่น



ภาพที่ 5.5 ค่าวิกฤตที่ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

<u>**สรุป**</u> ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f(x)

1. หา $f'(x)$
2. จาก $f'(x)$ หาจุดวิกฤต สมมติว่าจุดนั้นเป็น $x=c$
3. ทดสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ ดังนี้

- 3.1 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $+\Rightarrow-$ จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
- 3.2 ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $-\Rightarrow+$ จะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$
- 3.3 ถ้า ไม่เปลี่ยนเครื่องหมาย จะได้ว่า f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ แต่ที่จุด $x=c$ จะเป็นจุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้
$f(x)=8-12x+3x^2+2x^3$

วิธีทำ จาก $f(x)=8-12x+3x^2+2x^3$

ดำเนินการตามลำดับ ดังนี้

1. หา $f'(x)$ จะได้ $f'(x)=-12+6x+6x^2$

2. หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)=0$

นั่นคือ $-12 + 6x + 6x^2 = 0$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2, 1$

3. หา $f''(x)$ จะได้ $f''(x) = 6 + 12x$

4. นำ $x = -2, 1$ ไปแทนค่าใน $f''(x)$

4.1 แทนค่า $x = -2$ จะได้ $f''(-2) = 6 + 12(-2) = -18$ เป็นจำนวนลบ แสดงว่าฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

นำ $x = -2$ แทนค่าใน $f(x) = 8-12x+3x^2+2x^3$ จะได้

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $f(-2) = 8-12(-2)+3(-2)^2+2(-2)^3 = 28$

4.2 แทนค่า $x = 1$ จะได้ $f''(1) = 6+12(1) = 12$ เป็นจำนวนบวก

แสดงว่าฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

นำ $x = 1$ แทนค่าใน $f(x) = 8-12x+3x^2+2x^3$ จะได้

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f(1) = 8-12(1)+3(1)^2+2(1)^3 = 1$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้ $f(x)=x^3$

วิธีทำ จาก $f(x)=x^3$

ดำเนินการตามลำดับ ดังนี้

1. หา $f'(x)$ จะได้ $f'(x)=3x^2$

2. หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)=0$

นั่นคือ $3x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

3. นำค่า x = 0 ไปตรวจสอบด้วยวิธีที่2 ดังนี้

จาก $f'(x) = 3x^2$

ดังนั้น $f''(x) = 6x$

นั่นคือ $f''(0) = 6(0) = 0$

ดังนั้นไม่สามารถตรวจสอบด้วยวิธีที่ 2 ได้ ต้องย้อนกลับไปใช้วิธีที่ 1

3.1 ถ้า x < 0 เล็กน้อย จะได้ $f'(x) = 3x^2$ เป็นจำนวนบวกเช่น แทน x = -1 จะได้ $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ เป็นจำนวนบวก

3.2 ถ้า x> 0 เล็กน้อย จะได้ $f'(x) = 3x^2$ เป็นจำนวนบวกเช่น แทน x = 1 จะได้ $f'(1) = 3(1)^2 = 3$ เป็นจำนวนบวก

การเปลี่ยนจากจำนวนลบเป็นจำนวนบวก แสดงว่าจุดที่ x = 0 คือจุด (0, 0) ไม่เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์และไม่เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนั้น ฟังก์ชัน f นี้ จึงไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จาก $f'(x)=3x^2$ จะได้ว่า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \geq 0$ หรือ $x \leq 0$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้

1. $f(x) = 2x^2 - 2x$ 2. $f(x) = x^3 - 27x - 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^2 - 2x$

จะได้ $f'(x) = 4x - 2$ (จะได้ค่าวิกฤตคือ $x = \frac{1}{2}$)

$f''(x) = 4$ ซึ่งมากกว่า 0 (แสดงว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์)

ดังนั้น f จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

จาก $f(x) = x^3 - 27x - 1$

จะได้ $f(x) = x^3 - 27x - 1$ (จะได้ค่าวิกฤตคือ $x = 3, -3$)

$f''(x) = 6x$ $f''(3) = 6(3) = 18$ (แสดงว่า f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x = 3)

$f''(-3) = 6(-3) = -18$ (แสดงว่า f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x = −3)

ดังนั้น f จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(3) = 3^3 - 27(3) - 1 = -55$

และ f จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-3) = (-3)^3 - 27(-3) - 1 = 53$

5.2 การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

เราจะนำเอาความรู้เกี่ยวกับค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของฟังก์ชันมาช่วยในการแก้ปัญหาโจทย์ต่างๆ โดยจะต้องสร้างฟังก์ชันที่มีความสัมพันธ์กับโจทย์และสิ่งที่ต้องการหา ต่อจากนั้นจึงหาจุดที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันดังกล่าวมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดไว้ด้วย

5.2.1 แนวทางในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด

ขั้นตอนที่ 1 การแปลงรูปโจทย์ให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 กำหนดตัวแปรให้กับสิ่งที่เกี่ยวข้องในโจทย์

1.2 เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในข้อ 1.1 และเงื่อนไขต่าง ๆ ที่มี (ในกรณีนี้เราอาจเขียนรูปประกอบเพื่อช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรชัดเจนขึ้น)

1.3 แยกแยะว่าตัวแปรใดเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ขั้นตอนที่ 2การหาคำตอบ

2.1 สร้างฟังก์ชันของตัวแปรที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

2.2 ถ้าฟังก์ชันในข้อ 2.1 ไม่เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว ให้ใช้ความสัมพันธ์ในข้อ 1.2 เข้าช่วย เพื่อทำให้เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว

2.3 หาโดเมนของฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ได้จากข้อ 2.2

2.4 หาคำตอบของฟังก์ชันโดยใช้ความรู้จากข้างต้น

2.5 หาค่าของตัวแปรที่เหลือจากคำตอบของตัวแปรที่ได้มาจากขั้นตอน 2.4 โดยใช้ความสัมพันธ์ในขั้นตอน 1.2

ขั้นตอนที่ 3การแปลผล แปลงคำตอบที่ได้ให้อยู่ในรูปของภาษาทั่วไป

ตัวอย่างที่ 5.4 สนามรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 2700 ตารางเมตร ต้องการล้อมรั้วโดยรอบและรั้วแบ่งครึ่งสนามซึ่งรั้วสำหรับแบ่งครึ่งสนามราคาเมตรละ 80 บาทส่วนรั้วโดยรอบสนามราคาเมตรละ 120 บาทจงหาขนาดของสนามซึ่งจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้สนามยาว x เมตร และกว้าง y เมตรให้ค่าทำรั้วทั้งหมด เป็น f(x)

ดังนั้น f(x) = 120 (2x + 2y) + 80y = 240x + 320y

แต่พื้นที่สนามทั้งหมดเท่ากับ 2700 ตารางเมตร เพราะฉะนั้น $x \cdot y = 2700$

ดังนั้น $y = \dfrac{2700}{x}$

นั้นคือ $f(x) = 240x + 320\dfrac{2700}{x}$

$f'(x) = 240 - \dfrac{864,000}{x^2}$ กำหนดให้ค่าของ $f'(x) = 0$

ได้ว่า $240 - \dfrac{864,000}{x^2} = 0$ นำ x^2 มาคูณตลอดสมการ

จะได้ว่า $240x^2 + 864,000 = 0$

$x^2 = \dfrac{864,000}{240}$, $x^2 = 3600$

ฉะนั้น $x = 60$

ดังนั้น 60 เป็นค่าวิกฤตของ f ใช้อนุพันธ์อันดับ2 ทดสอบว่า f(60) เป็นค่าต่ำสุดหรือไม่

$f''(x) = \dfrac{864,000}{x^3}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์

แสดงว่า f (60) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน (0, ∞)

เพราะว่าสนามมีพื้นที่เท่ากับ $x \cdot y = 2700$ ถ้า

$x = 60$ จะได้ $y = 45$

ดังนั้นสนามจะต้องกว้าง 45 เมตร ยาว 60 เมตร จึงจะเสียค่ารั้วน้อยที่สุด

ตัวอย่างที่ 5.5 ถังเปิดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตร 125 ลบ.เมตร ค่าวัสดุที่ใช้ทำก้นถังตารางเมตรละ160 บาท และวัสดุสำหรับด้านข้างตารางเมตรละ 80 บาทจงหาขนาดของถังที่มีความจุเท่าเดิมแต่เสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ถังมีฐานยาวด้านละ x เมตรถังมีความสูง y เมตร

ถังนี้มีปริมาตร $x^2 y = 125$ ลบ.เมตร.......................... 1)

ให้ $f(x)$ เป็นค่าวัสดุที่ใช้ทำถัง

ดังนั้น $f(x)=160x^2+80(4xy)=160x^2+320xy$

จากสมการที่ 1 จะได้ว่า $y=\dfrac{125}{x^2}$

จะได้ว่า $f(x)=160x^2+320x\cdot\dfrac{125}{x^2}$

โดเมนของ f คือ $(0,\infty)$

หาอนุพันธ์อันดับ 2 $f'(x)=320-320\cdot\dfrac{125}{x^3}$

เมื่อ x = 0 เราหาค่า $f'(x)$ ไม่ได้แต่ให้ $f'(x)=0$

จะได้ $320-320\cdot\dfrac{125}{x^3}=0,\quad \Rightarrow 320=320\cdot\dfrac{125}{x^3}\Rightarrow x^3=\dfrac{320(125)}{320}$

ได้ว่า $x^3=125\Rightarrow x=5$

ดังนั้น 5 เป็นค่าวิกฤตของ f ใช้อนุพันธ์อันดับ2 ทดสอบว่าf(5) เป็นค่าต่ำสุดหรือไม่

$f''(x)=320-320\cdot\dfrac{125}{x^3}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์

แสดงว่า f (5) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งมีเพียงค่าเดียวใน $(0,\infty)$

เพราะว่าปริมาตรของถังคือ $x^2y=125$ ถ้า x = 5 จะได้ y = 5

ดังนั้นจะต้องทำถังซึ่งมีฐานจัตุรัสด้านละ 5 เมตร และสูง 5 เมตรจึงจะได้ถังมีปริมาตรตามต้องการและเสียค่าวัสดุน้อยที่สุด

แบบฝึกหัดท้ายบทที่5

แบบฝึกหัด 5.1

เรื่อง ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

1. จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน fเมื่อกำหนดให้

1.1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ 1.2 $f(x)=3x^2-x^3$

1.3 $f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ 1.4 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+7$

1.5 $f(x)=x^3-3x+7$ 1.6 $f(x)=x^4+4x^3$

1.7 $f(x)=x^3-5x^2+3x$ 1.8 $f(x)=x^4-16$

1.9 $f(x)=8x^5-5x^4-20x^3$ 1.10 $f(x)=4x^{1/3}+x^{4/3}$

1.11 $f(x)=x^5+2x$ 1.12 $f(x)=x^2(x-1)^2$

2. จงหาจุดสูงสุดสัมบูรณ์ และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน fบนช่วงที่กำหนดให้

2.1 $f(x)=x^3-2x^2+x-1;-3\le x\le 3$ 2.2 $f(x)=x^2-\frac{1}{6}x^3;-1\le x\le 5$

2.3 $f(x)=x^4-2x^2+1;0\le x\le 5$ 2.4 $f(x)=2x^3-9x^2+12x;0\le x\le 2$

2.5 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+15;0\le x\le 3$ 2.6 $f(x)=3-|x-2|;1\le x\le 4$

2.7 $f(x)=5x^{2/3}-x^{5/3};-1\le x\le 4$ 2.8 $f(x)=x+\frac{4}{x};1\le x\le 4$

แบบฝึกหัด 5.2

เรื่อง การประยุกต์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

1. บริษัทแห่งหนึ่งทำกล่องดีบุกต้องการใช้แผ่นดีบุกขนาด8 × 15 นิ้วโดยตัดทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วยกเป็นความสูงของกล่องดีบุก จงหาความยาวที่ยาวที่สุดของด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจะทำให้กล่องดีบุกมีปริมาตรมากที่สุด

2. ชมรมคณิตศาสตร์จังหวัดยะลาเก็บเงินค่าสมาชิกต่อคนปีละ 99.50 บาทสำหรับสมาชิกที่เกิน 600 คนและเพิ่มอีก 50 สตางค์ ถ้าสมาชิกน้อยกว่า600 คน จงหาจำนวนสมาชิกที่จะทำให้ชมรมมีกำไรมากที่สุดทุกๆ ปี

3. การสร้างกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีก้นกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและไม่มีฝาปิดด้านบนและมีปริมาตร 62.5 ลูกบาศก์เซนติเมตร แล้วพื้นที่ผิวของกล่องใบนี้มีค่าน้อยที่สุดเท่าไร

4. นายล่องลอยลอยเรืออยู่ในทะเลที่จุด A ห่างจากหาดทรายที่จุด B ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุด เท่ากับ 9 ไมล์ เขาต้องการจะไปที่จุด D ซึ่งอยู่ที่หาดทรายห่างจากจุด B เท่ากับ 20 ไมล์ ถ้าเขาพายเรือได้ด้วยอัตราเร็ว 4 ไมล์ต่อชั่วโมงไปที่จุด C ซึ่งอยู่ระหว่างจุด B และ D หลังจากนั้นเขาเดินได้ด้วยอัตราเร็ว 5ไมล์ต่อชั่วโมง จากจุด C ถึง D แล้ว เขาต้องไปขึ้นฝั่งที่ไหนจึงจะใช้เวลาน้อยที่สุด

5. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานยาว12 ฟุต และสูง 6 ฟุต จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้ โดยมีฐานทับกับฐานของสามเหลี่ยม

บทที่ 6

การอินทิเกรต

6.1 การอินทิเกรตเบื้องต้น

6.1.1 สูตรมาตรฐานของอินทิเกรต

ความหมายแรกของอินทิเกรต คือ การดำเนินการผกผันอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x}$$

เรียกฟังก์ชัน sin x ว่าการอินทิกรัลของฟังก์ชัน cos x เทียบกับตัวแปร x สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $\int dx$ หมายถึงการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x เขียนแทนด้วย

$$\boxed{\int \cos x \ \ dx = \sin x}$$

6.1.2 ชนิดของอินทิเกรต แบ่งเป็น 2 ชนิด ได้แก่

1. การอินทิเกรตไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

ถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้ว เรียก $F(x)$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ (Anti derivetives) ของ $f(x)$ เทียบกับ x

$$F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) + \frac{dc}{dx} = f(x) \qquad ; \ c = \text{ค่าคงตัวใดๆ}$$

2. การอินทิเกรตจำกัดเขต (Definite Integral)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์ เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้ว อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f คือ เซตทั้งหมดของปฏิยานุพันธ์ของ f เขียนแทนด้วย

$$\boxed{\int f(x)dx \text{ โดยที่ } \int f(x)dx = F(x) + c}$$

6.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือ ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการ บวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม

6.2.1 สูตรการอินทิเกรตฟังก์ชัน**ชันพีชคณิต**

ให้ u และv เป็นฟังก์ชันของ x และ a, c, n เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้วจะได้

1. $\int (f'(x))dx = f(x) + C$
2. $\int du = u + C$
3. $\int audx = a\int udx$
4. $\int u^n dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

ตัวอย่างที่ 6.1 จงหาค่า $\int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 5)dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int(4x^3+3x^2-2x-5)dx = \int 4x^3dx+\int 3x^2dx-\int 2xdx-\int 5dx$$

$$= 4\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int xdx-5\int dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)+3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right)-2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)-5x+C$$

$$= x^4+x^3-x^2-5x+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาค่า $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$

$$\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}\right)dx = \int\sqrt[3]{x}\,dx+\int\frac{2}{\sqrt{x}}dx-\int\frac{1}{2}xdx+\int\frac{3}{x}dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}dx+2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}\int xdx+3\int\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{2x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)+3\ln|x|+C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+4\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}+3\ln|x|+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาค่า $\int(3-2x)\sqrt{x}dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$

$$\int (3-2x)\sqrt{x}\,dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}dx - \int 2x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - 2\int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.4 จงหาค่า $\int (2t-3)^2\,dt$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int (2t-3)^2\,dt = \int (4t^2 - 12t + 9)dt$$

$$= \int 4t^2dt - \int 12tdt + \int 9dt$$

$$= 4\int t^2dt - 12\int tdt + 9\int dt$$

$$= \frac{4t^3}{3} - \frac{12t^2}{2} + 9t + C$$

$$= \frac{4t^3}{3} - 6t^2 + 9t + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.5 จงหาค่า $\int \frac{2x^3-7x^2+4x+3}{x^2}dx$

วิธีทำ จากสูตรฟังก์ชันพีชคณิต $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$

$$\int \frac{2x^3-7x^2+4x+3}{x^2}dx = \int \left(\frac{2x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right)dx$$

$$= \int \left(2x - 7 + \frac{4}{x} + 3x^{-2} \right)dx$$

$$= 2\int xdx - 7\int dx + 4\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-2}dx$$

$$= x^2 - 7x + 4\ln|x| + \frac{3x^{-1}}{-1} + C$$

$$= x^2 - 7x + 4\ln|x| - \frac{3}{x} + C \blacksquare$$

6.2.2 การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

มักจะใช้ช่วยในการอินทิเกรตที่มีรูปซับซ้อนให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งมีหลักของการอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรดังนี้

1. พิจารณาตรวจสอบที่จะเลือกสูตรมาใช้ในการอินทิเกรต

2. เลือก $u = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรในตัวถูกอินทิเกรต

3. หา $\frac{du}{dx} = g'(x)$ และจะได้ $dx = \frac{du}{g'(x)}$

4. แทนค่า $g(x) = u$ และ $dx = \frac{du}{g'(x)}$ ซึ่งในขั้นนี้การอินทิกรัล จะต้องอยู่ในเทอม ของu โดยไม่ให้มีตัวแปร x เหลืออยู่

5. คำนวณอินทิกรัลในเทอมของ u

ตัวอย่างที่ 6.6 จงหาค่า $\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า u และเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $u = x^3+1$ จะได้ $du = 3x^2dx$ และ $dx = \frac{du}{3x^2}$ แทนค่าจะได้

$$\int 2x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int 2x^2\sqrt{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sqrt{u}du$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+C$$

$$= \frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \frac{4}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C \quad ■$$

ตัวอย่างที่ 6.7 จงหาค่า $\int \sin^4 x\cos xdx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า u และเปลี่ยนตัวแปร

ให้ $u = \sin x$ จะได้ $du = \cos xdx$ และ $dx = \frac{du}{\cos x}$ แทนค่าจะได้

$$\int \sin^4 x\cos xdx = \int u^4\cos x\frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^4du$$

$$= \frac{u^5}{5}+C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5}+C \quad ■$$

ตัวอย่างที่ 6.8 จงหาค่า $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า u และแทนค่าลงไป

ให้ $u = x^2 + 2x - 5$ จะได้

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}dx = \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}}\frac{d(x^2+2x-5)}{2x+2}$$

$$= \int (x+1)(x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}}\frac{d(x^2+2x-5)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x-5)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x-5)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+2x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$= (x^2+2x-5)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= \sqrt{x^2+2x-5}+C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.9 จงหาค่า $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

วิธีทำ จากหลักการเปลี่ยนตัวแปรกำหนดค่า u และแทนค่าลงไป

ให้ $u = \ln x$ จะได้

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \frac{\ln^2 x}{x}\cdot\frac{d(\ln x)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \int \ln^2 x d(\ln x) \quad = \frac{\ln^3 x}{x}+C \quad \blacksquare$$

การอินทเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในรูป u นั้น ไม่สามารถใช้ได้กับทุกๆ ฟังก์ชันเช่น $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \sin\left(x^2\right)dx$ ซึ่งไม่สามารถทำได้โดยวิธีดังกล่าวและสำหรับอินทิกรัลใดๆ ก็ตามที่มีตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปเศษส่วน และทั้งเศษและส่วน เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่เศษมีกำลังสูงสุดมากกว่หรือเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วนแล้ว ให้นำส่วนไปหารเศษ จนกระทั่งเศษมีกำลังสูงสุดน้อยกว่าส่วน แล้วจึงนำไปอินทิเกรตทีละเทอมได้

ตัวอย่างที่ 6.10 จงหาค่า $\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ x^2+2x+1 ไปหาร x^2+2x+6 ได้ดังนี้

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x^2+2x+6 \quad (\; 1 \\ & \underline{x^2+2x+1} \\ & \qquad\quad \underline{\underline{5}} \end{array}$$

ดังนั้น $\frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{5}{x^2+2x+1}$ จะได้

$$\int \frac{x^2+2x+6}{x^2+2x+1}dx \quad = \quad \int \left(1 + \frac{5}{x^2+2x+1}\right)dx$$

$$= \int dx + \int \frac{5}{x^2+2x+1} dx$$

$$= \int dx + \int \frac{5}{(x+1)^2} dx$$

$$= x + 5\int (x+1)^{-2} d(x+1) \qquad (\text{ให้ } u = x+1)$$

$$= x + \frac{5(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= x - \frac{5}{x+1} + C \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 6.11 จงหาค่า $\int \frac{x^3+2x^2-3}{x+1} dx$

วิธีทำ เนื่องจากกำลังสูงสุดของเศษเท่ากับกำลังสูงสุดของส่วน

จึงนำ $x+1$ ไปหาร x^3+2x^2-3 ได้ดังนี้

$$x+1 \big) x^3+2x^2-3 \big(\; x^2+x-1$$

$$\underline{x^3+x^2}$$

$$x^2-3$$

$$\underline{x^2+x}$$

$$-x-3$$

$$\underline{-x-1}$$

$$\underline{\underline{-2}}$$

ดังนั้น $\dfrac{x^3+2x^2-3}{x+1} = x^2+x-1-\dfrac{2}{x+1}$ จะได้

$$\int \frac{x^3+2x^2-3}{x+1}dx = \int\left(x^2+x-1-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \int x^2dx + \int x\,dx - \int dx - \int \frac{2}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\int\frac{d(x+1)}{x+1} \quad (\text{ให้ } u = x+1)$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x+1|+C \; \blacksquare$$

6.3 การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Functions) คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ, ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน, ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น

6.3.1 การอินทิเกรตฟังก์ชันลอการิทึม มี 1 สูตรอยู่ คือ

$$\boxed{\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c}$$

เนื่องจากสูตร $\int \frac{1}{u}du$ ก็คือ $\int u^{-1}du$ ซึ่งคล้ายกับสูตร $\int u\,du$ แต่แตกต่างกันที่กำลังเท่านั้น นั้นคือ ถ้ากำลังของ u เป็น -1 ให้ใช้สูตร $\int \frac{1}{u}du$ แต่ถ้ากำลังของ u เป็นค่าคงที่อื่นๆ ที่ไม่ใช่ -1 ให้ใช้สูตร $\int u^n du$

ตัวอย่างที่ 6.12 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{2x+3}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x+3$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d(2x+3)}{dx} \quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int \frac{1}{2x+3}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

แต่ $u = 2x+3$ ดังนั้น $\int \frac{1}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$

ตัวอย่างที่ 6.13 จงหาค่าของ $\int \frac{x^2}{x^3+5}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3+5$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d(x^3+5)}{dx} \quad \frac{1}{3x^2}du = dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}dx = \int \frac{x^2}{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{u}\frac{du}{x^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\cancel{x^2}}{u}\frac{du}{\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$

6.3.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลังมีสูตรใช้ 2 สูตร คือ

$$1. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$2. \int e^u du = e^u + c$$

ตัวอย่างที่ 6.14 จงหาค่าของ $\int 3^{5x}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

ให้ ให้ $u=5x$ $\frac{du}{dx}=\frac{d(5x)}{dx}$ $\frac{1}{5}du=dx$

$$\int 3^{5x}dx = \int 3^{u}\cdot\frac{du}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int 3^{u}\,du = \frac{3^{u}}{5\ln 3}+c$$

แต่ $u=5x$ ดังนั้น $\int 3^{5x}dx = \frac{3^{5x}}{5\ln 3}+c$

ตัวอย่างที่ 6.15 จงหาค่าของ $\int x10^{x^2-6}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+c$

ให้ $u=x^2+6$ $\frac{du}{dx}=\frac{d\left(x^2+6\right)}{dx}$ $\frac{1}{2x}du=dx$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \int x10^{u}\frac{du}{2x}$$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \frac{1}{2}\int 10^{u}du$$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \frac{10^{u}}{2\ln 10}+c$$

แต่ $u=x^2+6$ ดังนั้น $\int x10^{x^2-6}dx = \frac{10^{x^2+6}}{2\ln 10}+c$

ตัวอย่างที่ 6.16 จงหาค่าของ $\int x^2e^{x^3+5}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^{u}du=e^{u}+c$

ให้ $u=x^3+5$ $\frac{du}{dx}=\frac{d\left(x^3+5\right)}{dx}$ $\frac{1}{3x^2}du=dx$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \int x^2e^{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}\int e^{u}du$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}e^{u}+c$$

แต่ $u=x^3+5$ ดังนั้น $\int x^2e^{x^3+5}dx$ = $\frac{1}{3}e^{x^3+5}+c$

ตัวอย่างที่ 6.16จงหาค่าของ $\int\left(e^x+1\right)^2dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du=e^u+c$

จากสมการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้ว่า $\left(e^{2x}+2e^x+1\right)$

$$\int\left(e^x+1\right)^2dx = \int\left(e^{2x}+2e^x+1\right)dx$$

$$\int\left(e^x+1\right)^2dx = \int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx$$

จาก $\int e^{2x}dx$ ให้ $u=2x$ $\frac{du}{dx}=\frac{d\left(2x\right)}{dx}$ $\frac{1}{2}du=dx$

$$\int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx = \frac{1}{2}\int e^udu+\int 2e^xdx+\int 1dx$$

$$\int e^{2x}dx+\int 2e^xdx+\int 1dx = \frac{1}{2}e^u+2e^x+x$$

แต่ $u=2x$ ดังนั้น $\int\left(e^x+1\right)^2dx$ = $\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x$

แต่$u=x^3+5$ดังนั้น $\int\frac{x^2}{x^3+5}dx$ = $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+5\right|+c$

6.3.2 การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง

มีสูตรใช้ 2 สูตร คือ

1. $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+c$
2. $\int e^u du=e^u+c$

ตัวอย่างที่ 6.14 จงหาค่าของ $\int 3^{5x}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+c$

ให้ ให้ $u=5x$ $\frac{du}{dx}=\frac{d\left(5x\right)}{dx}$ $\frac{1}{5}du=dx$

$$\int 3^{5x}dx = \int 3^{u} \cdot \frac{du}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int 3^{u}\,du \qquad = \frac{3^{u}}{5\ln 3}+c$$

แต่ $u = 5x$ ดังนั้น $\int 3^{5x}dx = \dfrac{3^{5x}}{5\ln 3}+c$

ตัวอย่างที่ 6.15 จงหาค่าของ $\int x10^{x^2-6}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a}+c$

ให้ $u = x^2+6$ $\qquad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d\left(x^2+6\right)}{dx} \quad \dfrac{1}{2x}du = dx$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \int x10^{u}\,\frac{du}{2x}$$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \frac{1}{2}\int 10^{u}du$$

$$\int x10^{x^2-6}dx = \frac{10^{u}}{2\ln 10}+c$$

แต่ $u = x^2+6$ ดังนั้น $\int x10^{x^2-6}dx = \dfrac{10^{x^2+6}}{2\ln 10}+c$

ตัวอย่างที่ 6.16 จงหาค่าของ $\int x^2e^{x^3+5}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^{u}du = e^{u}+c$

ให้ $u = x^3+5$ $\qquad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{d\left(x^3+5\right)}{dx} \quad \dfrac{1}{3x^2}du = dx$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \int x^2e^{u}\,\frac{du}{3x^2}$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}\int e^{u}du$$

$$\int x^2e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}e^{u}+c$$

แต่ $u = x^3+5$ ดังนั้น $\int x^2e^{x^3+5}dx = \dfrac{1}{3}e^{x^3+5}+c$

ตัวอย่างที่ 6.16จงหาค่าของ $\int (e^x+1)^2 dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int e^u du = e^u + c$

จากสมการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้ว่า $(e^{2x}+2e^x+1)$

$$\int (e^x+1)^2 dx \quad = \quad \int (e^{2x}+2e^x+1)dx$$

$$\int (e^x+1)^2 dx \quad = \quad \int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx$$

จาก $\int e^{2x}dx$ ให้ $u = 2x$ $\quad \frac{du}{dx} = \frac{d(2x)}{dx}$ $\quad \frac{1}{2}du = dx$

$$\int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int e^u du + \int 2e^x dx + \int 1dx$$

$$\int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx \quad = \quad \frac{1}{2}e^u + 2e^x + x$$

แต่ $u = 2x$ ดังนั้น $\int (e^x+1)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$

6.3.4 การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

มีสูตรที่ใช้ คือ

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c \text{ เมื่อ } a > 0$$

$$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\frac{u}{a} + c \text{ เมื่อ } a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2 \pm u^2}}{u}\right) + c$$

การพิจารณาว่าอินทิเกรตแบบใดที่ใช้สูตรในกลุ่มฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน คือ อินทิเกรตที่มีนิพจน์ที่สามารถจัดให้เข้ารูป $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$

ลักษณะนิพจน์ที่สามารถจัดให้เข้ารูป $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$ มี 2 ประเภท คือ

1. นิพจน์ที่ประกอบด้วย 2 พจน์ คือ พจน์ที่เป็นตัวแปรและพจน์คงที่ เช่น

$$4x^2+9=(2x)^2+(3)^2; u=2x, a=3$$

$$3-16x^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-(4x)^2; u=4x, a=\sqrt{3}$$

$$3x+1=\left(\sqrt{3x}\right)^2+(1)^2; u=\sqrt{3x}, a=1$$

2. นิพจน์ที่ประกอบด้วยพจน์ต่างๆ เช่น $x^2-6x+25, -4x-3, x^4+2x^2+2$ ควนจัดให้อยู่ในรูของ $u^2+a^2, u^2-a^2, a^2-u^2$ โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ มีหลักการดังนี้

1. เรียงกำลังของตัวแปรจากมากไปน้อย

2. ทำสัมประสิทธิ์ หน้าพจน์ตัวแปรที่มีกำลังสูงสุดให้เป็น 1

3. คิดคำนวณพจน์คงที่ที่จะต้องใช้จากสูตรต่อนี้

พจน์คงที่ = (ส.ป.ส. พจน์กลาง/2)^2

4. เติมพจน์คงที่ที่คำนวณไว้ แล้วปรับค่าให้เท่าเดิม

ตัวอย่าง เช่น $x^2-6x+25=x^2-6x+9-9+25=\left(x^2-6x+9\right)+16=(x-3)^2+(4)^2$

$$3x^2-4x-3=3\left(x^2-\frac{4}{3}x-1\right)=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-1\right)=3\left[\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-\frac{13}{9}\right]$$

$$=3\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2\right]$$

$$32+4x-x^2=32-x^2+4x=32-\left(x^2-4x\right)=32-\left(x^2-4x+4-4\right)$$

$$=32-\left(x^2-4x+4\right)+4=36-\left(x^2-4x+4\right)=(6)^2-(x-2)^2$$

ตัวอย่างที่ 6.20 จงหาค่าของ $\int\frac{4dx}{9x^2+16}$

วิธีทำ จากสูตร $\int\frac{1}{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c$

จัดให้อยู่ใ *นรูปแบบของ* a^2+u^2

$$\int \frac{4dx}{9x^2+16} = 4\int \frac{dx}{9x^2+16}$$

$$\int \frac{4dx}{9x^2+16} \quad = \quad 4\int \frac{dx}{(3x)^2+(4)^2}$$

ใช้สูตรอนุพันธ์เข้าช่วย $u = 3x, \frac{du}{dx} = \frac{d(3x)}{dx}, dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \frac{4dx}{9x^2+16} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{(3x)^2+(4)^2}$$

$$\int \frac{4dx}{9x^2+16} \quad = \quad \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2(3x)}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|$$

$$\int \frac{4dx}{9x^2+16} \quad = \quad \frac{2}{9x}\ln\left|\frac{3x+4}{3x-4}\right|+c$$

ตัวอย่างที่ 6.21 จงหาค่าของ $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$

จัดให้อยู่ในรูปแบบของ a^2-u^2

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \int \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)-(2x)^2}\,dx$$

ใช้สูตรอนุพันธ์เข้าช่วย $u = 2x, \frac{du}{dx} = \frac{d(2x)}{dx}, dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)-(2x)^2}\,du$$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx \quad =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(2x)^2}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx \quad = \quad \frac{x}{2}\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-(2x)^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น $\int \sqrt{3-4x^2}\,dx \quad = \quad \frac{x}{2}\sqrt{\sqrt{3}-4x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+c$

ตัวอย่างที่ 6.22 จงหาค่าของ $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx$

วิธีทำ จากสมการเห็นว่ากำลังของเศษมากกว่ากำลังของส่วนต้องหารก่อน

การหาร

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & 3x^3-4x^2+3x \quad | \; 3x-4 \\ & \underline{3x^3+3x} \\ & -4x^2 \\ & \underline{-4x^2-4} \\ & \underline{\underline{4}} \end{array}$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int\left(3x-4+\frac{4}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int 3xdx-\int 4dx+\int \frac{4}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = 3\int xdx-4\int dx+4\int \frac{1}{x^2+1^2}dx$$

จากสูตร $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c$

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \frac{3x^2}{2}-4x+\tan^{-1}x+c$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

แบบฝึกหัด 6.1

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันพีชคณิต

1.จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int (3x^2 + 2x - 5)dx$

2. $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 5x}{x^3}dx$

3. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2} - \sqrt{x} \right)dx$

4. $\int (1 - x)\sqrt{x}\, dx$

5. $\int (3t + 4)^2 dt$

6. $\int \sqrt{2x + 3}\, dx$

7. $\int (x^3 + 2)^6\, 3x^2 dx$

8. $\int \frac{8x^2 dx}{(x^3 + 2)^3}$

9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3 + 2}}$

10. $\int \frac{(x + 3)dx}{(x^2 + 6x)^{1/3}}$

11. $\int 3x\sqrt{1 - 2x^2}\, dx$

12. $\int \frac{dx}{(a + bx)^{1/3}}$

13. $\int \frac{(x + 1)(x - 2)}{\sqrt{x}}dx$

14. $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$

15. $\int \frac{2\sin x}{\cos^4 x}dx$

16. $\int \frac{x^2 dx}{1 - 2x^3}$

17. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 9}dx$

18. $\int \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}d\theta$

19. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}dx$

20. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x + 1}dx$

แบบฝึกหัด 6.2

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

จงหาค่าของ

1. $\int \frac{dx}{x+3}$ 2. $\int \frac{xdx}{x^2+5}$ 3. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x}$

4. $\int \frac{x+1}{x-1}dx$ 5. $\int \frac{dx}{2+3x}$ 6. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+3x}dx$

7. $\int \frac{(2x+3)}{x+2}dx$ 8. $\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}}$ 9. $\int \left(\frac{dx}{2x-1}-\frac{dx}{2+1}\right)$

10. $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$

แบบฝึกหัด 6.3

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันชี้กำลัง

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \frac{dx}{e^{2x}}$ 2. $\int a^x e^x dx$ 3. $\int xe^{x^2}dx$ 4. $\int \frac{dx}{2+3x}$ 5. $\int \left(e^{5x}+a^{5x}\right)dx$

6. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+3x}dx$ 7. $\int \frac{(2x+3)}{x+2}dx$ 8. $\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}}$ 9. $\int \left(\frac{dx}{2x-1}-\frac{dx}{2x+1}\right)$

10 $\int \frac{\left(x^2+2x+2\right)}{x+2}dx$ 11. $\int e^x 5^{e^x} dx$ 12. $\int \frac{1+e^{2x}}{e^x}dx$

แบบฝึกหัด 6.4

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จงหาค่าอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \cos ec^2(4x+1)dx$ 2. $\int \cos ec3y\cos 3ydy$ 3. $\int \frac{\sec 5x}{\cot 5x}dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ 5. $\int \frac{1+\sin 2x}{\tan 2x}dx$ 6. $\int \frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

7. $\int (\tan 2x-1)^2 dx$ 8. $\int (\sec x+\cos ecx)^2 dx$ 9. $\int \frac{dx}{1-\cos 3x}$

10. $\int \frac{dx}{1+\sin\frac{x}{2}}$ 11. $\int \frac{dx}{1+\sec 2x}$ 12. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx$

แบบฝึกหัด 6.5

เรื่อง การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

จงหาค่าอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \frac{5dx}{4x^2+25}$ 2. $\int \frac{dx}{25-16x^2}$ 3. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+3)^2}}$ 5. $\int \sqrt{x^2-36}dx$ 6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

7. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-9x^4}}$ 8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ 9. $\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx$

10. $\int \frac{2x^4-x^2}{2x^2+1}dx$ 11. $\int \frac{(2x-5)}{x^2-9}dx$ 12. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

บทที่ 7

เทคนิคการอินทิเกรต

ในบทที่ 6 ที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหา $\int f(x)\,dx$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันง่ายๆ ไว้แล้ว ในบทนี้จะกล่าวไปถึงการอินทิเกรตฟังก์ชันที่มีความยากมากขึ้น โดยจะแบ่งการอินทิเกรตออกเป็น 4 หัวข้อด้วยกันดังนี้

1. การอินทิเกรตโดยแยกส่วน

2. การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

3. การอินทิเกรตโดยการแทนค่าทางตรีโกณมิติ

4. การอินทิเกรตโดยใช้สูตรลดรูปและฟังก์ชันตรีโกณมิติ

7.1 การอินทิเกรตโดยแยกส่วน

ถ้า u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และต่างก็มีอนุพันธ์ซึ่งต่อเนื่อง เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d(uv)}{dx} &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
d(uv) &= u\frac{dv}{dx}dx + v\frac{du}{dx}dx \\
\int d(uv) &= \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx \\
uv &= \int u\,dv + \int v\,du
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

จะเห็นว่าการอินทิเกรตแต่ละส่วนนั้น เปลี่ยนการอินทิเกรตจากรูแบบ $\int udu$ ไปสู่รูปแบบ $\int vdu$ ดังนั้น การเลือก u และ dv นั้นต้องให้เหมาะสมด้วย โดยยึดหลักว่าต้องทำให้อินทิกรัลหลังนั้นง่ายขึ้น

ตัวอย่างการเลือก u และ dv จากตัวถูกอินทิเกรตในรูปแบบต่างๆ กัน ดังนี้

1. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ หรือฟังก์ชันโนเมียลกับฟังก์ชันชี้กำลัง ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล และฟังก์ชันที่เหลือเป็น dv เช่น

$\int x\sin xdx$ เลือก $u = x$ $dv = \sin xdx$

$\int (x^3 - 7x + 2)\cos xdx$ เลือก $u = x^3 - 7x + 2$ $dv = \cos xdx$

2. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันชี้กำลังกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะเลือก u เป็นฟังก์ชันอะไรก็ๆได้ ฟังก์ชันที่เหลือเป็น dv เช่น

$\int e^x \sin xdx$ เลือก $u = e^x$ $dv = \sin xdx$

หรือ

เลือก $u = \sin x$ $dv = e^x dx$

3. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันโพลิโนเมียลกับฟังก์ชันลอการิทึม หรือฟังก์ชันลอการิทึมอย่างเดียว ให้เลือก u เป็นฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันที่เหลือเป็น dv เช่น

$\int x^2 \ln xdx$ เลือก $u = \ln x$ $dv = x^2 dx$

$\int \ln xdx$ เลือก $u = \ln x$ $dv = dx$

4. ถ้าตัวถูกอินทิเกรตมีฟังก์ชันตรีโกณผกผันประกอบอยู่ ให้เลือก uเป็นฟังก์ชันตรีโกณผกผันนั้น ฟังก์ชันที่เหลือเป็นdv เช่น

$\int arc\cot xdx$ เลือก $u = arc\cot x$ $dv = dx$

ตัวอย่างที่ 7.1 จงหาค่าของ $\int \ln xdx$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = \ln x$ และ $dv = dx$

ดังนั้น $du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = x$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้
$$
\begin{aligned}
\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx \\
&= x\ln x - \int dx \\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหาค่าของ $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = \ln x$ และ $dv = \frac{1}{\sqrt{x}}dx = x^{-\frac{1}{2}}dx$

ดังนั้น $du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้
$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = (\ln x)(2\sqrt{x}) - \int (2\sqrt{x})\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

ดังนั้น $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาค่าของ $\int x\sin xdx$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = x$ และ $dv = \sin x\,dx$

ดังนั้น $du = 1$ และ $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

ดังนั้น $\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

การอินทิเกรตโดนการแยกส่วนบางครั้งแยกเพียงครั้งเดียวก็ได้คำตอบ แต่บางครั้งการแยกส่วนเพียงครั้งเดียวอาจไม่สามารถแยกได้ จำเป็นต้องแยกส่วนสองครั้ง หรือมากกว่านั้นจึงจะได้คำตอบ

ตัวอย่างที่ 7.4 จงหาค่าของ $\int x^2\sin xdx$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = x^2$ และ $dv = \sin x\,dx$

ดังนั้น $du = 2x\,dx$ และ $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้
$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x)(2x)\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \qquad \ldots\ldots(1)$$

หา $\int x\cos x\,dx$ โดยการแยกส่วนครั้งที่สอง

ให้ $u = x$ และ $dv = \cos x\,dx$

ดังนั้น $du = 1$ และ $v = \int \cos x\,dx = \sin x$

จะได้
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + C \qquad \ldots\ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) ได้ $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

ดังนั้น $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

ตัวอย่างที่ 7.5 จงหาค่าของ $\int x^2 e^{2x+1} dx$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = x^2$ และ $dv = e^{2x+1}dx$

ดังนั้น $du = 2x$ และ $v = \frac{e^{2x+1}}{2}$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้ $\int x^2e^{2x+1}\,dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}(2x)dx$

$$= \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \int xe^{2x+1}dx \qquad ......(1)$$

หา $\int xe^{2x+1}dx$ โดยการแยกส่วนครั้งที่สอง

ให้ $u = x$ และ $dv = e^{2x+1}dx$

ดังนั้น $du = 1$ และ $v = \frac{e^{2x+1}}{2}$

จากสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

จะได้ $\int xe^{2x+1}\,dx = \frac{xe^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2}dx$

$$= \frac{xe^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} + C \qquad ......(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\int x^2e^{2x+1}dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2} - \frac{xe^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + C$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$$

ดังนั้น $\int x^2e^{2x+1}dx = \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C$

7.2 การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันพหุนามนี้ เราใช้คุณสมบัติต่างๆ ของเศษส่วนย่อย โดยพยายามแยกตัวฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของผลบวกของเศษส่วนย่อยๆ เพื่อที่จะทำให้อินทิเกรตได้ง่ายขึ้น แต่ก่อนที่เราจะศึกษาถึงตัวอย่างการอินทิเกรตโดยวิธีนี้ เราจะศึกษาการแปลงเศษส่วนย่อยก่อน

ในการหา $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ เมื่อ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ให้พิจารณาดังนี้ ดูว่า $Q(x)$ สามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่ ถ้าแยกได้ก็สามารถทำฟังก์ชัน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อย ซึ่งเราจะแยกพิจารณาเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

กรณีที่ 1 Distinct Linear Factors

เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลย เช่น

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)}}$$

เราทำฟังก์ชันตรรกยะนี้ให้เป็นเศษส่วนย่อยได้ โดยเขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ให้อยู่ในรูป

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} + \ldots + \frac{K}{(x-k)}$ เมื่อ $A, B, C, \ldots, K$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 2 Repeat Linear Factors

เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นหนึ่งและมีบางตัวที่ซ้ำกัน ซึ่งเขียนอยู่ในรูปได้ $(ax+b)^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก จะสมมติเศษส่วนย่อยจำนวน r พจน์ด้วยกันสำหรับแต่ละตัวประกอบเหล่านั้น และเศษส่วนย่อยเหล่านั้นจะเขียนได้ในรูปแบบ

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$ เมื่อ $A_i; i = 1,2,3,\ldots,r$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 3 Distinct Quadrartic Factors

เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นสองและไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลย เช่น

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_kx^2+b_kx+c_k)}$$

เราทำฟังก์ชันตรรกยะนี้ให้เป็นเศษส่วนย่อยได้ โดยเขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ให้อยู่ในรูป

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \ldots + \frac{Mx+N}{(a_kx^2+b_kx+c_k)}$ เมื่อ $A, B, C, \ldots, N$ เป็นค่าคงตัว

กรณีที่ 4 Repeated Quadratic Functions

เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $Q(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็นสอง (ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้) และมีบางตัวที่ซ้ำกัน ซึ่งเขียนอยู่ในรูปได้ $(ax^2+bx+c)^r$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก จะสมมติเศษส่วนย่อยจำนวน r พจน์ด้วยกันสำหรับแต่ละตัวประกอบเหล่านั้น และเศษส่วนย่อยเหล่านั้นจะเขียนได้ในรูปแบบ

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \ldots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

เมื่อ $A_i, B_i \,; i = 1,2,3,\ldots,r$ เป็นค่าคงตัว

ข้อสังเกต 1. ถ้าเศษส่วนที่ให้มานั้นตัวเศษมีกำลังเท่ากันหรือมากกว่าตัวส่วน อย่าลืมทำให้อยู่ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มกับเศษส่วนแท้ (ตัวเศษมีกำลังน้อยกว่าตัวส่วน)

2. ถ้าตัวส่วนมีตัวประกอบตัวใดตัวหนึ่งที่สามารถแยกได้ ต้องแยกตัวประกอบให้หมด

3. ถ้าตัวส่วนอยู่ในรูปหลายๆ กรณีรวมกัน ก็พิจารณาแต่ละตัวเป็นกรณีๆ ไป แล้วเอาผลที่ได้มาบวกกัน

ตัวอย่างที่ 7.6 จงเขียน $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกเศษส่วนย่อย

วิธีทำ จาก กรณีที่ 2 Repeat Linear Factors

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$$

จาก
$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

นำ $(x+1)(x^2+1)$ คูณตลอดสมการจะได้

$$\begin{aligned} 2x &= A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1) \\ &= Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C \\ &= (A+B)^2x+(C+B)x+(A+C) \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$A+B = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$C+B = 2 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$A+C = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$
(1) – (3); $B-C = 0 \quad \ldots\ldots(4)$

(2) + (4); $2B = 2$

$$B = 1$$
$$A = -1$$
$$C = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = -\dfrac{1}{(x+1)} + \dfrac{x+1}{(x^2+1)}$

ตัวอย่างที่ 7.7 จงเขียน $\dfrac{x^3+5x^2+2x-4}{x^4-1}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกเศษส่วนย่อย

วิธีทำ จาก $(x^4-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \frac{x^3+5x^2+2x-4}{x^4-1} &= \frac{x^3+5x^2+2x-4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)} \end{aligned}$$

นำ $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ คูณตลอด ได้

$$\begin{aligned} x^3+5x^2+2x-4 &= A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1) \\ &= (A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D) \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$A+B+C = 1 \qquad \ldots\ldots(1)$$
$$A-B+D = 5 \qquad \ldots\ldots(2)$$
$$A+B-C = 2 \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$A-B-D = -4 \qquad \ldots\ldots(4)$$

จากการแก้สมการ (1), (2), (3) และ (4) ทำให้ได้ว่า $A=1, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=\frac{9}{2}$

ดังนั้น $$\frac{x^3+5x^2+2x-4}{x^4-1} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{9-x}{x(x^2+1)}$$

ตัวอย่างที่ 7.8 จงเขียน $\frac{x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกเศษส่วนย่อย

วิธีทำ จาก $$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

นำ $(x+2)(x-1)^2$ คูณตลอดสมการจะได้

$$x+5 = A(x-1)^2+B(x+2)(x-1)+C(x+2) \quad \ldots\ldots(1)$$

แทน $x=1$ ใน (1) ได้ $6 = 3C$

$C = 2$

แทน $x=-2$ ใน (1) ได้ $3 = 9A$

$A = \frac{1}{3}$

แทน $x=0$ ใน (1) ได้ $5 = A-2B+2C \quad \ldots\ldots(2)$

แทน $A=\frac{1}{3},\ C=2$ ใน (2) ได้

$$5 = \frac{1}{3}-2B+1$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $$\frac{x+5}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{3(x+2)}-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 7.9 จงหาค่าของ $\int \frac{x+1}{x^2-4}dx$

วิธีทำ จาก $$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

นำ $(x-2)(x+2)$ คูณตลอดสมการ

จะได้ $$x+1 = A(x+2) + B(x-2) \qquad \ldots\ldots(1)$$

แทน $x=-2$ ใน (1) ได้ $-1 = -4B$

$$B = \frac{1}{4}$$

แทน $x=2$ ใน (1) ได้ $3 = 4A$

$$A = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น $$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}$$

และจะได้ว่า $$\int \frac{x+1}{x^2-4}dx = \int \frac{3}{4(x-2)}dx + \int \frac{1}{4(x+2)}dx$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

ดังนั้น $$\int \frac{x+1}{x^2-4}dx = \frac{3}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

ตัวอย่างที่ 7.10 จงหาค่าของ $\int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2}dx$

วิธีทำ จากสมการใช้วิธีการแยกตัวประกอบ

จาก $$\frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

นำ $(x-1)(x+1)(x+2)$ คูณตลอดสมการ

จะได้ $$x+3 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

ให้ $x=-1$ ได้ $2 = -2B$

$$B = -1$$

ให้ $x=-2$ ได้ $1 = 3C$

$$C = \frac{1}{3}$$

ให้ $x=1$ ได้ $4 = 6A$

$$A = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $$\frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x+2)}$$

และจะได้ว่า $$\int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2}dx = \int \frac{2}{3(x-1)}dx - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{1}{3(x+2)}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

ดังนั้น $$\int \frac{x+3}{x^3+2x^2-x-2}dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

ตัวอย่างที่ 7.11 จงหาค่าของ $\int \frac{x^4+x^3+3x^2-5x+4}{(x+3)(x^2+1)^2}$

วิธีทำ จากสมการใช้วิธีการแยกตัวประกอบ

ให้ $$\frac{x^4+x^3+3x^2-5x+4}{(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

ได้ $$x^4+x^3+3x^2-5x+4 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+3)(x^2+1) + (Dx+E)(x+3)$$

$$= (A+B)x^4 + (C+3B)x^3 + (2A+3C+B+D)x^2 + (C+3B+E+3D)x + (A+3C+3E)$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$A+B = 1$$
$$C+3B = 1$$
$$2A+3C+B+D = 3$$
$$C+3B+e+3D = -5$$
$$A+3C+3E = 4$$

เมื่อแก้สมการแล้วจะได้ $A=1, B=0, C=1, D=-2, E=0$

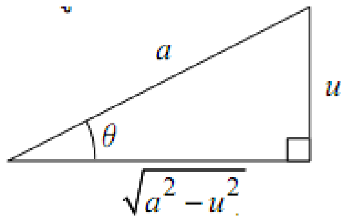
นั่นคือ $$\frac{x^4+x^3+3x^2-5x+4}{(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+x^3+3x^2-5x+4}{(x+3)(x^2+1)^2}dx &= \int\frac{1}{x+3}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx-\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \int\frac{1}{x+3}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx-\int\frac{\cancel{2x}}{(x^2+1)^2}\frac{d(x^2+1)}{\cancel{2x}} \\ &= \ln|x+3|+\arctan x+\frac{1}{x^2+1}+C\end{aligned}$$

7.3 การอินทิเกรตโดยการแทนค่าทางตรีโกณมิติ

การอินทิเกรตของฟังก์ชันที่มีพจน์อยู่ในรูปของ $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2+u^2}, \sqrt{u^2-a^2}$ เราอินทิเกรตได้โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตที่ง่ายขึ้น ซึ่งสามารถแยกเป็นกรณีย่อยๆ ดังนี้

3.1 ตัวถูกอินทิเกรตที่มีพจน์อยู่ในรูป $\sqrt{a^2-u^2}$

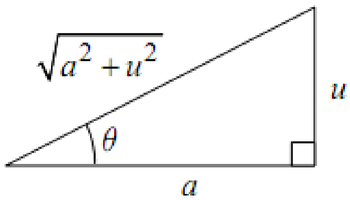


ถ้า $u=a\sin\theta$ จะได้ว่า $du=a\cos\theta\,d\theta$

และ $\sqrt{a^2-u^2} = a\sqrt{1-\sin^2\theta} = a\cos\theta$

จะเห็นว่า $\sqrt{a^2-u^2}$ ไม่ติดอยู่ในรากที่สองอีกต่อไป

3.2 ตัวถูกอินทิเกรตที่มีพจน์อยู่ในรูป $\sqrt{a^2+u^2}$

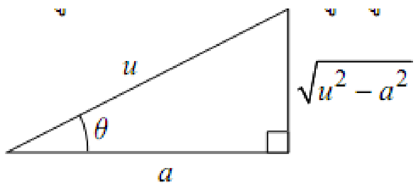


ถ้า $u=a\tan\theta$ จะได้ว่า $du=a\sec^2\theta\,d\theta$

และ $\sqrt{a^2+u^2} = a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sec\theta$

จะเห็นว่า $\sqrt{a^2+u^2}$ ไม่ติดอยู่ในรากที่สองอีกต่อไป

3.3 ตัวถูกอินทิเกรตที่มีพจน์อยู่ในรูป $\sqrt{u^2-a^2}$



ถ้า $u=a\sec\theta$ จะได้ว่า $du=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

และ $\sqrt{u^2-a^2} = a\sqrt{\sec^2\theta-1} = a\tan\theta$

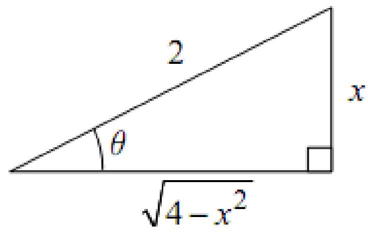
จะเห็นว่า $\sqrt{u^2-a^2}$ ไม่ติดอยู่ในรากที่สองอีกต่อไป

สรุป ถ้าฟังก์ชันมีพจน์ $\sqrt{a^2-u^2}$ ปรากฏ ให้ $u=a\sin\theta$ และแทน a^2-u^2 ด้วย $a^2\cos^2\theta$
ถ้าฟังก์ชันมีพจน์ $\sqrt{a^2+u^2}$ ปรากฏ ให้ $u=a\tan\theta$ และแทน a^2+u^2 ด้วย $a^2\sec^2\theta$
ถ้าฟังก์ชันมีพจน์ $\sqrt{u^2-a^2}$ ปรากฏ ให้ $u=a\sec\theta$ และแทน u^2-a^2 ด้วย $a^2\tan^2\theta$

ตัวอย่างที่ 7.12 จงหาค่า $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$

วิธีทำ จาก $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้ $u=a\sin\theta$ และแทน $a^2-u^2\rightarrow a^2\cos^2\theta$

ดังนั้น
$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$
$$= 4\int\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 4\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \qquad (\because \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2})$$
$$= 2\theta+\sin 2\theta+C$$
$$= 2\theta+2\cos\theta\sin\theta+C$$



จาก $x=2\sin\theta$ จะได้ $\cos\theta=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$, $\sin\theta=\frac{x}{2}$ และ $\theta=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

ดังนั้น
$$\int\sqrt{4-x^2} = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+2\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\cdot\frac{x}{2}+C$$
$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$$

ตัวอย่างที่ 7.13 จงหาค่า $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

วิธีทำ จาก $\sqrt{a^2-u^2}$ ให้ $u=a\sin\theta$ และแทน $a^2-u^2\rightarrow a^2\cos^2\theta$

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

ให้ $x-1=\sin\theta$ จะได้ $x=1+\sin\theta$ และ $dx=\cos\theta\,d\theta$

ดังนั้น $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

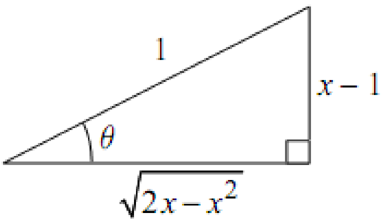
$$= \int \frac{(1+\sin\theta)^2 \cancel{\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{\cos\theta}}$$

$$= \int (1+\sin\theta)^2 d\theta$$

$$= \int (1+2\sin\theta+\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int (1+2\sin\theta+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \int (\frac{3}{2}+2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta)\, d\theta$$



$$= \frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+C$$

$$= \frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+C$$

จาก $x-1=\sin\theta$ จะได้ $\theta=\arcsin(x-1)$ และ $\cos\theta=\sqrt{2x-x^2}$

ดังนั้น $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{3}{2}\arcsin(x-1)-2\sqrt{2x-x^2}-\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2}+C$$

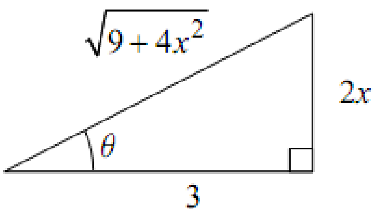
$$= \frac{3}{2}\arcsin(x-1)-\frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2}+C$$

ตัวอย่างที่ 7.13 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$

วิธีทำ จาก $\sqrt{a^2+u^2}$ ให้ $u=a\tan\theta$ และแทน $a^2+u^2 \to a^2\sec^2\theta$

ให้ $x=\frac{3}{2}\tan\theta$ จะได้ $dx=\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{3}{2}\tan\theta\sqrt{9+4\left(\frac{9}{4}\tan^2\theta\right)}}$$



$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{3\tan\theta\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta\right|+C$$

จาก $x = \frac{3}{2}\tan\theta$ จะได้ว่า $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x}$ และ $\cot\theta = \frac{3}{2x}$

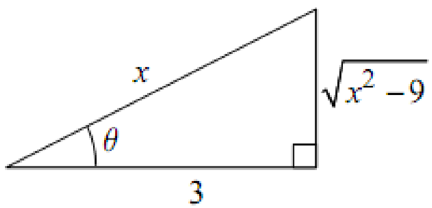
ดังนั้น
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + C$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{2x}\right| + C$$

ตัวอย่างที่ 7.14 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$

วิธีทำ จาก $\sqrt{u^2+a^2}$ ให้ $u = a\sec\theta$ และแทน $u^2 - a^2 \to a^2\tan^2\theta$

ให้ $x = 3\sec\theta$ จะได้ $dx = 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

ดังนั้น
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}{\cancel{3\sec\theta}} \cdot \cancel{3\sec\theta}\tan\theta\, d\theta$$
$$= \int 3\sqrt{\sec^2\theta-1}\tan\theta\, d\theta$$
$$= 3\int \tan^2\theta\, d\theta$$
$$= 3\int (\sec^2\theta-1)d\theta$$
$$= 3(\tan\theta-\theta)+C$$



จาก $x = 3\sec\theta$ จะได้ $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)$ และ $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

ดังนั้น
$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = 3\left[\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right) - \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C$$
$$= \sqrt{x^2-9} - 3\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

ตัวอย่างที่ 7.15 จงหาค่า $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}$

วิธีทำ จาดสมการจัดให้อยู่ในรูปแบบ $u^2 - a^2$

จะเห็นว่า
$$4x^2-24x+27 = 4x^2-24x+36-9$$
$$= 4(x^2-6x+9)-9$$
$$= 4(x-3)^2-9$$

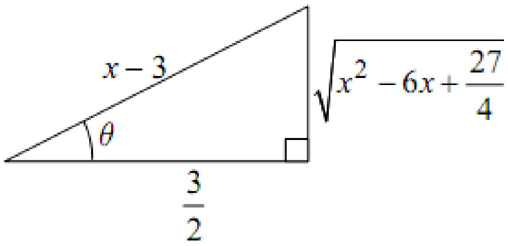
ให้ $x-3=\frac{3}{2}\sec\theta$ จะได้ว่า $dx=\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

ดังนั้น

$$\int\frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dx}{[4(x-3)^2-9]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\int\frac{\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\left[4\left(\frac{9}{4}\sec^2\theta\right)-9\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(9\sec^2\theta-9)^{\frac{3}{2}}}$$



$$=\frac{3}{2}\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(9)^{\frac{3}{2}}(\sec^2\theta-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{27}\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{(\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{18}\int\frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\tan^3\theta}$$

$$=\frac{1}{18}\int\frac{\sec\theta\,d\theta}{\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1}{18}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{18}\int\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{18}\int\operatorname{cosec}\theta\cot\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{18}\operatorname{cosec}\theta+C$$

จาก $x-3=\frac{3}{2}\sec\theta$ จะได้ $\operatorname{cosec}\theta=\frac{2(x-3)}{\sqrt{4x^2-24x+27}}$

ดังนั้น

$$\int\frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{18}\left[\frac{2(x-3)}{\sqrt{4x^2-24x+27}}\right]+C$$

$$=\frac{3-x}{9\sqrt{4x^2-24x+27}}+C$$

7.4 การอินทิเกรตโดยใช้สูตรลดรูปและฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sin^n u$ และ $\cos^n u$ โดยใช้สูตรลดรูป

เราสามารถใช้การอินทิเกรตแยกส่วนสร้างสูตรอินทิเกรต ซึ่งเรียกว่าสูตรลดรูป สำหรับการอินทิเกรตที่อยู่ในรูป $\int \sin^n u\, du$ และ $\int \cos^n u\, du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 2$

$$\boxed{\int \sin^n u\, du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\, du}$$

$$\boxed{\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du}$$

ตัวอย่างที่ 7.16 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \sin^2 x\, dx$ 2. $\int \sin^3 x\, dx$ 3. $\int \sin^4 x\, dx$

วิธีทำ โดยใช้สูตรลดทอนในรูปแบบของ $\sin^n u$

$$
\begin{aligned}
1.\ \int \sin^2 x\, dx &= -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx \\
&= -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C \\
2.\ \int \sin^3 x\, dx &= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x\, dx \\
&= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C \\
3.\ \int \sin^4 x\, dx &= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx \\
&= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x\right) + C \\
&= -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 7.17 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \cos^2 x\, dx$ 2. $\int \cos^3 x\, dx$ 3. $\int \cos^5 x\, dx$

วิธีทำ โดยใช้สูตรลดทอนในรูปแบบของ $\cos^n u$

$$1.\ \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int dx$$
$$= \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x + C$$

$$2.\ \int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$$

$$3.\ \int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x\right) + C$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C$$

2 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sin^m u \cos^n u$

ก. ถ้า m หรือ n เป็นเลขคี่

ถ้า m เป็นเลขคี่ ให้แยก $\sin^m u$ ให้อยู่ในรูป $\sin u \cdot \sin^{m-1} u$

ถ้า n เป็นเลขคี่ ให้แยก $\cos^n u$ ให้อยู่ในรูป $\cos u \cdot \cos^{n-1} u$

และใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ ช่วยในการอินทิเกรต

ตัวอย่างที่ 7.18 จงหาค่าของ $\int \sin^3 x \cos^{-5} x\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก m = 3 เราจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\int \sin^3 x \cos^{-5} x\,dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^{-5} x\,dx$$
$$= \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)\cdot \cos^{-5} x\,dx$$
$$= \int \sin x \cos^{-5} x\,dx - \int \sin x \cos^{-3} x\,dx$$
$$= \int \cancel{\sin x}\cos^{-5} x \frac{d(\cos x)}{-\cancel{\sin x}} - \int \cancel{\sin x}\cos^{-3} x \frac{d(\cos x)}{-\cancel{\sin x}}$$
$$= -\int \cos^{-5} x\,d(\cos x) + \int \cos^{-3} x\,d(\cos x)$$
$$= -\frac{\cos^{-4} x}{(-4)} + \frac{\cos^{-2} x}{(-2)} + C$$

ดังนั้น $$\int \sin^3 x \cos^{-5} x\,dx = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

ตัวอย่างที่ 7.19 จงหาค่าของ $\int \sin^4 2x \cos^5 2x dx$

วิธีทำ เนื่องจาก n = 5 เราจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\int \sin^4 2x \cos^5 2x\, dx &= \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos^4 2x\, dx \\ &= \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot (\cos^2 2x)^2\, dx \\ &= \int \sin^4 2x \cdot \cos 2x \cdot (1-\sin^2 2x)^2\, dx \\ &= \int \sin^4 2x \cdot (\cos 2x) \cdot (1-2\sin 2x + \sin^4 2x) dx \\ &= \int \sin^4 2x \cos 2x\, dx - 2\int \sin^5 2x \cos 2x\, dx + \int \sin^8 2x \cos 2x\, dx\end{aligned}$$

ให้ $u = \sin 2x$ จะได้ $du = 2\cos 2x dx$

จะได้ $$\begin{aligned}\int \sin^4 2x \cos^5 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int u^4\, du - 2\cdot\frac{1}{2}\int u^5\, du + \frac{1}{2}\int u^8\, du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^9}{9} + C \\ &= \frac{u^5}{10} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^9}{18} + C\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\int \sin^4 2x \cos^5 2x\, dx = \frac{\sin^5 2x}{10} - \frac{\sin^6 2x}{6} + \frac{\sin^9 2x}{18} + C$$

ข. ถ้า m และ n เป็นเลขคู่

ให้ลดทอนเลขชี้กำลังของ $\sin x$ และ $\cos x$ โดยใช้เอกลักษณ์

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \text{ และ } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

ตัวอย่างที่ 7.20 จงหาค่าของ $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ของเลขชี้กำลังช่วยในการแตกพจน์

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)(1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x)(1+\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 2x+\sin^2 2x\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx+\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx\right)$$

ให้ $u = 2x$ จะได้ $du = 2dx$ และให้ $v = \sin 2x$ จะได้ $dv = 2\cos 2x\,dx$

นั่นคือ $$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 u\frac{du}{2}+\int v^2\cancel{\cos 2x}\frac{dv}{2\cancel{\cos 2x}}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\int \sin^2 u\,du+\frac{1}{2}\int v^2\,dv\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\int (1-\cos^2 u)du+\frac{1}{2}\int v^2\,dv\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\left(\int du-\int \cos^2 u\,du\right)+\frac{1}{2}\int v^2\,dv\right]$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\int du-\frac{1}{2}\cos u\sin u+\frac{v^3}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{2}\cos 2x\sin 2x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right]+C$$
$$= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{2}\cos 2x\sin 2x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C$$

ดังนั้น $$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}x-\frac{1}{32}\cos 2x\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$$

3 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\tan^n u$ และ $\sec^n u$ โดยใช้สูตรลดรูป เราสามารถใช้การอินทิเกรตแยกส่วนสร้างสูตรอินทิเกรต ซึ่งเรียกว่าสูตรลดรูปอินทิเกรตที่อยู่ในรูป $\int \tan^n u\,du$ และ $\int \sec^n u\,du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \ge 2$

$$\int \tan^n u\,du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u\,du$$

$$\int \sec^n u\,du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$$

ตัวอย่างที่ 7.21 จงหาค่าของอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \tan^3 x\,dx$ 2. $\int \tan^4 x\,dx$ 3. $\int \tan^6 x\,dx$

วิธีทำ โดยใช้สูตรลดทอนในรูปแบบของ $\tan^n u$

1. $$\int \tan^3 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \int \tan x\,dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$$

2. $$\int \tan^4 x\,dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x\,dx$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \left(\frac{\tan x}{1} - \int dx\right)$$
$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

3. $$\int \tan^6 x\,dx = \frac{\tan^5 x}{5} - \int \tan^4 x\,dx$$
$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$

ตัวอย่างที่ 7.22 จงหาค่าของอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \sec^3 x\,dx$ 2. $\int \sec^5 4x\,dx$

วิธีทำ โดยใช้สูตรลดทอนในรูปแบบของ $\sec^n u$

1. $\int \sec^3 x\,dx = \dfrac{\sec x \tan x}{2} + \dfrac{1}{2}\int \sec x\,dx$

$= \dfrac{\sec x \tan x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

2. ให้ $u = 4x$ จะได้ $du = 4\,dx$

$$\int \sec^5 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \sec^5 u\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sec^3 u \tan u}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 u\,du\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sec^3 u \tan u}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sec u \tan u}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u|\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}\sec^3 u \tan u + \frac{3}{32}\sec u \tan u + \frac{3}{32}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$= \frac{1}{16}\sec^3 4x \tan 4x + \frac{3}{32}\sec 4x \tan 4x + \frac{3}{32}\ln|\sec 4x + \tan 4x| + C$$

4 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\tan^m u \sec^n u$

ก. เมื่อ n เป็นเลขคู่

ให้แยก $\sec^2 u$ ออกจาก $\sec^n u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$ เปลี่ยนรูปของตัวถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ $\tan u$ และใช้ผลต่างอนุพันธ์ $d(\tan u) = \sec^2 u\,du$

ตัวอย่างที่ 7.23 จงหาค่าของ $\int \sec^4 x \tan^6 xd$

วิธีทำ แยก $\sec^2 u$ ออกจาก $\sec^n u$ ใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 u = 1 + \tan^2 u$

$$\int \sec^4 x \tan^6 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^6 x\,dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)\cdot \tan^6 x \cdot \sec^2 x\,dx$$

$$= \int (\tan^6 x + \tan^8 x)\,d(\tan x)$$

$$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

ตัวอย่างที่ 7.24 จงหาค่าของ $\int \dfrac{\sec^4 2x}{\sqrt{\tan 2x}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$ จะได้ว่า $du = 2dx$

$$\int \frac{\sec^4 2x}{\sqrt{\tan 2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^4 u}{\sqrt{\tan u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 u \cdot \sec^2 u}{\sqrt{\tan u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 u(1+\tan^2 u)}{\sqrt{\tan u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int (\tan u)^{-\frac{1}{2}}\sec^2 u\, du + \int \tan^{\frac{3}{2}}\sec^2 u\, du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int (\tan u)^{-\frac{1}{2}} d(\tan u) + \int \tan^{\frac{3}{2}} d(\tan u)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(\tan u)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{(\tan u)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right] + C$$

$$= \sqrt{\tan u} + \frac{1}{5}\tan^2 u\sqrt{\tan u} + C$$

$$= \sqrt{\tan 2x} + \frac{1}{5}(\tan^2 2x)\sqrt{\tan^2 2x} + C$$

ข. เมื่อ m เป็นเลขคี่

ให้แยก $\sec u \tan u$ ออก แล้วใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ เปลี่ยนรูปของตัวถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ $\sec u$ และใช้ผลต่างอนุพันธ์ $d(\sec u) = \sec u \tan u\, du$

ตัวอย่างที่ 7.25 จงหาค่าของ $\int \sec^5 x \tan^3 x dx$

วิธีทำ ให้แยก $\sec u \tan u$ ออก ใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$

$$\int \sec^5 x \tan^3 x\, dx = \int \sec^4 x \cdot \tan^2 x \cdot \sec x \cdot \tan x\, dx$$

$$= \int \sec^4 x(\sec^2 x - 1)d(\sec x)$$

$$= \int \sec^6 x\, d(\sec x) - \int \sec^4 x\, d(\sec x)$$

$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$$

ตัวอย่างที่ 7.26 จงหาค่าของ $\int \frac{\tan^3 6x}{\sqrt[3]{\sec 6x}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 6x$ จะได้ว่า $du = 6dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan^3 6x}{\sqrt[3]{\sec 6x}}dx &= \frac{1}{6}\int \frac{\tan^3 u}{\sqrt[3]{\sec u}}du \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{\sec u \cdot \tan^3 u}{\sec u \cdot \sqrt[3]{\sec u}}du \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{\tan^2 u \cdot \sec u \cdot \tan u\, du}{(\sec u)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{(\sec^2 u - 1)d(\sec u)}{(\sec u)^{\frac{4}{3}}} \\
&= \frac{1}{6}\left[\int \frac{\sec^2 u}{(\sec u)^{\frac{4}{3}}}d(\sec u) - \int \frac{d(\sec u)}{(\sec u)^{\frac{4}{3}}}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\int (\sec u)^{\frac{2}{3}}d(\sec u) - \int (\sec u)^{-\frac{4}{3}}d(\sec u)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{\sec^{\frac{5}{3}} u}{\frac{5}{3}} - \frac{\sec^{-\frac{1}{3}} u}{-\frac{1}{3}}\right) + C \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{3}{5}\sec^{\frac{5}{3}} u + 3\sec^{-\frac{1}{3}} u\right) + C \\
&= \frac{1}{10}\sec^{\frac{5}{3}} u + \frac{1}{2}\sec^{-\frac{1}{3}} u + C
\end{aligned}$$

ค. เมื่อ m เป็นเลขคู่และ n เป็นเลขคี่

ให้แยก $\tan^2 u$ ออก แล้วใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$ เปลี่ยนรูปของตัวถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ $\sec u$ และใช้สูตรลดทอน

ตัวอย่างที่ 7.27 จงหาค่าของ $\int \tan^2 x \sec x dx$

วิธีทำ ให้แยก $\tan^2 u$ ออกแล้วใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 u = \sec^2 - 1$

$$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx$$
$$= \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$$

จากสูตรลดทอน

จะได้ $$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

และ $$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

ดังนั้น $$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x \tan x| + C$$
$$= \frac{1}{2}\sec x \tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

ตัวอย่างที่ 7.27 จงหาค่าของ $\int \sec^3 3x \tan^2 3x dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$ จะได้ว่า $du = 3dx$

$$\int \sec^3 3x \tan^2 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \sec^3 u \tan^2 u\, du$$
$$= \frac{1}{3}\int \sec^3 u(\sec^2 u - 1)\, du$$
$$= \frac{1}{3}\left[\int \sec^5 u\, du - \int \sec^3 u\, du\right]$$

จากสูตรลดทอน

จะได้ $$\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\int \sec u\, du$$
$$= \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

และ $$\int \sec^5 u\, du = \frac{1}{4}\sec^3 u \tan u + \frac{3}{4}\int \sec^3 u\, du$$
$$= \frac{1}{4}\sec^3 u \tan u + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u|\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}\sec^3 u \tan u + \frac{3}{8}\sec u \tan u + \frac{3}{8}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \sec^3 3x \tan^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\sec^3 u \tan u - \frac{1}{8}\sec u \tan u - \frac{1}{8}\ln\left|\sec u + \tan u\right|\right) + C$$
$$= \frac{1}{12}\sec^3 u \tan u - \frac{1}{24}\sec u \tan u - \frac{1}{24}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C$$
$$= \frac{1}{12}\sec^3 3x \tan 3x - \frac{1}{24}\sec 3x \tan 3x - \frac{1}{24}\ln\left|\sec 3x + \tan 3x\right| + C$$

5 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\cot^n u$ และ $\operatorname{cosec}^n u$ โดยใช้สูตรลดรูป

เราสามารถใช้การอินทิเกรตแยกส่วนสร้างสูตรอินทิเกรต ซึ่งเรียกว่าสูตรลดรูป สำหรับการอินทิเกรตที่อยู่ในรูป $\int \cot^n u\,du$ และ $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 2$

$$\boxed{\int \cot^n u\,du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int \cot^{n-2} u\,du}$$

$$\boxed{\int \operatorname{cosec}^n u\,du = \frac{-\operatorname{cosec}^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{cosec}^{n-2} u\,du}$$

ตัวอย่างที่ 7.28 จงหาค่าของค่าต่อไปนี้

1. $\int \cot^3 2x\,dx$ 2. $\int \cot^5 3x\,dx$

วิธีทำ 1..ให้ $u = 2x$ จะได้ว่า $du = 2dx$

$$\int \cot^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cot^3 u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cot^2 u}{2} - \int \cot u\,du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cot^2 u}{2} - \ln|\sin u|\right] + C$$

$$= -\frac{\cot^2 u}{4} - \frac{\ln|\sin u|}{2} + C$$

$$= -\frac{\cot^2 2x}{4} - \frac{\ln|\sin 2x|}{2} + C$$

2. ให้ $u = 3x$ จะได้ $du = 3\,dx$

$$\int \cot^5 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cot^5 u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cot^4 u}{4} - \int \cot^3 u\,du\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{\cot^4 u}{4} - \left(-\frac{\cot^2 u}{4} - \frac{\ln|\sin u|}{2}\right)\right] + C$$

$$= -\frac{\cot^4 u}{12} + \frac{\cot^2 u}{12} + \frac{\ln|\sin u|}{6} + C$$

$$= -\frac{\cot^4 3x}{12} + \frac{\cot^2 3x}{12} + \frac{\ln|\sin 3x|}{6} + C$$

ตัวอย่างที่ 7.29 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\int \operatorname{cosec}^3(9x-1)\,dx$ 2. $\int \operatorname{cosec}^4(5-3x)\,dx$

วิธีทำ 1..ให้ $u = 9x-1$ จะได้ว่า $du = 2dx$

$$\int \operatorname{cosec}^3(9x-1)dx = \frac{1}{9}\int \operatorname{cosec}^3 u\,du$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{\operatorname{cosec} u \cot u}{2} + \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec} u\,du\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{\operatorname{cosec} u \cot u}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|\right)\right] + C$$

$$= -\frac{\operatorname{cosec} u \cot u}{18} + \frac{\ln|\operatorname{cosec} u - \cot u|}{18} + C$$

$$= \frac{-\operatorname{cosec}(9x-1)\cot(9x-1) + \ln|\operatorname{cosec}(9x-1) - \cot(9x-1)|}{18} + C$$

2. ให้ $u = 5 - 3x$ จะได้ $du = -3\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{cosec}^4(5-3x)\,dx &= -\frac{1}{3}\int \operatorname{cosec}^4 u\,du \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 u\cot u}{3} + \frac{2}{3}\int \operatorname{cosec}^2 u\,du\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 u\cot u}{3} + \frac{2}{3}(-\cot u)\right] + C \\
&= \frac{\operatorname{cosec}^2 u\cot u}{9} + \frac{2\cot u}{9} + C \\
&= \frac{\operatorname{cosec}^2(5-3x)\cot(5-3x) + 2\cot(5-3x)}{9} + C
\end{aligned}$$

.6 การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\cot^m u \operatorname{cosec}^n u$

ก. เมื่อ n เป็นเลขคู่

ให้แยก $\operatorname{cosec}^2 u$ ออกจาก $\operatorname{cosec}^n u$ แล้วใช้เอกลักษณ์ $\operatorname{cosec}^2 u = 1 + \cot^2 u$ เปลี่ยนรูปของตัวถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ $\cot u$ และใช้ $d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u\,du$

ตัวอย่างที่ 7.30 จงหาค่าของ $\int \cot 3x \cos ec^4 3x dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$ จะได้ว่า $du = 3dx$

$$\begin{aligned}
\int \cot 3x \operatorname{cosec}^4 3x\,dx &= \frac{1}{3}\int \cot u \operatorname{cosec}^4 u\,du \\
&= \frac{1}{3}\int \cot u \cdot \operatorname{cosec}^2 u \cdot \operatorname{cosec}^2 u\,du \\
&= -\frac{1}{3}\int \cot u \cdot (1+\cot^2 u)\,d(\cot u) \\
&= -\frac{1}{3}\left[\int \cot u\,d(\cot u) + \int \cot^3 u\,d(\cot u)\right] \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{\cot^2 u}{2} + \frac{\cot^4 u}{4}\right) + C \\
&= -\frac{\cot^2 u}{6} - \frac{\cot^4 u}{12} + C \\
&= -\frac{\cot^2 3x}{6} - \frac{\cot^4 3x}{12} + C
\end{aligned}$$

ข. เมื่อ m เป็นเลขคี่

ให้แยก $\operatorname{cosec} u \cot u$ ออก แล้วใช้เอกลักษณ์ $\cot^2 u = \operatorname{cosec}^2 u - 1$ เปลี่ยนรูปของตัวถูกอินทิเกรตให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ $\operatorname{cosec} u$ และใช้ $d(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u\, du$

ตัวอย่างที่ 7.31 จงหาค่าของ $\int \cot^3 5x \cos ec^5 5x dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x$ จะได้ว่า $du = 5dx$

$$
\begin{aligned}
\int \cot^3 5x \operatorname{cosec}^5 5x\, dx &= \frac{1}{5}\int \cot^3 u \operatorname{cosec}^5 u\, du \\
&= \frac{1}{5}\int \cot^2 u \cdot \operatorname{cosec}^4 u \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \cot u \cdot du \\
&= -\frac{1}{5}\int (\operatorname{cosec}^2 u - 1)\cdot \operatorname{cosec}^4 u \cdot d(\operatorname{cosec} u) \\
&= -\frac{1}{5}\left[\int \operatorname{cosec}^6 u\, d(\operatorname{cosec} u) - \int \operatorname{cosec}^4 u\, d(\operatorname{cosec} u)\right] \\
&= -\frac{1}{5}\left[\frac{\operatorname{cosec}^7 u}{7} - \frac{\operatorname{cosec}^5 u}{5}\right] + C \\
&= -\frac{\operatorname{cosec}^7 u}{35} + \frac{\operatorname{cosec}^5 u}{25} + C \\
&= -\frac{\operatorname{cosec}^7 5x}{35} + \frac{\operatorname{cosec}^5 5x}{25} + C
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 7.31 จงหาค่าของ $\int \sin 7x \cos 5x dx$

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ $\frac{1}{2}\left[\sin x(A-B) + \sin(A+B)\right]$

จะได้ $\sin 7x \cos 5x = \frac{1}{2}[\sin(7x-5x)+\sin(7x+5x)]$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 12x)$$

นั่นคือ $\int \sin 7x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 2x \, dx + \int \sin 12x \, dx\right]$

ให้ $u = 2x$ และ $v = 12x$

จะได้ $du = 2\,dx$ และ $dv = 12\,dx$

นั่นคือ $\int \sin 7x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \sin u \, du + \frac{1}{12}\int \sin v \, dv\right]$

$$= \frac{1}{4}(-\cos u) + \frac{1}{24}(-\cos v) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{24}\cos 12x + C$$

7.5 การประยุกต์ใช้อินทิเกรต

ในการนำเอาอินทิเกรต ไปประยุกต์ใช้นั้นมีในหลากหลายรูปแบบด้วยกัน เช่น การหาค่าความยาวของเส้นโค้ง, การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง, การหาปริมาตรของรูปทรงต่างๆ แต่ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการเอาไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่เท่านั้น

1. การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง

ในการหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง เส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วงที่ n มีค่าอยู่ในช่วง $[a,b]$ นั้นสามารถนำเอาการอินทิเกรตแบบจำกัดไปประยุกต์ใช้ได้ ทั้งนี้พื้นที่ดังกล่าวจะหาได้จาก

$$\int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 7.32 จงหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างแกน x กับเส้นโค้ง y = f (x) ในช่วง [a, b] โดยที่

1. $f(x) = 9 - x^2$, $[a, b] = [-3, 3]$
2. $f(x) = x^2 - 2x - 8$, $[a, b] = [-4, 2]$

วิธีทำ การหาพื้นที่จากสูตร $\int_a^b f(x)dx$

1. $f(x) = 9 - x^2$, $[a, b] = [-3, 3]$

พื้นที่ $= \int_{-3}^{3} 9 - x^2 dx$

$= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$

$= (27 - \frac{27}{3}) - (-27 + \frac{27}{3})$

$= 18 + 18 = 36$ ตารางหน่วย

2. $f(x) = x^2 - 2x - 8$, $[a, b] = [-4, 2]$

พื้นที่ $= \int_{-4}^{2} x^2 - 2x - 8 dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 8x\right]_{-4}^{2}$

$= (\frac{8}{3} - 4 - 16) - (-\frac{64}{3} - 16 + 32)$

$= (-\frac{52}{3}) - (-\frac{16}{3})$

$= -12$ ตารางหน่วย

ตัวอย่างที่ 7.33 จงหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ กับแกน $x, -1 \le x \ge 3$

วิธีทำ การหาพื้นที่จากสูตร $\int_{a}^{b} f(x) dx$

จาก $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$= (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ว่า $x = -1, 2$ หรือ 3

ดังนั้น ถ้าให้ช่วง $[-1, 3]$ แบ่งออกได้เป็น 2 ช่วงย่อย คือ ช่วง $[-1, 2]$ และช่วง $[2, 3]$ ทั้งนี้ ในช่วง $[-1, 2]$ นั้น $f(x) \geq 0$ และในช่วง $[2, 3]$ $f(x) \leq 0$

พื้นที่ระหว่าง $f(x)$ กับแกน x ในช่วง $[-1, 2]$

$$\text{พื้นที่} = \int_{-1}^{2} x^3 - 4x^2 + x + 6dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{2}$$

$$= (4 - \frac{32}{3} + 2 + 12) - (\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 6)$$

$$= \frac{22}{3} - \frac{47}{3} = \frac{41}{12} \text{ ตารางหน่วย}$$

$$\text{พื้นที่} = \int_{-1}^{2} x^3 - 4x^2 + x + 6\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{2}^{3}$$

$$= (\frac{81}{4} - 36 + \frac{9}{2} + 18) - (4 - \frac{32}{3} + 2 + 12)$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{22}{3} = -\frac{7}{12} \text{ ตารางหน่วย}$$

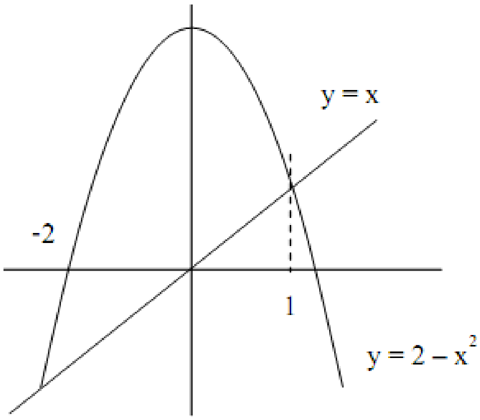
$$\text{ดังนั้นพื้นที่ทั้งหมด} = \frac{41}{12} + \left|-\frac{7}{12}\right| = \frac{48}{12} = 4 \text{ ตารางหน่วย}$$

2. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับเส้นโค้ง $y = g(x)$ โดยที่ $f(x) \geq g(x)$ ในช่วง $[a,b]$ นั้นหาได้จาก $\int_{a}^{b} f(x) - g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 7.34 จงหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ และเส้นตรง $y = x$

วิธีทำ จากสูตรการหาพื้นที่ $\int_a^b f(x) - g(x)dx$



หาจุดตัดของเส้นโค้งกับเส้นตรงดังกล่าวโดยการให้

$$2 - x^2 = x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2, 1$$

ดังนั้นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ และเส้นตรง $y = x$

$$\text{พื้นที่} = \int_{-2}^{1} ((2 - x^2) - x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\,dx$$

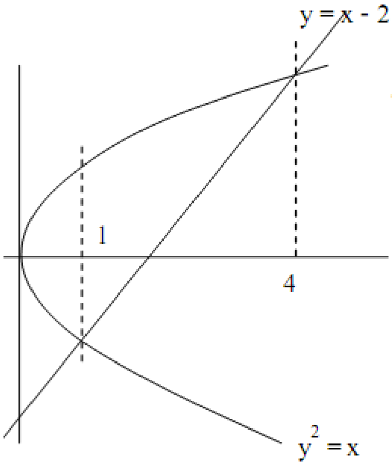
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}$$

$$= (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - (-4 + \frac{8}{3} - 2)$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

ตัวอย่างที่ 7.35 จงหาพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และเส้นตรง $y = x - 2$

วิธีทำ จากสูตรการหาพื้นที่ $\int_a^b f(x) - g(x)dx$



หาจุดตัดของเส้นโค้งกับเส้นตรงโดยการให้

$$x = (x-2)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-4)(x-1) = 0$$
$$x = 4, 1$$

จะเห็นได้ว่าพื้นที่ที่อยู่ใต้เส้นโค้ง $y^2 = x$ และเส้นตรง $y = x - 2$ นั้นแบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 คือในช่วง [0, 1] เป็นพื้นที่ที่อยู่ใต้เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และอยู่เหนือเส้นโค้ง $y = -\sqrt{x}$

ส่วนที่ 2 คือช่วง [1, 4] เป็นพื้นที่ที่อยู่ใต้เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $y = x - 2$

ดังนั้น พื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และเส้นตรง $y = x - 2$

$$\text{พื้นที่} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\,dx + \int_1^4 \sqrt{x} - (x-2)\,dx$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 \sqrt{x} - x + 2)\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{9}{2} \text{ ตารางหน่วย}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

แบบฝึกหัด 7.1

เรื่อง การอินทิเกรตโดยแยกส่วน

จงคำนวณหาค่าอินทิเกรตแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\int xe^{-x}\,dx$ **2.** $\int xe^{3x}\,dx$ **3.** $\int x^2e^x\,dx$

4. $\int e^x\cos x\,dx$ **5.** $\int x\sin 3x\,dx$ **6.** $\int x^3e^{-x^2}\,dx$

7. $\int x^3\sin x^2\,dx$ **8.** $\int \frac{\ln x^2}{x^2}\,dx$ **9.** $\int \sin(\ln x)\,dx$

10. $\int x\sec^2 3x\,dx$ **11.** $\int x\arctan x\,dx$ **12.** $\int x\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\,dx$

13. $\int \cos\sqrt{2x}\,dx$ **14.** $\int \frac{2x}{\cos^2 2x}\,dx$ **15.** $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

แบบฝึกหัด 7.2

เรื่อง การอินทิเกรตโดยการแยกเป็นเศษส่วนย่อย

จงหาค่าของอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \frac{2-x}{x^2+x}\,dx$ **2.** $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$ **3.** $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

4. $\int \frac{3x+11}{(x+2)(x+3)}\,dx$ **5.** $\int \frac{x^3+6x^2+5x+10}{x^3+2x^2}\,dx$ **6.** $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

7. $\int \frac{3(x+2)}{x^3+2x^2-3x}\,dx$ **8.** $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$ **9.** $\int \frac{x^3+5x^2+2x-4}{x^4-1}\,dx$

10. $\int \frac{x(x+4)}{(x-2)^2(x^2+4)}\,dx$ **11.** $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$ **13.** $\int \frac{18+11x-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+3x+3)}\,dx$

แบบฝึกหัด 7.3

เรื่อง การอินทิเกรตโดยการแทนค่าทางตรีโกณมิติ

จงหาค่าของอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{x^2-5}}$ **2.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{49-x^2}}dx$ **3.** $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$

4. $\int \frac{dy}{(25-y^2)^{\frac{3}{2}}}$ **5.** $\int \frac{w^2-2w+5}{\sqrt{9-w^2}}dw$ **6.** $\int \frac{e^t}{e^{3t}\sqrt{e^{2t}-16}}dt$

7. $\int \frac{dh}{\sqrt{12+4h-h^2}}$ **8.** $\int \frac{(5x^2-2x+1)}{\sqrt{25-x^2}}dx$ **9.** $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+2}}dx$

10. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$

แบบฝึกหัด 7.4

เรื่อง การอินทิเกรตโดยใช้สูตร sin x และ cos x

จงคำนวณหาค่าของอินทิเกรตต่อไปนี้

1. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$ **2.** $\int \cos^5 2x\sin 2x\,dx$ **3.** $\int \sin^4 5x\cos^4 5x\,dx$

4. $\int \frac{\sin^3 2x}{(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}dx$ **5.** $\int \sin x\cos\frac{x}{2}dx$

แบบฝึกหัด 7.5

เรื่อง การอินทิเกรตโดยใช้สูตรtan x และ sec x

จงคำนวณหาค่าของอินทิเกรตแต่ละข้อต่อนี้

1. $\int \tan^3 x\sec^4 x\,dx$ **2.** $\int \tan^2 x\sec^3 x\,dx$

3. $\int \tan^4 2x\sec 2x\,dx$ **4.** $\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx$

5. $\int \tan^3(1+2t)\sec(1+2t)\,dt$ **6.** $\int \frac{\tan\sqrt{v}\sec^2\sqrt{v}}{\sqrt{v}}dv$

แบบฝึกหัด 7.6

เรื่อง การอินทิเกรตโดยใช้สูตร cot x และ cosec x

1. จงหาค่าของอินทิเกรตโดยใช้สูตร

1. $\int \cot^5 x \operatorname{cosec}^3 x\, dx$

2. $\int \cot(1-x)\operatorname{cosec}^4(1-x)\, dx$

3. $\int \cot^3(\pi+2x)\operatorname{cosec}^4(\pi+2x)\, dx$

4. $\int \cot^3(\frac{x}{3})\operatorname{cosec}^3(\frac{x}{3})\, dx$

5. $\int \sin 2x \cos 4x\, dx$

6. $\int \cos(e^x)\cos(x^e)\, dx$

2. จงหาค่าของอินทิเกรตแต่ละข้อต่อนี้

1. $\int \frac{\tan^4(\cot^{-1} x)dx}{1+x^2}$

2. $\int \cot^2 2x \operatorname{cosec}^3 2x\, dx$

3. $\int x^2 \tan^2 x^3 \sec^4 x^3 dx$

4. $\int \frac{\sin^2(\ln 4x)\cos^4(\ln 4x)dx}{x}$

5. $\int \frac{\sec^3(\sin^{-1} x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\int \frac{\tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\sec^3\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x^2}$

แบบฝึกหัด 7.7

เรื่อง การประยุกต์ใช้อินทิเกรต

1. จงหาพื้นที่ที่อยู่เหนือหรือใต้แกน x ของ f(x) ต่อไปนี้

1 $f(x) = x^2 - 2x - 3$

2 $f(x) = 4 - x^2$

2. จงหาพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง f(x) กับ g(x) ต่อไปนี้

1 $f(x) = 9 - x^2, g(x) = 4x - 3$

2 $f(x) = x^2 + 2x + 3, g(x) = 3x + 5$

บรรณานุกรม

ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, ศรีบุตร แววเจริญ, และศรีบุตร แววเจริญ. (๒๕๓๓). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์.** กรุงเทพฯ:สื่อเสริมกรุงเทพ.

ฝ่ายวิชาการ พีบีซี. (๒๕๕๒) **เวกเตอร์ ฉบับมินิ** (พิมพ์ครั้งที่ ๑). กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปรียาพร โกษา. (๒๕๕๐). เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสถิตยศาสตร์วิศวกรรม. นครราชสีมา: สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

ฟิสิกส์ราชมงคล. (๒๕๕๑). **เวกเตอร์ ปริมาณเวกเตอร์**. ค้นเมื่อ มีนาคม ๑๑, ๒๕๕๖ จาก http://www.rmutphysics.com/physics/oldfront/72/vector.htm

มนัส ประสงค์. (๒๕๕๑). **คณิตศาสตร์๒** . กรุงเทพฯ : ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (๒๕๕๑). **คณิตศาสตร์ เล่ม ๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม. ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 4.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว.

กานดา ลือสุทธิวิบูลย์ และยุพิน จิรสุขานนท์. (๒๕๕๕). **สรุปคณิตศาสตร์ ม.ปลาย เมทริกซ์.** ค้นเมื่อ กุมภาพันธ์ ๑๓, ๒๕๕๖ จาก http://www.neutron.rmutphysics.com/news/index.php?option=com_content&task=view&id=638&Itemid=5&limit=1&limitstart=0109

พงศ์ทอง แซ่เฮ้ง, และเจษฎา กานต์ประชา. (๒๕๕๔). **เมทริกซ์**. ค้นเมื่อ กุมภาพันธ์ ๑๒, ๒๕๕๖ จาก http://www.mathcenter.net/review/review11/review11p01.shtml

มณฑิชา ชัยประเสริฐ. (๒๕๕๔). **การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มินันต์**. ค้นเมื่อ เมษายน ๒๑, ๒๕๕๖ จาก http://www.snr.ac.th/m5html/monticha/work/Lesson%207.htm

กมล เอกไทยเจริญ. (๒๕๕๔). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 (สาระเพิ่มเติม).** กรุงเทพฯ:ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง