บทที่ 8
การเคลื่อนที่แบบคลื่นและคลื่นกล

ในชีวิตประจำวันเราสามารถพบเห็นปรากฏการณ์คลื่นได้ทั่วๆ ไป เช่น การมองเห็นหรือการได้ยิน เป็นต้น ทุกสาขาวิชาฟิสิกส์ ถือได้ว่าความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับคลื่น เป็นพื้นฐานสำคัญของการศึกษาฟิสิกส์ คลื่นเคลื่อนที่โดยอาศัยตัวกลางเรียกว่าคลื่นกลหรือคลื่นยืดหยุ่น (Elastic waves) ถ้าอนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ทิศทางแนวฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เรียกว่าคลื่นตามขวาง (transverse waves) เช่น คลื่นน้ำ คลื่นในเส้นเชือก คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น ถ้าอนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ไปกลับทิศทางเดียวกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เรียกว่าคลื่นตามยาว (longitudinal waves) เช่น คลื่นเสียง คลื่นในสปริง เป็นต้น อัตราเร็วของคลื่นกลขึ้นกับปัจจัยหลายประการ โดยเฉพาะสมบัติของสภาพยืดหยุ่นและความเฉื่อยของตัวกลางที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่าน ในบทนี้จะศึกษาพื้นฐานเกี่ยวกับคลื่นบนเส้นเชือกก่อนเนื่องจากเป็นคลื่นที่สังเกตได้ง่ายและเป็นพื้นฐานของคลื่นทั้งหลาย

8.1 สมบัติของคลื่น (Properties of wave)

โดยทั่วไปสามารถแบ่งคลื่นออกเป็นสองประเภทคือ “คลื่นสัญจร (Traveling waves)” และ “คลื่นนิ่ง (Standing waves)” ตัวอย่างของคลื่นสัญจรที่พบเห็นทั่วไปคือการแผ่กระจายของคลื่นบนผิวน้ำ ซึ่งคลื่นสัญจรเป็นการแผ่กระจายของพลังงานโดยไม่มีการแผ่กระจายของสสาร ส่วนคลื่นนิ่งจะมีสมบัติตรงกันข้ามกับคลื่นสัญจรซึ่งเป็นคลื่นที่ถูกจำกัดอยู่ในบริเวณเฉพาะใดๆ เช่น การดีดกีตาร์จะทำให้เกิดคลื่นนิ่งบนสายกีตาร์ และพลังงานมีส่วนเกี่ยวข้องกับคลื่นนิ่งที่อยู่ที่บริเวณจำกัดนั้น

คลื่นเสียง คลื่นบนเส้นเชือก และคลื่นน้ำจัดเป็นตัวอย่างของ “คลื่นกล (Mechanical waves)” ซึ่งเป็นคลื่นที่มีอยู่ในตัวกลาง สามารถอธิบายได้ด้วยกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน และมีสมบัติของตัวกลางอยู่สองประการที่ทำให้เกิดพฤติกรรมของคลื่นกลคือ “แรงนำกลับ (Restoring force)” และ “มวลเฉื่อย (Inertial mass)” ในกรณีของคลื่นน้ำจะมีความโน้มถ่วงเป็นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดแรงดึงเพื่อให้น้ำกระเพื่อม กล่าวคือความโน้มถ่วงจะดึงส่วนยอดของคลื่นให้ลดลงและมาเสริมในส่วนท้องคลื่นให้เต็ม แต่คลื่นน้ำมีมวลเฉื่อยซึ่งเป็นเงื่อนไขของการกระเพื่อมรอบๆ จุดสมดุล ทำให้คลื่นมีการรบกวนกันและเกิดการแผ่กระจายออกไป เมื่อคลื่นแผ่กระจายผ่านในน้ำ อนุภาคของน้ำจะไม่เคลื่อนที่ไปในทิศทางของคลื่นแต่จะเคลื่อนที่ขึ้น – ลง หรือถ้าผูกเชือกไว้กับเสาต้นหนึ่งแล้วจับปลายเชือกอีกด้านหนึ่งแกว่งขึ้น – ลงเพื่อให้เกิดคลื่น จะสังเกตเห็นว่าคลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นเชือก แต่อนุภาคของเชือกจะแกว่งรอบๆ จุดศูนย์กลางจุดหนึ่ง ดังนั้นเมื่ออธิบายความสัมพันธ์ของคลื่นกับการเคลื่อนที่ จะต้องเข้าใจถึงลักษณะของความแตกต่างระหว่างการเคลื่อนที่สองแบบดังนี้

1) การเคลื่อนที่ของคลื่นในตัวกลาง

2) การเคลื่อนที่แบบแกว่ง (Oscillatory motion) ของอนุภาคของตัวกลาง

นอกจากนี้ยังสามารถจำแนกชนิดของคลื่นอีกแบบหนึ่งโดยพิจารณาจากทิศทางการกระจัดกระจายของอนุภาคเทียบกับทิศทางการแผ่กระจายของคลื่น ซึ่งจะแบ่งคลื่นได้เป็นสองประเภท คือ

“คลื่นตามขวาง (Transverse waves)” การเคลื่อนที่ของคลื่นแบบนี้อนุภาคของตัวกลางจะแกว่งในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางการแผ่กระจายของคลื่น เช่น คลื่นแสง ส่วนคลื่นอีกประเภทหนึ่ง คือ “คลื่นตามยาว (Longitudinal waves)” ซึ่งอนุภาคของตัวกลางจะแกว่งในทิศทางที่ขนานกับทิศทางการแผ่กระจายของคลื่น เช่น คลื่นเสียง เป็นต้น

8.2 คลื่นดล (Impulse)

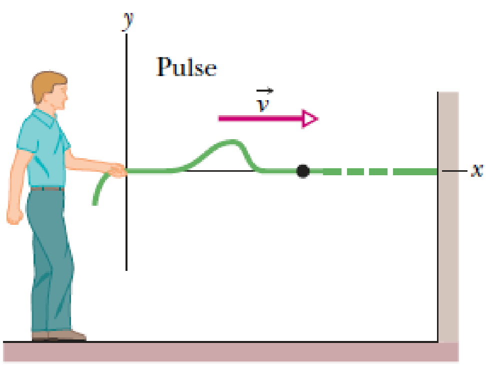
คลื่นดลเป็นคลื่นที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาสั้นๆ ภาพที่ 8.1 แสดงคลื่นดลที่เคลื่อนที่จากซ้ายมือไปขวามือด้วยความเร็ว v ในช่วงเวลาที่ o ถึง t ถ้าให้คลื่นดลที่เวลา o มีภาพร่างที่อธิบายได้ด้วยฟังก์ชัน y=f(x) เมื่อเวลาผ่านไป t คลื่นดลเคลื่อนที่ไปทางขวามือเป็นระยะทาง vt และมีฟังก์ชันเป็น f(x - a) ซึ่งมีภาพร่างเหมือนกับฟังก์ชัน f(x) แต่ฟังก์ชัน f(x – a) เป็นการเคลื่อนที่ของคลื่นในทิศทาง +x เป็นระยะทาง a ถ้าสมมติว่าคลื่นดลมีการคงสภาพภาพร่างไว้ตลอดการเคลื่อนที่ ดังนั้นภาพร่างของพัลส์ที่เวลา t กำหนดให้เป็น

$$y(x, t) = f(x - vt) \tag{8.1}$$

ในทำนองเดียวกันนี้จะบอกได้ว่าพัลส์ที่เคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือด้วยอัตราเร็ว v จะกำหนดให้เป็น

$$y(x, t) = f(x + vt) \tag{8.2}$$

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะพัลส์ที่เคลื่อนที่ไปในทิศทาง +x ตามสมการ (8.1) โดยถือว่าคลื่นไม่มีการเปลี่ยนแปลงภาพร่างเนื่องจากผลของการกระจาย (Dispersion) ฟังก์ชัน y (x , t) ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของคลื่นเรียกว่า “ฟังก์ชันคลื่น (Wave function)” ในกรณีของคลื่นบนเส้นเชือกจะมีฟังก์ชันคลื่นเป็นพิกัด y ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเส้นเชือก และเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับระยะกระจัด x และเวลา t ในขณะที่ทำการสังเกต



ภาพที่ 8.1 คลื่นดล
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2011, หน้า 414)

<u>ตัวอย่างที่ 8.1</u> พิจารณาคลื่นดลที่มีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$y(x,t) = \frac{y_0}{(\frac{x - vt}{x_0})^2 + 1}$$

เมื่อ y_0 = 10.0 mm, x_0 = 1.00 mm และ v = 10.0 m/s จงเขียนกราฟของพัลส์ที่เวลา t = 0 s และ t = 2.5 s

<u>วิธีทำ</u> โดยการแทนค่า t = 0 s ลงในสมการที่กำหนดจะได้

$$y(x,0) = \frac{10.0}{(\frac{x}{1.00})^2 + 1}$$

เมื่อแทนค่า x ลงไปในสมการข้างบนนี้จะได้กราฟเส้นทึบ โดยการแทนค่า t = 2.5 s ลงในสมการที่กำหนดให้จะได้

$$y(x,2.5) = \frac{10.0}{[\frac{(x - 5.00)}{(1.00)}]^2 + 1}$$

เมื่อแทนค่า x ลงไปในสมการข้างบนนี้จะได้กราฟเส้นประ

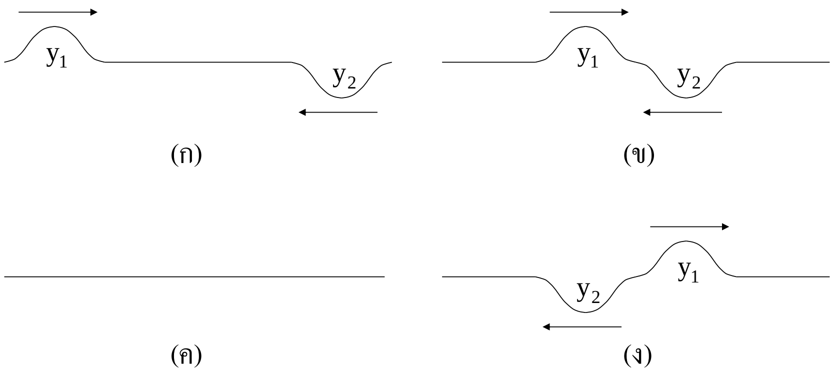
8.2.1 การแทรกสอดของคลื่น (Interference of wave)

เมื่อมีคลื่นตั้งแต่สองขบวนขึ้นไปเดินทางมาพบกัน ณ จุดๆ หนึ่งจะเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่า “การแทรกสอด (Interference)” ดังภาพที่ 8.2 ซึ่งเป็นการแทรกสอดของคลื่นดลสองลูกที่มีภาพร่างเหมือนกัน เมื่อพัลส์ทั้งสองของคลื่นที่มาพบกันจะเกิดการรวมกัน ผลที่ได้คือขนาดของการกระจัดและช่วงกว้างของพัลส์รวมจะเท่ากับผลบวกทางพีชคณิตของฟังก์ชันคลื่นของพัลส์ทั้งสองที่บริเวณนั้น

เมื่อพิจารณาคลื่นในเชิงคณิตศาสตร์ โดยให้ $f_1(x - vt)$ แทนพัลส์ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือ $f_2(x + vt)$ แทนพัลส์ที่เคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ และ y(x,t) แทนพัลส์รวม จะได้

$$y(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \tag{8.3}$$

ผลลัพธ์ตามสมการ (8.3) นี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของ “หลักแห่งการรวมกันได้ (Principle of superposition)” ที่กล่าวว่า “ผลลัพธ์ของฟังก์ชันคลื่นเกิดจากการรวมกันของฟังก์ชันคลื่นอิสระตั้งแต่สองฟังก์ชัน” ตามหลักแห่งการรวมกันได้นั้น คลื่นหรือพัลส์ที่รวมกันจะไม่มีการรบกวนต่อกันจนทำให้เสียลักษณะเฉพาะของแต่ละคลื่นหรือพัลส์ เมื่อคลื่นหรือพัลส์แยกออกจากกันแล้ว ภาพร่างขนาดและอัตราเร็วของแต่ละคลื่นหรือพัลส์จะยังคงเหมือนเดิมทุกประการ อนึ่งขอให้จำไว้ว่า คลื่นหรือพัลส์ที่จะรวมกันได้นั้นต้องมีธรรมชาติเหมือนกัน กล่าวคือต้องเป็นคลื่นชนิดเดียวกัน



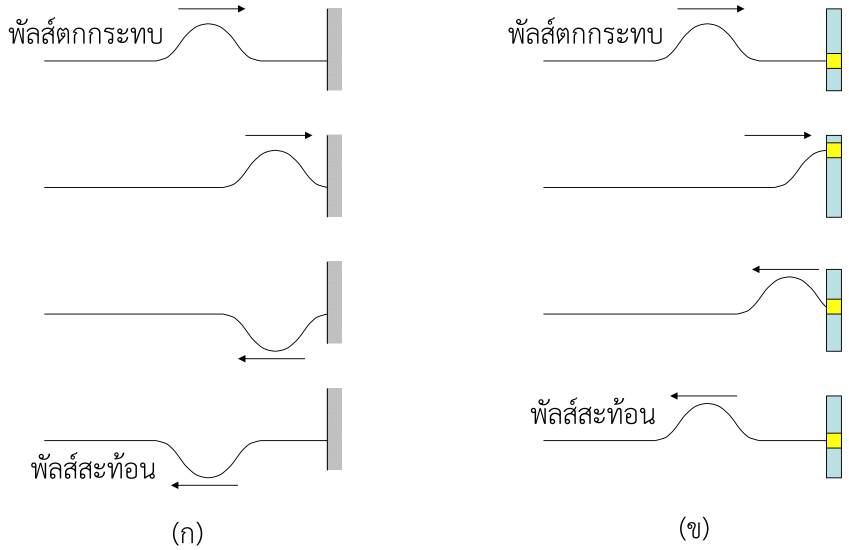
ภาพที่ 8.2 การรวมกันของพัลส์สองลูก
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 497)

8.2.2 การสะท้อนและการส่งผ่าน (Reflection and transmission)

คลื่นสามารถสะท้อนและส่งผ่านจากตัวกลางหนึ่งไปยังอีกตัวกลางหนึ่งได้ ในภาพที่ 8.3(ก) แสดงให้เห็นคลื่นในเส้นเชือกที่เดินทางจากทางซ้ายไปกระทบกับขอบด้านหนึ่งที่อยู่ทางขวาซึ่งเป็นตำแหน่งที่ปลายเชือกถูกตรึงไว้กับที่ เรียกว่า “พัลส์ตกกระทบ (Incident pulse)” และเกิด “พัลส์สะท้อน (Reflected pulse)” ออกมาจากจุดตรึง สมมติว่าแอมปลิจูดของพัลส์ตกกระทบจุดตรึงมีทิศขึ้นแสดงว่าจุดตรึงจะได้รับแรงกระทำในทิศขึ้น และจากกฎข้อสามของนิวตัน จุดตรึงจะออกแรงกระทำต่อเส้นเชือกในทิศทางตรงกันข้ามด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากัน จึงทำให้เกิดพัลส์ดลในเส้นเชือกที่สะท้อนออกมาโดยมีเฟสเปลี่ยนไป 180° ถ้าเปลี่ยนจุดตรึงให้เป็นจุดเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ เช่น ผูกไว้กับวงแหวนดังภาพที่ 8.3(ข) ผลที่ปรากฏคือพัลส์สะท้อนจะมีลักษณะเหมือนกับพัลส์ตกกระทบทุกประการแต่มีทิศทางตรงกันข้าม สมมติว่าปลายอิสระเคลื่อนที่ได้โดยไม่มีแรงเสียดทานเมื่อพัลส์ตกกระทบและมีแอมปลิจูดในทิศขึ้นจะส่งแรงให้ปลายอิสระเคลื่อนที่ขึ้นข้างบน ในขณะนั้นพลังงานจลน์จะเปลี่ยนไปเป็นพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของเส้นเชือกจนหมด หลังจากนั้นปลายเชือกจะเลื่อนต่ำลง และทำให้เกิดพัลส์สะท้อนกลับออกมา โดยมีเฟสที่เหมือนกันตกกระทบ

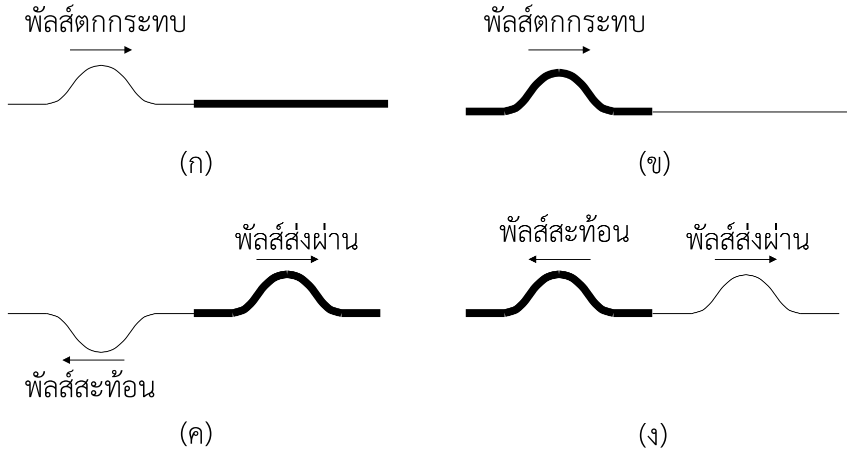
ในภาพที่ 8.4 เป็นการนำเชือกหนักและเชือกเบามาเชื่อมต่อเป็นเส้นเดียวกันแล้วทำให้เกิดคลื่นดลที่เดินทางจากซ้ายมือไปขวามือ จากภาพที่ 8.4(ก) จะเห็นว่าเมื่อพัลส์เดินทางมาถึงที่รอยต่อจะเกิดพัลส์สะท้อนที่มีเฟสตรงข้ามกับพัลส์ตกกระทบ ดังภาพที่ 8.4(ค) นอกจากพัลส์ดังกล่าวแล้วยังมี “พัลส์ที่ถูกส่งผ่าน (Transmitted pulse)” ไปยังเชือกหนัก แต่ว่าอัตราเร็วของพัลส์ที่ถูกส่งผ่านเข้าไป

ในเชือกหนักจะลดลง แสดงว่าอัตราเร็วของคลื่นขึ้นอยู่กับตัวกลางที่เคลื่อนที่ผ่าน สำหรับภาพที่ 8.4 (ข) และ (ง) จะเป็นกรณีที่พัลส์ตกกระทบเดินทางจากเชือกหนักไปยังเชือกเบา



ภาพที่ 8.3 การสะท้อนของพัลส์ในเส้นเชือก (ก) จากปลายเชือกตรึงอยู่กับที่ (ข) จากปลายที่เคลื่อนที่ได้

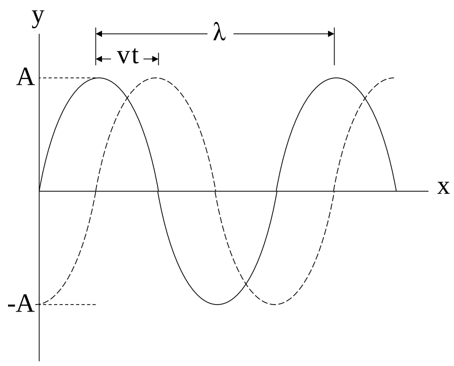
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 502)



ภาพที่ 8.4 แสดงพัลส์ที่เคลื่อนที่ในสองตัวกลาง ทำให้เกิดการสะท้อนและการส่งผ่าน

ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 462)

8.3 คลื่นฮาร์โมนิก (Harmomic wave)



ภาพที่ 8.5 คลื่นฮาร์โมนิกใน 1 มิติ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 503)

การอธิบายคลื่นในเชิงคณิตศาสตร์จะอยู่บนพื้นฐานของฟังก์ชันคลื่นแบบฮาร์โมนิก สำหรับคลื่นฮาร์โมนิกบนเส้นเชือกจะมีภาพร่างเป็นฟังก์ชันไซน์ จากภาพที่ 8.5 แสดงความแตกต่างของคลื่นในช่วงเวลาสั้นๆ โดยที่กราฟเส้นทึบเป็นการแสดงคลื่นที่เวลา t = 0 และกราฟเส้นประแสดงคลื่นที่เวลาต่างไปจากเดิม Δt ถ้าที่เวลา t = 0 มีฟังก์ชันเป็น

$$y = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

สำหรับคลื่นที่กำลังเคลื่อนที่ไปทางขวามือด้วยอัตราเร็ว v มีฟังก์ชันคลื่นฮาร์โมนิกที่ขึ้นกับเวลา คือ

$$y(x,t) = A\sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)] \tag{8.4}$$

และเรียกเทอม $\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$ ว่า “เฟส (phase)” ของคลื่น
พิจารณาการเคลื่อนที่ของส่วนของเส้นเชือกที่เวลา x = 0 จะได้

$$y = A\sin[(-\frac{2\pi}{\lambda})t] = -A\sin[(-\frac{2\pi}{\lambda})t]$$

เราทราบแล้วว่าการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (SHM) ซึ่งมีคาบ T สามารถอธิบายได้ด้วยความสัมพันธ์ $y \propto \sin[(\frac{2\pi}{\lambda})t]$ ดังนั้นส่วนของเส้นเชือกที่กำลังพิจารณาจะเคลื่อนที่แบบ SHM ด้วยคาบ

$$T = \frac{\lambda}{v} \tag{8.5}$$

คลื่นฮาร์โมนิกนอกจากจะขึ้นกับคาบแล้วยังมีตัวแปรที่อื่นเข้ามาเกี่ยวข้อง คือ ความถี่ของคลื่น (f) โดย $f = \frac{1}{T}$ และความถี่เชิงมุม (ω) พบว่า $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ นอกจากนี้ยังมีตัวแปรอีกตัว คือ "เลขคลื่น (Wave number, k)" ซึ่งมีความสัมพันธ์เป็น $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ จากตัวแปรที่กล่าวมานี้ทำให้ฟังก์ชันคลื่นสามารถเขียนแตกต่างได้หลายแบบ เพื่อความสะดวกมักเขียนในเทอมของ k และ ω ดังนี้

$$y = A\sin(kx - \omega t)$$

สามารถแสดงอัตราเร็วของคลื่นในเทอมของ ω, K, f และ λ ได้เป็น

$$v = f\lambda \qquad \text{และ} \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

สำหรับฟังก์ชันคลื่นที่สมบูรณ์จะต้องแสดง "ค่าคงที่เฟส (Phase constant; ϕ)" ไว้ด้วยดังนี้

$$y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

ในธรรมชาติจะไม่มีคลื่นที่อยู่ในภาพของคลื่นฮาร์โมนิกที่สมบูรณ์แบบ เนื่องจากคลื่นฮาร์โมนิกจะแผ่กว้างออกไปเป็นระยะอนันต์ทำให้ไม่มีเวลาเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุด แต่คลื่นจริงๆ จะมีจุดเริ่มต้นและเวลาสิ้นสุดที่แน่นอน สำหรับคลื่นบางชนิด เช่น คลื่นแสงและคลื่นเสียง สามารถประมาณได้ว่ามีลักษณะเป็นคลื่นฮาร์โมนิกได้ด้วยเหตุผลสองประการคือ

(1) มีการแผ่กระจายไปเป็นระยะทางไกลๆ เมื่อเทียบกับความยาวคลื่น

(2) ช่วงเวลาที่คลื่นเหล่านั้นเคลื่อนผ่านจุดใดๆ มีค่ามากกว่าคาบเวลาของตัวมันเอง

คลื่นที่แผ่กระจายออกไปอย่างต่อเนื่องนี้เรียกว่า "ขบวนคลื่น (Wave train)" และคลื่นฮาร์โมนิกจะเป็นตัวแทนของขบวนคลื่นในอุดมคติ

<u>ตัวอย่างที่ 8.2</u> คลื่นฮาร์โมนิกในเส้นเชือกมีแอมปลิจูดเท่ากับ 20 mm มีความยาวคลื่นเท่ากับ 2 m และมีอัตราเร็วเป็น 4 m/s จงหา

(ก) คาบ ความถี่ ความถี่เชิงมุม และเลขคลื่น

(ข) ฟังก์ชันของคลื่นที่กำหนดให้ โดยสมมติว่าคลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศทาง x

<u>วิธีทำ</u> (ก) โดยเหตุที่อัตราเร็วของคลื่นฮาร์โมนิกกำหนดโดย $v = \frac{\lambda}{T}$ ดังนั้น

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 12.56 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = 3.14 \text{ rad/m}$$

(ข) จากความสัมพันธ์ $y = A\sin(kx - \omega t)$ และจากข้อ (ก) จะได้

$$y = 20\sin(3.14x - 12.56t)$$

8.3.1 สมการคลื่น (Wave equation)

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันคลื่นฮาร์โมนิก $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ สามารถหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ t โดยคิดว่า x คงที่ จะได้อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial y}{\partial t}$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบของความเร็วในแนวแกน y คือ

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A\sin(kx - \omega t)] = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ y เทียบกับ t เมื่อ x คงที่ จะได้องค์ประกอบของความเร่ง เป็น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[-\omega A\cos(kx - \omega t)] = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ $v = \frac{\omega}{k}$ ในภาพของ $\omega^2 = v^2K^2$ สามารถเขียนองค์ประกอบของความเร่งได้ใหม่เป็น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2k^2 A\sin(kx - \omega t)$$

เมื่อ

$$y(x,t) = A\sin(Kx - \omega t)$$

จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2k^2 y(x, t)$$

หรือ

$$y(x, t) = -\frac{1}{v^2k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.6}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x โดยคิดว่า t คงที่ จะได้

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A\sin(kx - \omega t)] = kA\cos(kx - \omega t)$$

อนุพันธ์นี้คือความชันที่จุด x ณ เวลา t และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ y เทียบกับ x เมื่อให้ t คงที่คือการเปลี่ยนแปลงความชันที่จุด x นั่นเอง ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[kA\cos(kx - \omega t)] = -k^2 A\sin(kx - \omega t)$$

เมื่อ $y(x,t) = A\sin(Kx - \omega t)$ จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x, t)$$

หรือ

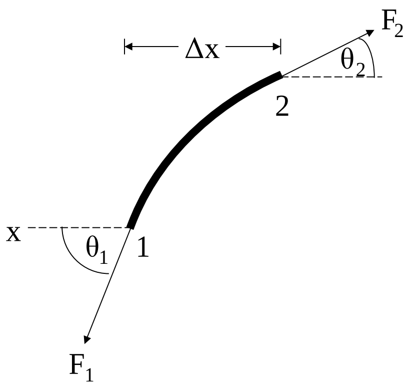
$$y(x, t) = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{8.7}$$

จากสมการ (8.6) และสมการ (8.7) จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.8}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ตามสมการ (8.8) นี้คือสมการคลื่น (Wave equation) ซึ่งได้มาจากอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นฮาร์โมนิก จึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชันคลื่นของคลื่นฮาร์โมนิกก็คือคำตอบของสมการคลื่นนั่นเอง

8.4 อัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก (The velocity of waves on string)



ภาพที่ 8.6 แสดงแรง F_1 และ F_2 กระทำที่ปลายของส่วนเล็กๆของเชือก
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 1996, หน้า 471)

พิจารณาส่วนเล็กๆ ของเชือกที่มีความหนาแน่นสม่ำเสมอตลอดทั้งเส้น เมื่อทำให้เกิดคลื่นบนเส้นเชือกตามภาพที่ 8.6 แรงสุทธิในแกน y คือ

$$\begin{aligned}\sum F_y = F_{y1} + F_{y2} &= -F\sin(\theta_1) + F\sin(\theta_2) \\ &= F[\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)]\end{aligned}$$

ถ้าสมมติให้ θ_1 และ θ_2 มีขนาดเล็กๆ จะประมาณได้ว่า $\sin(\theta_1) \approx \tan(\theta_1)$ และ $\sin(\theta_2) \approx \tan(\theta_2)$ เหตุผลที่ใช้การประมาณเพราะว่าความชันเกี่ยวข้องกับ tan นั่นคือ $\tan(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$ ดังนั้น $\sin(\theta) = \frac{\partial y}{\partial x}$ ทำให้เขียนแรงสุทธิได้เป็น

$$\sum F_y = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right] \tag{8.9}$$

เทอมในวงเล็บใหญ่ของสมการ (8.9) คือการเปลี่ยนแปลงความชันระหว่างจุดที่ 1 และ 2 ของเส้นเชือก ถ้าเชือกส่วนดังกล่าวสั้นมากๆ จะได้

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 &= \Delta\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\Delta(\partial y/\partial x)}{\Delta x}\Delta x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x \\ &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x\end{aligned}$$

จากสมการ (8.9) จะได้

$$\sum F_y = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \tag{8.10}$$

กำหนดให้ M และ L เป็นมวลและความยาวของเส้นเชือกตามลำดับ ถ้าเชือกมีลักษณะเป็นเชือกเอกพันธ์คือมีขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งเส้น พบว่าอัตราส่วนระหว่าง มวลกับความยาว หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า “ความหนาแน่นมวลเชิงเส้น (Linear mass density, μ)” ของเส้นเชือกคือ $\mu = \frac{M}{L}$ สามารถหามวลของส่วนเล็กๆ ของเส้นเชือกในเทอมของ μ ได้เป็น $m = \mu\Delta x$ และจากกฎข้อสองของนิวตัน

$$\sum F_y = ma_y$$

จะได้

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8.11}$$

เมื่อ $a_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ และสมการ (8.11) เป็นสมการของคลื่นบนเส้นเชือกที่ได้จากการทำนายโดยกฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน และเมื่อเปรียบเทียบสมการ (8.11) กับสมการ (8.8) จะได้

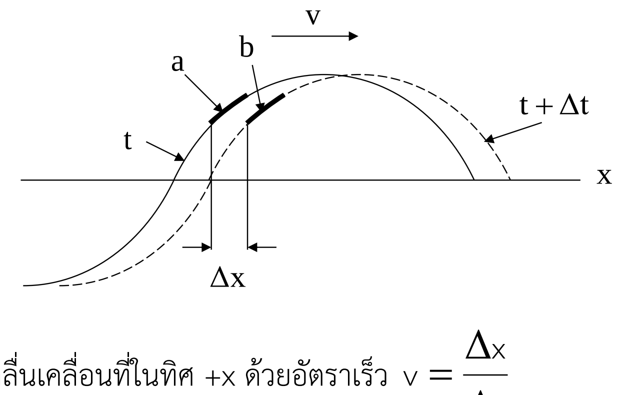
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{8.12}$$

แสดงว่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือกขึ้นอยู่กับสมบัติของตัวกลางที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่าน นั่นคือ

$$v = \sqrt{\frac{\text{restoring force factor}}{\text{initial massfactor}}}$$

8.5 กำลังของคลื่น (Power of wave)

ในขณะเคลื่อนที่ไปนั้นคลื่นจะพาพลังงานไปด้วย การหาอัตราของพลังงานที่แผ่กระจายออกไปโดยคลื่นหรือกำลังของคลื่นนั้น สิ่งแรกที่จะต้องหาให้ได้ก่อนคือ ความหนาแน่นของพลังงานคลื่น พิจารณาส่วนเล็กๆ ของเส้นเชือก a ที่เวลา t ใดๆ ดังภาพที่ 8.7 ขณะที่คลื่นกำลังเคลื่อนที่เชือกส่วน a จะมีทั้งพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ในเวลาเดียวกัน เนื่องจากเส้นเชือกมีการขยับขึ้น – ลง พลังงานจลน์ของส่วนเล็กๆ a คือ



ภาพที่ 8.7 ส่วนของคลื่นเคลื่อนที่ในทิศ +x ด้วยอัตราเร็ว $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2011, หน้า 417)

$$\Delta E_K = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

พลังงานจลน์ต่อหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นของพลังงานจลน์ของคลื่นคือ

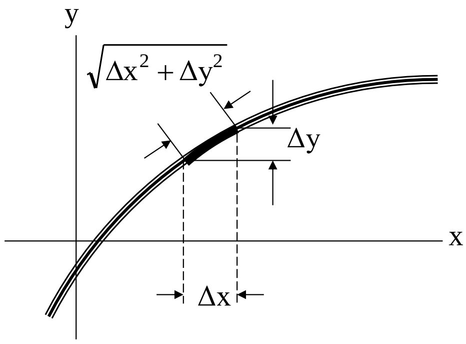
$$\frac{\Delta E_K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

สำหรับพลังงานศักย์หาได้โดยสมมติว่าส่วนเล็กๆ ดังกล่าวมีความยาวเป็น Δx เมื่อเวลาผ่านไป Δt คลื่นจะเคลื่อนตำแหน่งไปและมีความยาวเป็น $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ดังภาพที่ 8.8
ดังนั้นความยาวคลื่นที่เพิ่มขึ้นคือ

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 - \Delta x}$$

ถ้าส่วนของเส้นเชือกที่กำลังพิจารณาเล็กมากๆ สามารถประมาณได้ว่า

$$\Delta L \cong \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right]\Delta x \tag{8.13}$$



ภาพที่ 8.8 การยืดของคลื่น
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2011, หน้า 421)

โดยอาศัยการกระจายแบบทวินาม สามารถเขียนสมการ (8.13) ได้เป็น

$$\Delta L = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^2 + \ldots - 1\right]\Delta x$$

เนื่องจากสมมติว่าการขยับของเส้นเชือกมีค่าน้อยๆ ดังนั้นเทอม $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ ที่มีกำลังสูงๆ จึงมีค่าน้อยมาก จึงสามารถตัดทิ้งได้ จะได้ความยาวที่เปลี่ยนไป คือ

$$\Delta L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

พลังงานศักย์ ΔU ของส่วนเล็กๆ เกิดจากแรงดึง F และจากนิยาม $\Delta U = F\Delta L$ จะได้

$$\Delta U = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

ดังนั้น ความหนาแน่นของพลังงานศักย์ คือ

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

ความหนาแน่นของพลังงานคลื่นเป็นผลรวมของความหนาแน่นของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ นั่นคือ

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\Delta E_K}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

จากภาพที่ 8.8 แสดงถึงการเคลื่อนที่ของคลื่นโดยส่วนเล็กๆ a และส่วนเล็กๆ b จะเหมือนกัน แต่เป็นคลื่นที่เวลาแตกต่างกัน Δt นั่นคือคลื่นจะส่งผ่านพลังงานที่มีอยู่ใน a ไปยัง b ในช่วงเวลา Δt ดังนั้นพลังงานจึงแผ่ไปในเส้นเชือกด้วยอัตราเร็ว $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ซึ่งเท่ากับอัตราเร็วของคลื่น v สามารถหากำลังของคลื่นหรืออัตราการแผ่พลังงานตามเส้นเชือกได้

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$= \left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]v$$

สำหรับคลื่นฮาร์โมนิกที่มีฟังก์ชันคลื่นเป็น $y = A\sin(kx - \omega t)$ จะได้

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

และ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$$

เนื่องจาก

$$v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2}$$

จะได้

$$F = \omega^2 \frac{\mu}{k^2}$$

ดังนั้น

$$P = \left[\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(kx - \omega t) + \frac{1}{2}\frac{\omega^2\mu}{K^2}k^2A^2\cos^2(kx - \omega t)\right]v$$
$$= \mu\omega^2A^2v\cos^2(kx - \omega t)$$

โดยที่กำลังของคลื่นฮาร์โมนิกมีการแกว่งระหว่างค่าศูนย์กับค่าสูงสุด ดังนั้นปริมาณที่เราสนใจก็คือ “กำลังเฉื่อย” P_{av} ซึ่งค่าเฉลี่ยของ $\cos^2(\omega t)$ ในหนึ่งรอบเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$P_{av} = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v \qquad (8.14)$$

จะเห็นได้ว่ากำลังและกำลังเฉื่อยจะขึ้นอยู่กับกำลังสองของแอมปลิจูด ($P \propto A^2$) และกำลังเฉลี่ยของคลื่นที่แต่ละจุดบนเส้นเชือกจะเหมือนกันหมด

<u>ตัวอย่างที่ 8.3</u> เชือกเส้นหนึ่งมีความหนาแน่นเชิงเส้นเท่ากับ 10 g/m ปลายด้านหนึ่งผูกกับตัวสั่นปลายอีกข้างคล้องผ่านรอกและผูกติดกับมวลถ่วงขนาด 10 kg ถ้าตัวสั่นสั่นด้วยความถี่ 50 Hz ด้วยแอมปลิจูด 10 cm จงหากำลังเฉลี่ยของคลื่นที่เกิดขึ้น

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (8.14)

$$P_{av} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

เมื่อแรงดึงในเส้นเชือก T = 50 N ดังนั้น

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{50}{5\times10^{-3}}} = \sqrt{10\times10^{3}} = 10^{2}\ \text{m/s}$$

และ

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(50) = 314\ \text{rad/s}$$

ดังนั้น

$$P_{av} = \frac{1}{2}(5\times10^{-3}\ \text{kg/m})(3.14\,\text{rad/s})^2(2\times10^{-2}\ \text{m})^2(10^2\ \text{m/s})$$

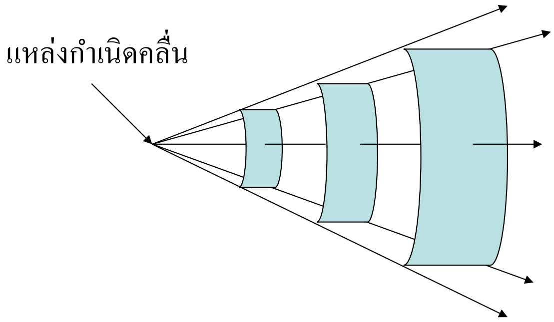
$$= 9.86\ \text{W}$$

8.6 ความเข้มของคลื่น (Intensity of wave)

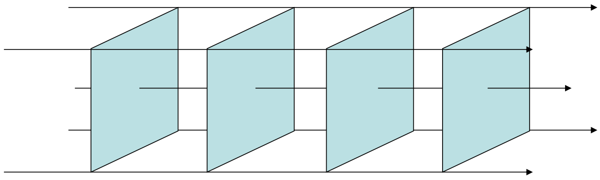
เมื่อโยนก้อนหินลงไปบนผิวน้ำจะเกิดคลื่นแผ่กระจายออกไป จะมองเห็นส่วนยอดของคลื่นที่แผ่ออกไปเป็นวงกลมซึ่งเรียกว่า “หน้าคลื่น (Wave front)” คลื่นน้ำจัดเป็นตัวอย่างที่ดีของคลื่นที่แผ่กระจายในสองมิติ และมีส่วนช่วยในการพิจารณาคลื่นในสามมิติ สำหรับคลื่นในสามมิติ เช่น คลื่นเสียงหรือคลื่นแสง หน้าคลื่นจะมีภาพเป็นผิวทรงกลมดังภาพที่ 8.9(ก) ซึ่งแสดงให้เห็นเฉพาะส่วนของผิวทรงกลมของหน้าคลื่นที่แผ่ออกมาจากจุดกำเนิด ในตัวกลางเอกพันธ์ หน้าคลื่นจะก่อภาพเป็นผิวทรงกลมที่สมบูรณ์ จึงเรียกคลื่นแบบนี้ว่า “คลื่นทรงกลม (Spherical waves)” โดยลูกศรจะใช้แสดงทิศทางการแผ่กระจายของคลื่นจากจุดกำเนิดซึ่งเรียกว่า “รังสี (Rays)” จะมีทิศทางตั้งฉากกับหน้าคลื่นเสมอ เมื่อพิจารณาที่ระยะห่างจากจุดกำเนิดคลื่นมากๆ หน้าคลื่นจะมีลักษณะใกล้เคียงกับระนาบ ดังภาพที่ 8.9(ข) และเรียกว่า “คลื่นระนาบ (Plan waves)”

ปริมาณที่สำคัญปริมาณหนึ่งซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะพลังงานของคลื่นคือ “ความเข้มของคลื่น (Wave intensity; I)” ซึ่งนิยามว่าเป็นกำลังของคลื่นที่แผ่กระจายไปต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ผิวในแนวตั้งฉากกับทิศทางการแผ่กระจาย เมื่อกำลังคืออัตราของการส่งผ่านพลังงาน $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ ดังนั้น ความเข้มของคลื่น คือ

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} \tag{8.15}$$



(ก) ส่วนของทรงกลมที่ใช้แทนส่วนของหน้าคลื่นที่แผ่ออกจากแหล่งกำเนิดแบบจุด



(ข) ส่วนของระนาบที่ใช้แทนหน้าคลื่นระนาบของคลื่นที่มาจากแหล่งกำเนิดที่อยู่ไกล

ภาพที่ 8.9 การแผ่กระจายของคลื่น
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 529)

เมื่อ Δs เป็นพื้นที่ผิวที่ตั้งฉากกับทิศทางการแผ่กระจายของคลื่น และ ΔE เป็นพลังงานที่พุ่งผ่านผิวในช่วงเวลา Δt และเนื่องจากมิติของกำลัง คือ พลังงานหารด้วยเวลา ดังนั้น มิติของความเข้มของคลื่น คือ (พลังงาน)(เวลา)(พื้นที่) ในระบบ SI ความเข้มมีหน่วยเป็น W/m^2 ถ้ากำหนดให้ P_0 คือกำลังคงที่ที่ส่งออกจากแหล่งกำเนิด และสมมติว่าตัวกลางที่แสงเคลื่อนที่ผ่านไม่มีผลในการลดทอนกำลังของคลื่น และคลื่นที่แผ่กระจายจากแหล่งกำเนิดมีลักษณะสม่ำเสมอในทุกๆ ทิศทาง เมื่อความเข้มหรือกำลังต่อหน่วยพื้นที่คืออัตราที่พลังงานผ่านทะลุผิวทรงกลมที่มีรัศมี r ดังนั้น

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} \tag{8.16}$$

เมื่อ r คือ รัศมีของผิวทรงกลมที่มีจุดกำเนิดคลื่นเป็นศูนย์กลาง จากสมการ (8.8) พบว่าความเข้มของคลื่นจะลดลงอย่างมากเมื่อระยะห่างจากจุดกำเนิดคลื่นเพิ่มขึ้น

ตัวอย่างที่ 8.4 จงหาความเข้มของคลื่นแสงในช่วงที่ตามองเห็นที่ระยะห่าง 2 m จากหลอดไฟขนาด 60 W โดยสมมติว่ากำลังของแสงในส่วนที่ตามองเห็นมีค่าเท่ากัน 10% ของกำลังของหลอดไฟ

วิธีทำ จาก

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2}$$

เมื่อ

$$P_0 = \left(\frac{10}{100}\right)60 = 6\,\text{W} \quad \text{และ } r = 2\text{ m}$$

ดังนั้น

$$I = \frac{6}{4\pi(2)^2} = 0.12\,\text{W/m}^2$$

8.7 การแทรกสอดของคลื่นฮาร์โมนิก (Interference of harmonics wave)

เมื่อคลื่นตั้งแต่สองขบวนเดินทางมาพบกันที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งจะเกิดปรากฏการณ์แทรกสอดขึ้น และผลรวมที่ได้จะมีลักษณะเป็นคลื่นด้วย ในหัวข้อนี้จะศึกษาการแทรกสอดของคลื่นสองขบวน โดยพิจารณาปรากฏการณ์ที่เรียกว่า “การแทรกสอดแบบเสริมและหักล้างกัน (Constructive and destructive inference)” และปรากฏการณ์ที่เรียกว่า “คลื่นนิ่ง (Standing waves)”

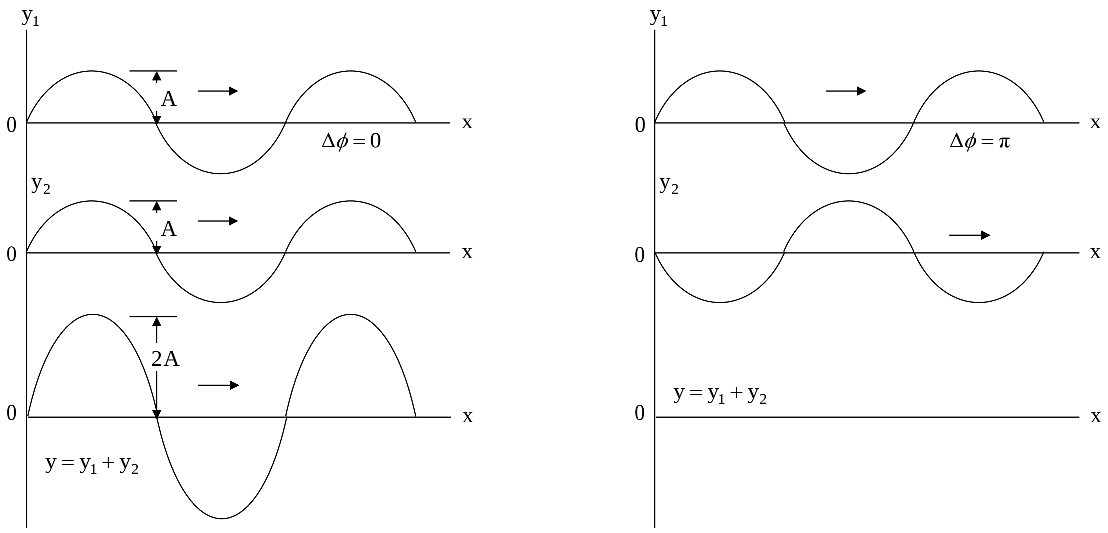
8.7.1 การแทรกสอดแบบเสริมและหักล้างกัน (Constructive and destructive interference)

พิจารณาการแทรกสอดของคลื่นฮาร์โมนิก 1 และ 2 ที่มีสมการเป็น

$y_1 = A\sin(kx - \omega t + \phi_1)$ และ $y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi_2)$

ถ้าคลื่นแต่ละขบวนมีทิศทางการเคลื่อนที่เดียวกัน มีแอมปลิจูด เลขคลื่น และความถี่เชิงมุมที่เท่ากันคือ A, k และ ω ตามลำดับ แต่มีสองเฟสคงที่ที่ต่างกันโดยมีผลต่างระหว่าง ϕ_1 และ ϕ_2 เท่ากับ $\Delta\phi$ ซึ่งเรียกว่า “ความต่างเฟส (Phase difference)” มีค่าเป็น

$$\Delta\phi = (kx - \omega t+\phi_2) - (kx - \omega t+\phi_1) = \phi_2 - \phi_1$$



(ก) การแทรกสอดแบบเสริมกัน $\Delta\phi$ = 0 (ข) การแทรกสอดแบบหักล้างกัน $\Delta\phi = \pi$

ภาพที่ 8.10 การแทรกสอดของคลื่น 2 ขบวนที่มี A , k และ ω และทิศทางการเคลื่อนที่เหมือนกัน
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 1996, หน้า 504)

ในภาพที่ 8.10 แสดงกราฟของคลื่นสองขบวนซึ่งเขียนแยกออกจากกัน โดยแสดงให้เห็นถึงกรณีที่มีเฟสตรงกัน (inphase) คือ $\phi_2 - \phi_1$ หรือ $\Delta\phi = 0$ ดังภาพที่ 8.10 (ก) ถ้า $\phi_1 \neq \phi_2$ หรือ $\Delta\phi = 0$ จะกล่าวว่าคลื่นนั้นทั้งสองขบวนมีเฟสต่างกัน (Out of phase) ดังภาพที่ 8.10 (ข) จากหลักแห่งการรวมกันได้ สามารถหาคลื่นลัพธ์ y ที่เกิดจากการแทรกสอดของคลื่น y_1 และ y_2 ได้เป็น

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t+\phi_1) + \sin(kx - \omega t+\phi_2)] \qquad (8.17)$$

โดยอาศัยพื้นฐานทางตรีโกณมิติ

$$\mathrm{Sin}(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]\cos[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]$$

เมื่อกำหนดให้

$$\alpha = kx - \omega t+\phi_2 \qquad \text{และ} \qquad \beta = kx - \omega t+\phi_1 \text{ จะได้}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = kx - \omega t + (\phi_1 + \phi_2)/2 \text{ และ } \frac{(\alpha-\beta)}{2} = \frac{\Delta\phi}{2}$$

ดังนั้น

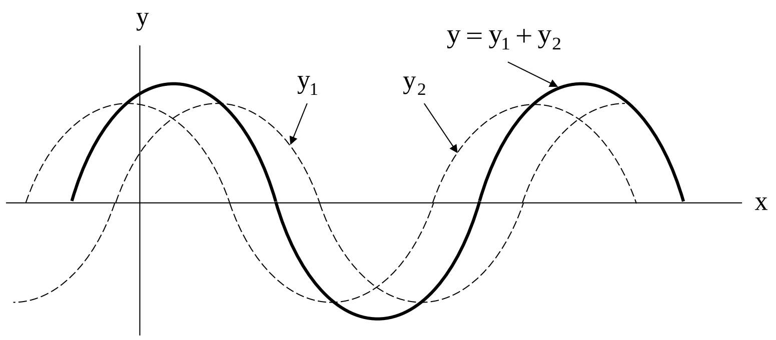
$$y = [2A\cos(\frac{\Delta\phi}{2})]\sin(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \qquad (8.18)$$

คลื่นลัพธ์ที่ได้ตามสมการ (8.18) นี้มีลักษณะสำคัญอยู่ 2 ประการคือ

1) คลื่นลัพธ์ y เป็นคลื่นฮาร์โมนิก มีสมบัติต่างๆ เหมือนกับคลื่นอิสระ y_1 และ y_2

2) แอมปลิจูดของคลื่นลัพธ์ y คือ $2A\cos(\frac{\Delta\phi}{2})$ ซึ่งจะขึ้นกับความต่างเฟส $\Delta\phi$ ระหว่างคลื่น y_1 และ y_2

ถ้าความต่างเฟสระหว่าง y_1 และ y_2 เป็นศูนย์ นั่นคือ $\Delta\phi = 0$ จะทำให้ $\cos(\frac{\Delta\phi}{2}) = \cos(0) = 1$ ทำให้คลื่นลัพธ์มีแอมปลิจูดเท่ากับ 2A ดังภาพที่ 8.10 (ก) เรียกการแทรกสอดประเภทนี้ว่า “การแทรกสอดแบบเสริมกัน (Constructive interference)” ถ้า y_1 และ y_2 ต่างเฟสกัน 180° หรือ π radian แล้วจะได้ $\cos(\frac{\Delta\phi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ทำให้แอมปลิจูดของ y จะเป็นศูนย์ เรียกการแทรกสอดนี้ว่า “การแทรกสอดแบบหักล้างกัน (Destructive interference)” ดังภาพที่ 8.10 (ข)



ภาพที่ 8.11 การแทรกสอดของคลื่น
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 1996, หน้า 501)

สำหรับการแทรกสอดที่มีความต่างเฟสน้อยกว่า 180° หรือ π radian คลื่นลัพธ์จะมีแอมปลิจูดอยู่ระหว่าง 2A กับศูนย์ และกราฟในกรณี radian แสดงดังภาพที่ 8.11 ในกรณีนี้แอมปลิจูดของคลื่นลัพธ์จะเป็น

8.7.2 คลื่นนิ่ง (Standing waves)

เมื่อคลื่นตกกระทบขอบเขตใดขอบเขตหนึ่งจะเกิดการสะท้อนกลับ ทำให้คลื่นสะท้อนและคลื่นตกกระทบเกิดการแทรกสอดกันเป็นผลให้เกิด “คลื่นนิ่ง (Standing wave)” ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ ที่สำคัญมากและนำไปสู่การค้นพบทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม เช่น การออกแบบอาคาร สะพาน และเครื่องดนตรี เป็นต้น

พิจารณาการเกิดคลื่นในเชิงคณิตศาสตร์โดยอาศัยการแทรกสอดของคลื่นฮาร์โมนิกสองขบวนที่มีแอมปลิจูด เลขคลื่น และความถี่เชิงมุมที่เหมือน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังนี้

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \qquad \text{และ} \qquad y_2 = A\sin(kx - \omega t)$$

เมื่อ y_1 เป็นคลื่นที่เคลื่อนที่ในทิศทาง +x และคลื่น y_2 เคลื่อนที่ในทิศทาง – x โดยที่คลื่นทั้งสองขบวนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $v = \dfrac{\omega}{k}$ กำหนดให้คลื่น y_1 เป็นคลื่นตกกระทบและคลื่น y_2 เป็นคลื่นสะท้อนและอาศัยหลักแห่งการรวมกันจะได้คลื่นลัพธ์เป็น

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t) \tag{8.19}$$

จากพื้นฐานทางตรีโกณมิติเมื่อ α = kx - ωt และ β = kx - ωt จะได้คลื่นลัพธ์ คือ

$$y(x, t) = 2A\cos(\omega t)\sin(kx) \tag{8.20}$$

กรณีคลื่นนิ่งในเส้นเชือก ดูเหมือนว่าคลื่นลัพธ์มีลักษณะเป็นคลื่นที่อยู่นิ่งๆ แต่ความจริงแล้วส่วนของเชือกมีการเคลื่อนที่ ถ้าเขียนสมการคลื่นนิ่งเป็น $y = [2A\sin(kx)]\cos(\omega t)$ พบว่าส่วนเฉพาะใดๆ ของเส้นเชือกมีการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกด้วยแอมปลิจูดเท่ากับ 2Asin(kx) และมีแอมปลิจูดสูงสุดเป็น 2A ที่ตำแหน่ง sin(kx) = 1 หรือ $kx = \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$ โดยเรียกตำแหน่งที่แอมปลิจูดสูงสุดว่า “แอนติโหนด (Antinodes)” เมื่อ $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ จะมีตำแหน่งของแอนติโหนดที่ตำแหน่งต่างๆ เป็น

$$x_n = (n + \frac{1}{2})(\frac{\lambda}{2}) \qquad n = 0, 1, 2, 3,... \qquad (8.21)$$

โดยที่ระยะห่างระหว่างแอนติโหนดเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น และ sin(kx) = 0 เมื่อ kx = 0, π, 2π, 3π,... ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เส้นเชือกไม่เคลื่อนที่และเรียกตำแหน่งนี้ว่า “โหนด (Node) ” พบว่า

$$x_m = \frac{m\lambda}{2} \qquad m = 0, 1, 2, 3,... \qquad (8.22)$$

ซึ่งมีระยะห่างระหว่างโหนดเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเช่นเดียวกับแอนติโหนด

คลื่นนิ่งสามารถเกิดได้ง่ายๆ จากคลื่นเพียงขบวนเดียวโดยผูกปลายเชือกด้านหนึ่งไว้ให้แน่น ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งใช้มือจับแล้วกระตุกขึ้น – ลง หรือซ้าย – ขวา ถ้าการกระตุกเชือกได้จังหวะพอดีจะสังเกตเห็นคลื่นนิ่ง โดยที่ปลายทั้งสองของเชือกจะเป็นตำแหน่งโหนด ถ้าให้ปลายเชือกอยู่ที่ตำแหน่ง x = 0 และ x = L สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นด้วยเงื่อนไขขอบเขตจะได้ y(0, t) = 0 และ y(L, t) = 0

โดยที่ปลายทั้งสองเป็นตำแหน่งของโหนดและระยะห่างระหว่างโหนดเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น ดังนั้นความยาวคลื่นของเส้นเชือก L จะต้องเป็นจำนวนเท่าของครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นด้วย นั่นคือ

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \qquad \text{โดยที่ } n = 0, 1, 2, 3,... \qquad (8.23)$$

เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มและ λ_n เป็นความยาวคลื่นเฉพาะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต สำหรับความถี่ที่สอดคล้องกับความยาวคลื่นเฉพาะนี้ คือ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$

ความถี่นี้เรียกว่า “ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequency)” โดยที่ความถี่ธรรมชาติต่ำสุดคือ $f_f = \frac{v}{2L}$ เรียกว่า “ความถี่มูลฐาน (Fundamental frequency)” โดยเหตุที่อัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือกคือ $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ดังนั้นความถี่มูลฐานของคลื่นนิ่งในเส้นเชือกจะเขียนได้เป็น

$$f_1 = \frac{\sqrt{F/\mu}}{2L}$$

ความถี่ธรรมชาติเขียนในเทอมของความถี่มูลฐานได้ดังนี้

$$f_n = nf_1 \qquad \text{โดยที่} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8.24}$$

เรียกความถี่ธรรมชาติตามสมการ (8.24) ว่า “ฮาร์โมนิก (Harmonics)” โดยเรียกความถี่มูลฐาน f_1, f_2 และ f_3 ว่า “ฮาร์โมนิกที่หนึ่ง” “ฮาร์โมนิกที่สอง” และ “ฮาร์โมนิกที่สาม” ตามลำดับ

สรุป

ฟังก์ชันคลื่นที่กำลังเคลื่อนที่ไปทางขวามือด้วยอัตราเร็ว v

$$y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

อัตราเร็วของคลื่น

$$v = f\lambda \qquad \text{และ} \qquad v = \frac{\omega}{k}$$

สมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

อัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

กำลังของคลื่นฮาร์โมนิก

$$P = \mu\omega^2 A^2 v\cos^2(Kx - \omega t)$$

ความเข้มของคลื่น คือ

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} = \frac{P_0}{4\pi r^2}$$

ความถี่ธรรมชาติ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$

ความถี่มูลฐานของคลื่นนิ่งในเส้นเชือก

$$f_1 = \frac{\sqrt{F/\mu}}{2L}$$

ความถี่ธรรมชาติเขียนในเทอมของความถี่มูลฐาน

$$f_n = nf_1 \qquad \text{โดยที่} \quad n = 0, 1, 2, 3,...$$

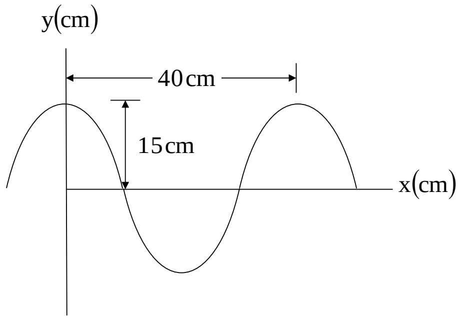
แบบฝึกหัด

1. คลื่นดลลูกหนึ่งเคลื่อนที่ในทิศทาง +x ถ้าฟังก์ชันของคลื่นดลนี้กำหนดเป็น

$$y(x,t) = \frac{2}{(x-1)^2 + 1}$$

   เมื่อ x และ y มีหน่วยเป็น cm และ t มีหน่วยเป็น s จงเขียนภาพคลื่นที่เวลา t = 0, t = 1 และ t = 2

2. คลื่นเคลื่อนที่ในทิศทาง + x มีแอมปลิจูด 15 cm มีความยาวคลื่น 40 cm และมีความถี่ 8 Hz ถ้าการกระจัดของคลื่นที่ t = 0 และ x = 0 คือ 15 cm ดังภาพที่ 8.12 จงหาเลขคลื่น คาบ ความถี่เชิงมุม และอัตราเร็วของคลื่น



ภาพที่ 8.12 ภาพประกอบแบบฝึกหัดข้อ 3
ตอบ 5π m^{-1}, 0.125 s, 16π rad/s, 3.2 m/s

3. เชือกเส้นหนึ่งมีมวลต่อความยาวเท่ากับ 5×10^{2} kg/m มีแรงดึงในเส้นเชือกเท่ากับ 80 N อยากทราบว่าจะต้องใช้ตัวสั่น ที่มีกำลังเท่าใด จึงทำให้เกิดคลื่นฮาร์โมนิกความถี่ 60 Hz บนเส้นเชือกนี้โดยมีแอมปลิจูด 6 cm

4. คลื่นฮาร์โมนิกขบวนหนึ่งมีฟังก์ชันเป็น

$$y = 0.15\sin(0.2x - 30t)$$

   เมื่อ x และ y มีหน่วยเป็น m และ t มีหน่วยเป็น s จงหาแอมปลิจูด ความถี่เชิงมุม เลขคลื่น ความยาวคลื่น อัตราเร็วของคลื่นและทิศทางการเคลื่อนที่

ตอบ 0.15, 16π rad/s, 0.2 m^{-1}, 10π m, 80 m/s

5. พิจารณาคลื่นในเส้นเชือกที่มีฟังก์ชันเป็น $y = 15\sin(\pi/16)(2x - 64t)$ เมื่อ x และ y มีหน่วยเป็น cm และ t มีหน่วยเป็น s จงหาแอมปลิจูด ความถี่เชิงมุม เลขคลื่น ความยาวคลื่น อัตราเร็วของคลื่น ความเร็วตามขวางของจุดบนเส้นเชือก ความเร็ว ตามขวางของจุดที่ x = 6 cm เมื่อ t = 0.25 s

6. คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง มีค่าตามสมการ

$$y = 0.004\sin(25\mathbf{x} + 250t)$$

จงหาอัตราเร็วคลื่น ความยาวคลื่น ความถี่ แอมพลิจูด อัตราเร็วและความเร่งของอนุภาคที่ตำแหน่ง $\mathbf{x_0}$ และเวลา t_0

ตอบ 10 m/s, 0.251 m, 39.8 Hz, 0.004 m, $v = \frac{\partial y}{\partial t} = 1.0\cos(25\mathbf{x_0} + 250t_0)$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -250\sin(25\mathbf{x_0} + 250t_0)$$

7. ผูกเชือกเส้นหนึ่งกับผนัง ปลายอีกด้านหนึ่งผูกกับมวล 2 kg แล้วคล้องผ่านรอกคล่อง ถ้าความยาวของเชือกจากผนังถึงรอกเท่ากับ 1.6 m และมีมวล 20 g จงหาอัตราเร็วของคลื่นบนเส้นเชือกนี้

8. สมการของคลื่นกำหนดเป็น

$$y(x,t) = 0.05\sin[\frac{\pi}{2}(10x - 40t) - \frac{\pi}{4}]\,m$$

ก) ความยาวคลื่น ความถี่ และความเร็วคลื่น

ข) ความเร็วและความเร่ง ที่ x = 0.5 m และ t = 0.05 s

ตอบ ก) 0.4 m, 10 Hz และ 4 m/s

ข) $v = \pi\cos(5\pi\mathbf{x_0} - 20\pi t_0 - \frac{\pi}{4})$, $a = -20\pi^2\sin(5\pi\mathbf{x_0} - 20\pi t_0 - \frac{\pi}{4})$

9. คลื่นตามขวางบนเส้นเชือกเส้นหนึ่งมีแอมปลิจูด 1.5 cm มีความยาวคลื่น 40 cm และมีอัตราเร็ว 30 cm/s จงหากำลังของตัวกำเนิดคลื่น

10. เส้นเชือกมีความหนาแน่นเชิงเส้น 0.25 kg/m ปลายข้างหนึ่งถูกดึงด้วยแรง 25 N ปลายข้างหนึ่งเกิดคลื่นรูปไซน์ ความถี่ 5 Hz แอมพลิจูด 0.01 m ที่เวลา t = 0 มีการกระจัดเป็นศูนย์ และกำลังเคลื่อนที่ในทิศทาง +y จงหา

    ก) อัตราเร็วของคลื่น แอมพลิจูด ความถี่เชิงมุม คาบ ความยาวคลื่นและเลขคลื่น

    ข) ฟังก์ชันคลื่น

    ค) ตำแหน่งของจุดที่ **x** = 0.25 m เวลา t = 0.1 s

    ง) ความเร็วของอนุภาคที่ **x** = 0.25 m เวลา t = 0.1 s

    จ) ความชันของเส้นเชือกที่ **x** = 0.25 m เวลา t = 0.1 s

ตอบ ก) 10 m/s, 0.01 m, 10π, 0.2 s, 2 m และ π m^{-1}

ข) y = = (0.01)sin(π**x** - 10πt)

ค) y = -0.00707 m

ง) v = = 0.222 m/s

จ) -0.0222

11. ฟังก์ชันคลื่นกำหนดเป็น y(x,t) = 0.02sin(0.4x + 50t + 0.8) เมื่อ x และ y ในหน่วยเซนติเมตร จงหา

    (ก) ความยาวคลื่น

    (ข) ค่าคงที่เฟส

    (ค) คาบ

    (ง) แอมปลิจูด

    (จ) ความเร็วคลื่นที่เวลาใดๆ

    (ฉ) ความเร็วของอนุภาคที่ x = 1 cm และ t = 0.5 s

12. คลื่นรูปไซน์มีแอมพลิจูด 4 mm ความถี่ 450 Hz ในเส้นเชือกมวลต่อความยาวเท่ากับ 15×10^{-3} $kg.m^{-1}$ แรงดึงในเส้นเชือก 225 N จงหากำลังเฉลี่ยของคลื่น

ตอบ 117 W

13. พิจารณาฟังก์ชันคลื่น $y\,(x.t) = 0.02\sin(\frac{x}{0.05} + \frac{t}{0.01})\,m$ จงหา

    (ก) ความเร็วคลื่น

    (ข) ความเร็วของอนุภาคที่ x = 0.2 m และ t = 0.3 s

14. ตัวสั่นมีความถี่ 12 Hz มีเชือกผูกติดอยู่ พบว่าคลื่นบนเส้นเชือกมีแอมปลิจูด 1.5 mm ถ้าเชือกมีความหนาแน่นเชิงเส้น 2 g/m และเชือกมีแรงดึง 15 N จงหากำลังเฉลี่ยที่เกิดขึ้นจากตัวสั่น

15. คลื่นฮาร์โมนิกแผ่กระจายไปในเส้นเชือกในทิศทาง x ถ้าเชือกมีความหนาแน่นเชิงเส้น 5 g/m และมีแรงดึง 100 N คลื่นมีแอมปลิจูด 5 cm และมีความยาวคลื่น 75 cm จงหา
    (ก) ความเร็วเฟสของคลื่น
    (ข) ความถี่และคาบของคลื่น
    (ค) มุมเฟสสำหรับ x = 0 ที่ t = 1
    (ง) ขนาดสูงสุดของความเร็วคลื่นตามขวาง

16. พัลส์ลูกหนึ่งแผ่กระจายด้วยอัตราเร็ว 260 m/s ไปบนเส้นเชือกที่มีความหนาแน่นเชิงเส้น 6 g/m จงหาความตึงเชือก

เอกสารอ้างอิง

พงษ์ศักดิ์ ชินนาบุญ และ วีระชัย ลิ้มพรชัยเจริญ. (2549). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ.

Beiser, A. (1983). **Applied physics**. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill.

Dare, W. A. & Harold, S. S. (1983). **Physics for engineering and science**. Schaum's outline series in engineering. New York: McGraw-Hill.

Frederick, K. J. , Edward, G. W. , & Malcolm, S. J. (1993). **Physics**. New York: McGraw-Hill.

Halliday, D. , Resnick, R. , & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

________ . (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2011). **Fundamental of physics** (9th ed.). New York: John Willey & Sons.

Knight, R. D. (1997). **Physics**. New York: Addison Wesley Longman.

Serway, R. A. (1996). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

________ . (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.

Spiegel, M. R. (1967). **Theoretical mechanics**. New York: Schaum's outline series.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (1996). **University physics** (9th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.

________ . (2000). **University physics** (10th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.