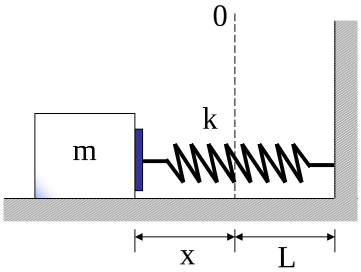
บทที่ 7
การเคลื่อนที่แบบแกว่ง

ในธรรมชาติมีการเคลื่อนที่แบบหนึ่งซึ่งมีลักษณะเป็นการเคลื่อนที่ซ้ำๆ ในช่างเวลาใดเวลาหนึ่ง เช่น การเคลื่อนที่ของโลกรอบดวงอาทิตย์ การเคลื่อนที่ของดวงจันทร์รอบโลก การหมุนรอบตัวเองของโลกและดวงจันทร์ และการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา เป็นต้น การเคลื่อนที่ดังกล่าวจะผ่านจุดใดจุดหนึ่งเสมอ จึงเรียกว่า “การเคลื่อนที่เป็นคาบ (Periodic motion)” หรือ การแกว่ง (Oscillatory) การเคลื่อนที่เป็นคาบ หรือการแกว่งเป็นการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกแรงกระทำและมีตำแหน่งเปลี่ยนไปจากตำแหน่งสมดุล (Stable equilibrium) เมื่อปล่อยหรือไม่มีแรงกระทำ วัตถุจะพยายามกลับสู่จุดสมดุล แต่เนื่องจากวัตถุมีความเฉื่อยทำให้วัตถุเคลื่อนที่ผ่านจุดสมดุลไปยังอีกด้านหนึ่ง และแรงที่ดึงวัตถุกลับสู่สมดุลจะทำให้วัตถุหยุดและเคลื่อนที่กลับไปยังจุดสมดุลอีกครั้ง ซึ่งผลดังกล่าวทำให้วัตถุเคลื่อนที่กลับไปกลับมาผ่านจุดสมดุล ถ้าไม่มีแรงเสียดทานวัตถุจะเคลื่อนที่อย่างต่อเนื่องตลอดไป การเคลื่อนที่บางอย่างมีแรงเสียดทานเข้ามาเกี่ยวข้องจึงจำเป็นต้องมีแรงหรือพลังงานป้อนให้กับระบบตลอดเวลา

7.1 การแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (Simple harmonic oscillations)



ภาพที่ 7.1 การเคลื่อนที่ของระบบมวล - สปริง
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 390)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของมวล m ติดอยู่กับสปริงซึ่งมีค่าคงที่ k และปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงถูกยึดไว้กับผนัง ดังภาพที่ 7.1 ถ้า L คือความยาวเริ่มต้นของสปริง และไม่มีความเสียดทานระหว่างพื้นและวัตถุ เมื่อออกแรงดึงมวลดังกล่าวแล้วปล่อย พบว่ามวลจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมารอบๆ จุดเริ่มต้นหรือจุดสมดุล โดยมีระยะกระจัดของการเคลื่อนที่เป็น x ซึ่งมีความสัมพันธ์กับแรงตามกฎของฮุคดังสมการ

$$F(x) = -kx \tag{7.1}$$

และมีพลังงานศักย์ U(x) เท่ากับ

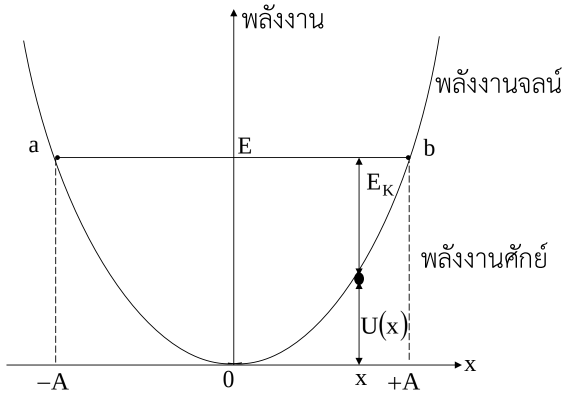
$$U(x) = \int_0^x F(x).dx = \int_0^x kx.dx$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 \qquad (7.2)$$

และพลังงานจลน์ (E_k) ของมวลที่ระยะต่างๆคือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (7.3)$$

เนื่องจากไม่มีแรงเสียดทานระหว่างพื้นและมวลทำให้ง่ายที่จะใช้กฎถาวรของพลังงานอธิบายการเคลื่อนที่ของระบบ โดยผลรวมของพลังงานศักย์ของสปริงและพลังงานจลน์ของมวลมีค่าคงที่ นั่นคือ

$$E = U(x) + E_k$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{ค่าคงที่} \qquad (7.4)$$



ภาพที่ 7.2 พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ที่ระยะกระจัดต่างๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 427)

ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานรวม (E) ในเทอมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ที่ระยะกระจัดต่างๆแสดงดังภาพที่ 7.2 โดยพลังงานจลน์ของมวลจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $x = \pm A$ หรือที่จุด a และ b ซึ่งเป็นจุดที่มวลเคลื่อนที่ได้ระยะกระจัดสูงสุด จึงเรียกจุด a และ b ว่า “จุดวกกลับ (Turning point)” กล่าวคือ เมื่อมวลเคลื่อนที่ไปทางขวาจนถึงจุด b หรือที่ $x = +A$ มวลจะหยุดชั่วขณะแล้วเคลื่อนที่กลับไปทางซ้าย จนกระทั่งถึงจุด a หรือที่ $x = -A$ มวลก็จะหยุดนิ่งชั่วขณะแล้วจะเคลื่อนที่

กลับไปทางขวาอีกครั้ง ทำให้ระยะกระจัดของการเคลื่อนที่อยู่ในช่วง $-A \leq x \leq +A$ และที่ระยะ $x = \pm A$ มวลจะมีพลังงานศักย์สูงสุด (U_m) ส่วนพลังงานจลน์มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$U_m = U(\pm A)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 = E \text{ ที่ } x = \pm A \qquad (7.5)$$

เมื่อมวลเคลื่อนที่ผ่านจุด $x = 0$ มวลจะมีพลังงานจลน์สูงสุด [$E_k(max)$] และมีพลังงานศักย์เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$E_k(max) = \frac{1}{2}mv^2 = E \text{ ที่ } x = 0 \qquad (7.6)$$

หรือมวลมีความเร็วสูงสุด (v_{max}) เท่ากับ

$$v_{max} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad (7.7)$$

และจากสมการ (7.4) และ (7.5) จะได้

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

หรือ

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \qquad (7.8)$$

ซึ่งสามารถหาระยะที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา t ใดๆ โดยการอินทิเกรทสมการ (7.8) ตั้งแต่เวลา 0 ถึง t และมีระยกระจัดตั้งแต่ x_0 ถึง x จะได้

$$\int_{x_0}^{x}(A^2 - x^2)^{-1}dx = \sqrt{\frac{k}{m}}\int_0^t dt$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

หรือ

$$\sin^{-1}(\frac{x}{A}) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \sin^{-1}(\frac{x_0}{A}) \qquad (7.9)$$

ถ้ากำหนดให้ $\phi_0 = \sin^{-1}(x_0/A)$ เมื่อ $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$ และ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ จะเขียนสมการ (7.9) ในเทอมของระยะกระจัดที่เวลาต่างๆได้

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0) \qquad (7.10)$$

เมื่อ $\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$ คือมุมเฟสของการเคลื่อนที่ (Phase angle) โดยมีมุมเฟสเริ่มต้น (ϕ_0) หรือเฟสที่เวลา $t = 0$ มีค่าคงที่ ส่วน A คือ ระยะกระจัดสูงสุด หรือ แอมพลิจูด (Amplitude) ของการเคลื่อนที่ ถ้า $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ สามารถเขียนสมการ (7.10) ได้ใหม่เป็น

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) \qquad (7.11)$$

โดยระยะกระจัดที่เวลาต่างๆตามสมการ (7.10) และ (7.11) จะใช้อธิบายการเคลื่อนที่แบบซ้ำๆ หรือการแกว่งเมื่อมุมเฟสเริ่มขึ้น 2π ทุกๆรอบของการแกว่ง ซึ่งเรียกว่า คาบ (Period, T) ของการเคลื่อนที่ ดังนั้น

$$\phi(t + T) + \phi_0 = \omega_0 t + \phi_0 + 2\pi$$

เมื่อ $\omega_0 T = 2\pi$ ดังนั้น $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ หรือสามารถหาคาบของการเคลื่อนที่ได้จาก

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (7.12)$$

และความถี่ (Frequency, f) ของการแกว่ง

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (7.13)$$

ซึ่งหน่วยเป็นเฮิรตซ์ (Hertz, Hz) โดย 1 Hz เท่ากับจำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ในหนึ่งวินาที เช่น การแกว่งที่มีคาบเท่ากับ 0.02 s จะมีความถี่เท่ากับ 50 Hz ถ้าการเคลื่อนที่หรือการแกว่งเป็นแบบอิสระจะเรียกความถี่นี้ว่า ความถี่ธรรมชาติ หรือความถี่คุณลักษณะ (Natural or characteristic frequency) โดยมีความถี่เชิงมุม (angular frequency, ω_0) คือ

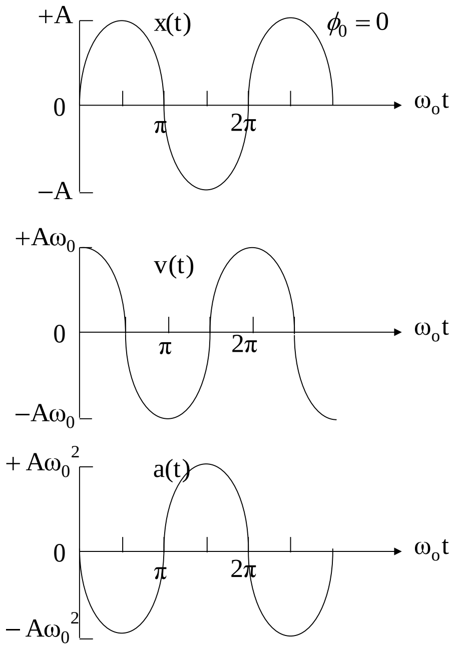
$$\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.14}$$

มีหน่วยเป็น rad/s และจากสมการ (7.10) สามารถหาความเร็วของมวลได้

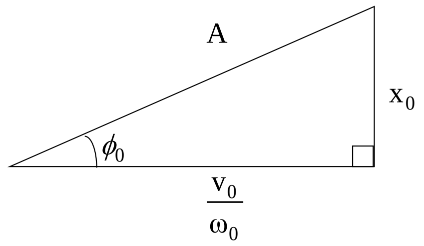
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \tag{7.15}$$

และความเร่งของมวลเท่ากับ

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{7.16}$$



ภาพที่ 7.3 ระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่งที่เวลาต่างๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 423)



ภาพที่ 7.4 เรขาคณิตที่ใช้แทนพารามิเตอร์ของการแกว่ง
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 407)

จากสมการ (7.10), (7.15) และ (7.16) เมื่อให้ ϕ_0 = 0 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง ระยะกระจัด ความเร็วและความเร่งที่เวลาต่างๆ แสดงดังภาพที่ 7.3 พบว่าระยะกระจัดและความเร็วสูงสุดจะมีเฟสต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน หรือ 90° การเคลื่อนที่ดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยคลื่นภาพ (Sine) หรือ ภาพโคไซน์ (Cosine) และเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า “การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (Simple harmonic motion, SHM)” และจากสมการ (7.16) จะได้

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \phi_0) = -\omega_0^2 x(t)$$

และจากสมการ (7.14) จะได้สมการการเคลื่อนที่คือ

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \tag{7.17}$$

และสามารถหาแอมพลิจูด A และมุมเฟสเริ่มต้น ϕ_0 ของการเคลื่อนที่ได้โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นที่ t = 0 ดังนั้น จากสมการ (7.10) และ (7.15) จะได้

$$x_0 = A\sin(\phi_0) \tag{7.18a}$$

และ

$$v_0 = A\omega_0\cos(\phi_0) \tag{7.18b}$$

ดังนั้น

$$\tan(\phi_0) = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \tag{7.19}$$

และจากสมการ (7.18) จะได้

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 = A^2\sin^2(\phi_0) + A^2\cos^2(\phi_0)$$

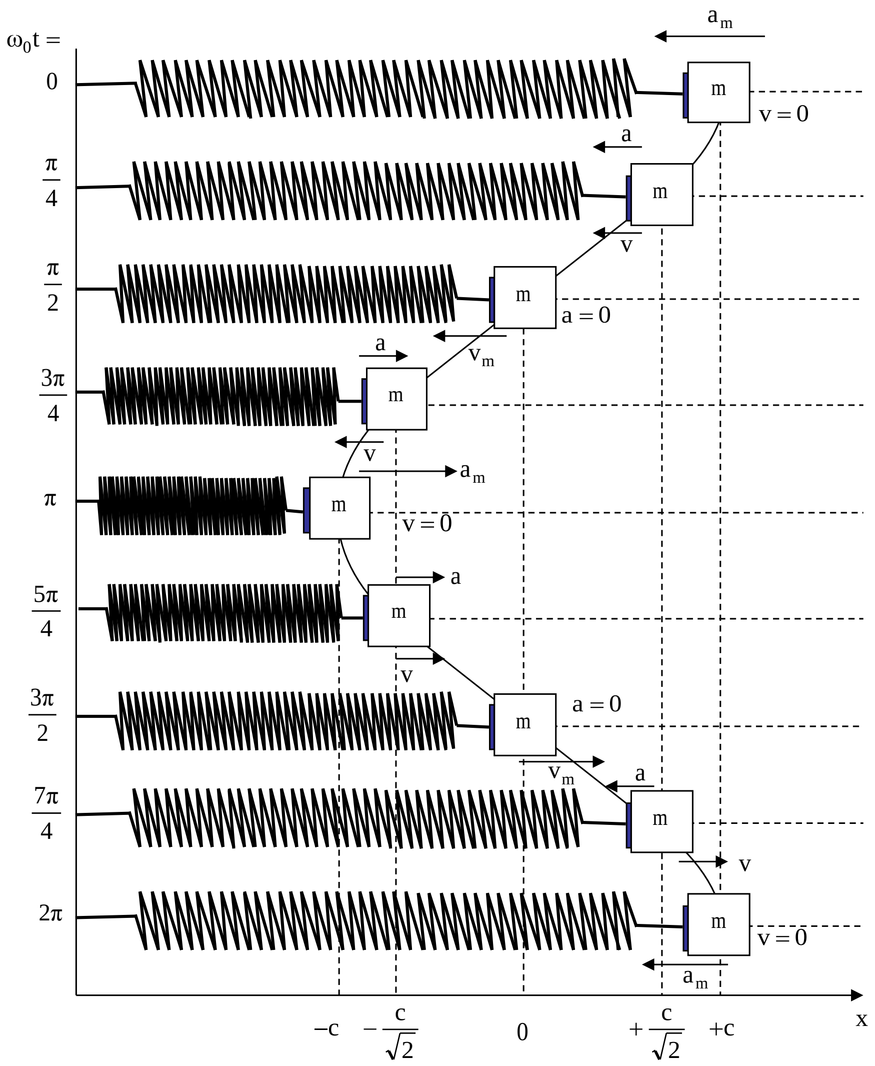
$$= A^2[\sin^2(\phi_0) + \cos^2(\phi_0)]$$

$$= A^2$$

ดังนั้น

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{7.20}$$

จากภาพที่ 7.5 ถ้าออกแรงดึงสปริงให้ยืดออกเป็นระยะ $x = c$ แล้วปล่อย จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่งที่เวลาต่างๆ ดังภาพที่ 7.5



ภาพที่ 7.5 แสดงความเร็ว ความเร่ง และระยะกระจัดที่เวลาต่างๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 429)

<u>ตัวอย่างที่ 7.1</u> สปริงยืดออก 0.02 m เมื่อดึงด้วยแรงขนาด 4 N ถ้ายึดให้สปริงติดกับมวล 2 kg ดึงสปริงยืดออก 0.04 m แล้วปล่อยให้เคลื่อนที่อย่างเสรี แสดงดังภาพที่ 7.6 จงหา

ก) ค่าคงตัวสปริง

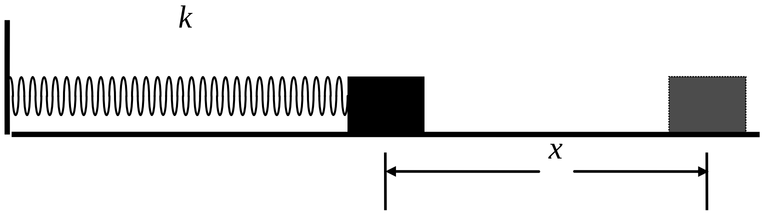
ข) คาบและความถี่ของการสั่น

ค) ความเร็วสูงสุด

ง) ความเร่งสูงสุด

จ) ความเร็วและความเร่งขณะมวลเคลื่อนที่มาถึงครึ่งทางจากจุดเริ่มต้น

ช) เวลา t ที่ใช้ขณะเคลื่อนที่มาถึงครึ่งทางจากจุดเริ่มต้น x



ภาพที่ 7.6 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 7.1

<u>วิธีทำ</u> ก) จากสมการ

$$k = \frac{F}{x}$$

$$= \frac{4N}{0.02m}$$

$$= 200 \text{ N/m}$$

ข) คาบ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}$$

$$= 0.628 \text{ s}$$

ความถี่

$$f = \frac{1}{T}$$

$$= \frac{1}{0.628}$$

$$= 1.59 \text{ s}^{-1} = 1.59 \text{ Hz}$$

ความถี่เชิงมุม

$$\omega = 2\pi f$$

$$= 2\pi(1.59)$$

$$= 10\ s^{-1}$$

ค) ความเร็วสูงสุดเมื่อมวลมาถึงตำแหน่งสมดุลการกระจัด x = 0
จากสมการ

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

ดังนั้น

$$v = v_{max} = \pm\omega A$$

$$= \pm(10)(0.04)$$

$$= \pm 0.4\ m/s$$

ง) จากสมการ

$$a = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

ความเร่งสูงสุดเกิดที่จุดปลายของทางเดิน การกระจัด x = $\pm$A

$$a_{max} = \mp\omega^2 A$$

$$= \mp (10)^2(0.04) = \mp\ 4.0\ m/s$$

จ) วัตถุเคลื่อนที่ได้ครึ่งทางจากจุดเริ่มต้น
ที่จุดนี้การกระจัด $x = \frac{A}{2} = 0.02m$
ดังนั้นความเร็ว

$$v = -(10)\sqrt{(0.04)^2 - (0.02)^2}$$

$$= -\ 0.346\ m/s$$

ความเร่ง

$$a = -\omega^2 x$$

$$= (10)^2(0.02) = -2.0\ \text{m/s}^2$$

ช) ตำแหน่งที่เวลา t ใดๆ

$$x = A\cos\omega t$$

จากโจทย์

$$\frac{A}{2} = A\cos(10)t$$

หรือ

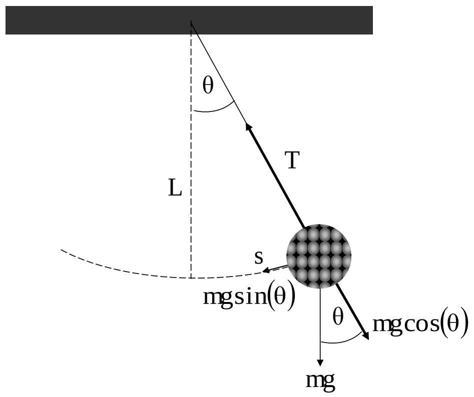
$$\cos(10)t = \frac{1}{2}$$

$$t = \left(\frac{1}{10}\right)\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{30}\,\text{s}$$

7.2 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย (Simple pendulum)

การแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาเป็นอีกตัวอย่างหนึ่งที่แสดงการเคลื่อนที่แบบแกว่ง ซึ่งประกอบด้วยมวล m แขวนในแนวดิ่งด้วยเชือกเบายาว L ดังภาพที่ 7.7 เมื่อมีแรงกระทำต่อมวลดังกล่าวทำให้เคลื่อนที่อยู่บนระนาบในแนวดิ่ง โดยแรงโน้มถ่วงจะเป็นแรงผลักดันมวลให้เคลื่อนที่ต่อไป ถ้ามวลแกว่งไปด้วยมุมแคบๆ การเคลื่อนที่ดังกล่าวเป็นแบบซิมเปิลฮาร์โมนิก และมีแรงกระทำต่อมวลคือแรงตึงในเส้นเชือก (T) และแรงโน้มถ่วง (mg) โดยมีแรงขนาด mgsin(θ) ดึงมวลให้เคลื่อนที่เข้าหาจุดสมดุลและจากกฎข้อที่สองของนิวตัน พบว่า



ภาพที่ 7.7 ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 402)

$$F_t = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

เมื่อ F_t = mgsin(θ) ดังนั้น

$$-mg\sin(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2} \tag{7.21}$$

เมื่อ s เป็นระยะทางที่มวลเคลื่อนที่ได้ เครื่องหมายลบแสดงถึงทิศทางการเคลื่อนที่เข้าหาจุดสมดุลแต่ s = Lθ และ L มีค่าคงที่ สามารถเขียนสมการ (7.21) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \tag{7.22}$$

ถ้า θ มีค่าน้อยๆ จะทำให้ sin(θ) $\approx$ θ เมื่อ θ มีหน่วยเป็นเรเดียน จะได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{7.23}$$

สมการ (7.23) มีความสัมพันธ์คล้ายกับสมการ (7.17) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก จึงสามารถเขียนสมการ θ ที่เวลาต่างๆได้

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega i + \phi) \tag{7.24}$$

เมื่อ θ_0 เป็นมุมที่ลูกตุ้มนาฬิกาแกว่งออกไปได้กว้างที่สุด และมีความถี่เชิงมุมเท่ากับ

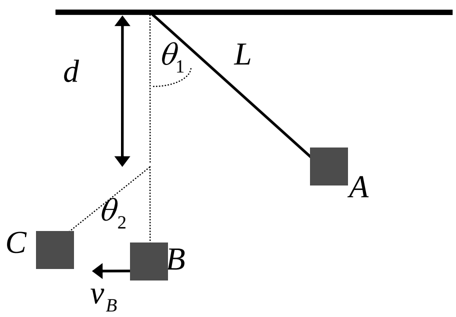
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{7.25}$$

ซึ่งมีคาบของการแกว่งเท่ากับ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{7.26}$$

แสดงว่าคาบของการแกว่งจะขึ้นอยู่กับความยาวเชือกและค่าโน้มถ่วงของโลกจะไม่ขึ้นอยู่กับขนาดของมวล จึงสามารถนำมาประยุกต์สร้างนาฬิกาจับเวลาได้

<u>ตัวอย่างที่ 7.2</u> ลูกตุ้มเชิงเดียวแขวนเส้นลวดยาว L = 1.8 m ปล่อยจากหยุดนิ่งมุม θ_1 = 3° แสดงดังภาพที่ 7.8 สมมติว่า d = 0.9 m จงหาเวลาที่ลูกตุ้มเชิงเดียวแกว่งกวัดจาก A ไปยัง A



ภาพที่ 7.8 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 7.2

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

เวลาที่ใช้จากจุด A ไปยัง B ความยาว L = 1.8 m

$$t_{AB} = \frac{1}{4}T$$

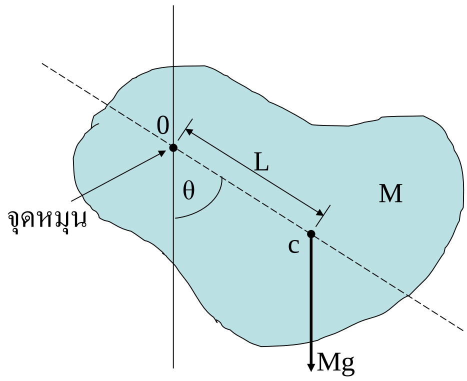
$$= \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}) = \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{1.8m}{9.8m.s^{-2}}}) = 0.67s$$

ทำนองเดียวกันเวลาที่ใช้จากจุด B ไปยัง C ความยาว L = 0.9 m

$$t_{BC} = \frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{0.9m}{9.8m/s^2}}) = 0.47s$$

ดังนั้นเวลาของการแกว่งกวัดจาก A ไปยัง A = 2(0.67s + 0.47s) = 2.28s

7.3 ลูกตุ้มกายภาพ (Physical pendulum)



ภาพที่ 7.9 ลูกตุ้มกายภาพ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 434)

เมื่อนำวัตถุมาแขวนที่จุดๆหนึ่ง โดยจุดดังกล่าวไม่อยู่ในแนวที่ผ่านศูนย์กลาง (Center of mass) ทำให้ไม่สามารถพิจารณาความเร่งของวัตถุดังกล่าวในเทอมของมวลที่เป็นก้อนเหมือนกับการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย จำเป็นต้องคำนึงถึงภาพร่างทางกายภาพของวัตถุดังกล่าว พิจารณาการแกว่งของวัตถุดังภาพที่ 7.9 โดยแขวนวัตถุที่จุด O ซึ่งห่างจากจุดศูนย์กล่าวมวลพบว่าแรงที่กระทำต่อวัตถุจะเกิดจากน้ำหนักของวัตถุดังกล่าวเท่ากับ mgsin(θ) หรือเกิดแรงบิดเท่ากับ mgLsin(θ) ซึ่งแรงบิดดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับแรงจากโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of inertia, I) รอบๆ แกนดังสมการ

$$-mgL\sin(\theta) = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{7.27}$$

เครื่องหมายลบแสดงถึงทิศทางของแรงบิดดังกล่าวที่ทำให้มุม θ เล็กลง ถ้า θ แคบๆ จะทำให้ $\sin(\theta) \approx \theta$ จากสมการ (7.27) จะได้

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\frac{mgL}{I})\,\theta = -\omega^2\theta \tag{7.28}$$

สมการ (7.28) จะมีภาพแบบเหมือนกับสมการ (7.17) แสดงว่าการแกว่งของลูกตุ้มกายภาพเป็นการแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกจะได้มุมของการแกว่งที่เปลี่ยนไปตามเวลา คือ

$$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega i + \phi) \tag{7.29}$$

เมื่อ θ_0 เป็นมุมที่วัตถุแกว่งได้กว้างที่สุด และ

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \tag{7.30}$$

และมีคาบของการแกว่งเท่ากับ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \tag{7.31}$$

จากสมการ (7.31) สามารถคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุได้เมื่อทราบระยะ และวัดคาบของการแกว่ง ถ้ามวลทั้งหมดของวัตถุอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลจะทำให้โมเมนต์ความเฉื่อยเท่ากับ mL^2 และทำให้สมการ (7.31) เท่ากับสมการ (7.26)

ตัวอย่างที่ 7.3 ด้ามไม้กวาดความยาว L = 1.5 m โมเมนต์ความเฉื่อย $I = \frac{1}{3}mL^2$ ถูกทำให้เกิดการแกว่งกวัด จงหา

ก) คาบการแกว่งกวัด

ข) ความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากัน

<u>วิธีทำ</u> ก) จากสมการ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

ระยะทาง h จากจุดหมุนไปยังจุดศูนย์ถ่วงของด้ามไม้กวาด h = L/2 ดังนั้น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2/3}{mgL/2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2(1.5)}{3(9.8)}} = 2.01s$$

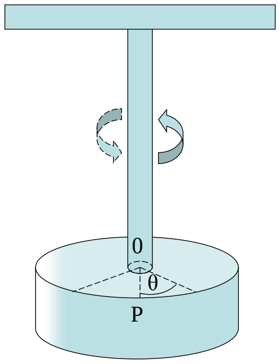
ข) คาบการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียว

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

จะได้ว่าความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากัน

$$L = g\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{(9.8)(2.01)^2}{4\pi^2} = 0.99m$$

7.4 ลูกตุ้มชนิดบิด (Torsional pendulum)



ภาพที่ 7.10 ลูกตุ้มชนิดบิด
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 435)

พิจารณาวัตถุแผ่นกลมถูกแขวนด้วยเส้นลวดดังภาพที่ 7.10 ถ้าจับวัตถุบิดไปเป็นมุม θ แคบๆ แล้วปล่อย วัตถุจะแกว่งไปแกว่งมาเนื่องจากแรงบิดของเส้นลวดที่พยายามดึงวัตถุให้กลับสู่ตำแหน่งสมดุล โดยแรงบิด (τ) ดังกล่าวจะมีค่าดังสมการ

$$\tau = -K\theta$$

เมื่อ K คือค่าคงที่ของการบิดตัวของเส้นลวด (Torsion constant) สามารถหาได้โดยใส่แรงบิดที่ทราบค่าแน่นอนและวัดมุมที่บิดไป และจากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\tau = -K\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta \tag{7.32}$$

ซึ่งได้สมการที่สอดคล้องกับสมการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกด้วยความถี่เชิงมุม $\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$ และมีคาบเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \tag{7.33}$$

และเรียกระบบการแกว่งแบบนี้ว่า “ลูกตุ้มชนิดบิด (Torsional pendulum)”

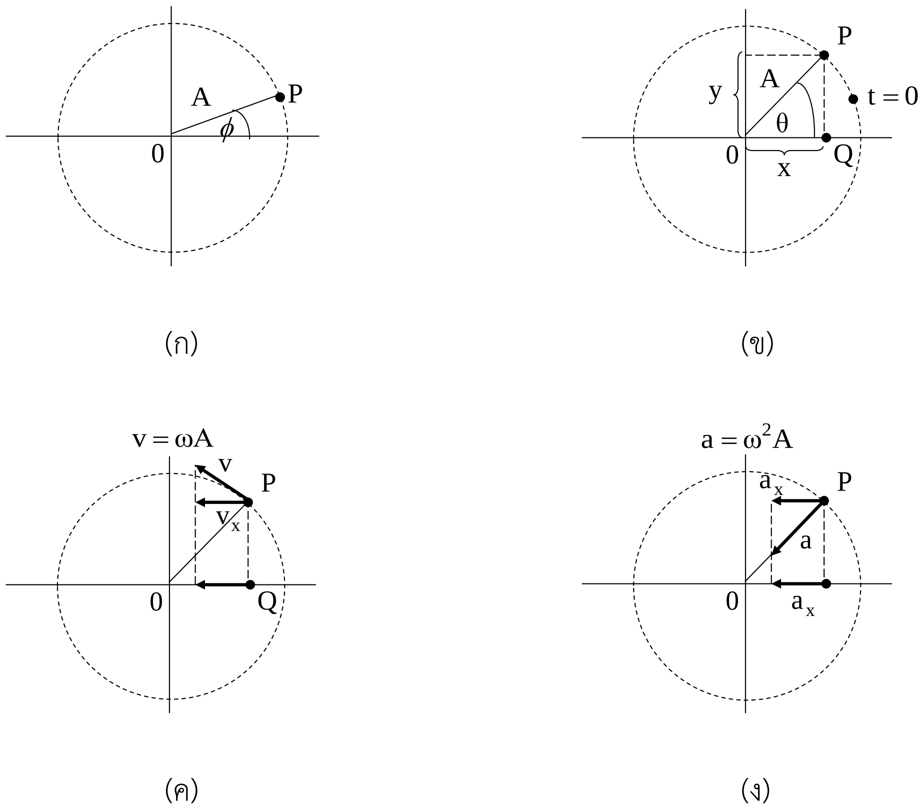
7.5 การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก และการเคลื่อนที่เป็นวงกลมสม่ำเสมอ (Simple harmonic motion and uniform circular motion)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นวงกลม ดังภาพที่ 7.11 (ก) โดยอนุภาคเคลื่อนที่รอบจุด O ด้วยรัศมี A และมีความเร็วเชิงมุมเท่ากับ ω ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่เป็นเวลา t จะทำให้เกิดมุมระหว่าง OP และแกน x เท่ากับ $\omega t + \phi$ เมื่อ ϕ คือมุมระหว่าง OP และแกน x ที่เวลาเริ่มต้น (t = 0) พบว่าระยะกระจัดเชิงมุม หรือมุมที่ OP ทำกับแกน x จะมีค่าเปลี่ยนไปที่เวลาต่างๆ ถ้าพิจารณาเงาของจุด P ที่ฉายลงบนแกน x (จุด Q) พบว่าจุด Q จะเคลื่อนที่กลับไปกลับมาระหว่าง $x = \pm A$ ซึ่งมีระยะกระจัดที่เวลาใดๆ บนแกน x ดังสมการ

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{7.34}$$

จุด Q จะเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกตามแกน x หรือกล่าวได้ว่าเงาของอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมจะเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกบนเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้นเงาของอนุภาคตามแกน y จะเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกด้วย จึงกล่าวได้ว่าการเคลื่อนที่แบบวงกลมของอนุภาคใดๆ ก็คือผลรวมของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกตามแกน x และแกน y ซึ่งมีเฟสของการเคลื่อนที่แตกต่างกัน 90° โดยคาบของการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบวงกลมจะสอดคล้องกับการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่มีระยะกระจัดอยู่ระหว่าง $x = \pm A$ ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่แบบวงกลมมีรัศมีเท่ากับแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกจะทำให้ความเร็วเชิงมุมของอนุภาคมีขนาดเท่ากับความถี่เชิงมุมของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก

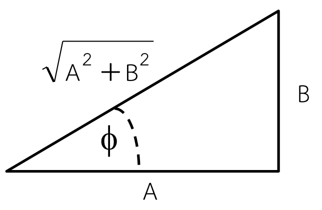
จากความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุม คือ $v = \omega r$ ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยรัศมี A จะมีความเร็วเท่ากับ $v = \omega A$ ดังนั้นจากภาพที่ 7.11 (ข) จะได้ความเร็วของอนุภาคตามแกน x เท่ากับ $A\omega\cos(\omega t + \phi)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของระยะกระจัดเทียบกับเวลา $[\frac{dx(t)}{dt}]$ นั่นเอง และความเร่งของอนุภาคบนเส้นรอบวงจะมีทิศทางพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางซึ่งมีขนาดเท่ากับ $v^2/A = \omega^2 A$ จากภาพที่ 7.11 (ง) จะได้ความเร่งในแนวแกน x เท่ากับ $-A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$ ซึ่งเป็นความเร่งของเงาหรือจุด Q ตามแกน x ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร่งของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกดังที่กล่าวมาแล้ว



ภาพที่ 7.11 การเคลื่อนที่เป็นวงกลม
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 407)

<u>ตัวอย่างที่ 7.5</u> จงแสดงว่า $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ สามารถเขียนแทนด้วย $C\cos(\omega t - \phi)$ เมื่อ $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ และ $\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$ พร้อมทั้งหาแอมพลิจูด คาบและความถี่ของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>



ภาพที่ 7.12 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 7.5

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{C}$$

$$\sin\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{B}{C}$$

$$C^2 = A^2 + B^2$$

หรือ

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

และ

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\omega t\right]$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}[\cos\phi\cos\omega t + \sin\phi\sin\omega t]$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \phi)$$

$$= C\cos(\omega t - \phi)\ ;\ 0 \le \phi \le \pi$$

แอมพลิจูด = ค่าสูงสุด

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

คาบ

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

และความถี่

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

7.6 การแกว่งแบบหน่วง (Damped oscillators)

การศึกษาการแกว่งของวัตถุหรือการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่ผ่านมาจะเป็นระบบในอุดมคติ การเคลื่อนที่ของระบบจะมีแอมพลิจูดคงที่ตลอดเวลาโดยระบบจะไม่มีแรงเสียดทานทำให้การเคลื่อนที่เป็นแบบคงตัว แต่ในธรรมชาติจะมีการสูญเสียพลังงานระหว่างการเคลื่อนที่ซึ่งเกิดจากแรงเสียดทานของอุปกรณ์และสิ่งแวดล้อม ทำให้พลังงานและแอมพลิจูดลดลงเมื่อเวลาเปลี่ยนไป โดยแรงต้านทานเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วของวัตถุนั่นคือ R = - bv เมื่อ b เป็นค่าคงที่และ v คือความเร็วของวัตถุ เพื่อให้วัตถุเคลื่อนที่แบบคงตัวจึงต้องป้อนพลังงานให้กับระบบ หรือจำเป็นต้องมีแรงชดเชยให้กับระบบอาจได้จากการหดหรือยืดตัวของสปริงโดยมีค่าเท่ากับ -kx จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$\sum F_x = -kx - bv = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (7.35)$$

การหาคำตอบจากสมการ (7.35) จำเป็นต้องอาศัยคณิตศาสตร์เข้าช่วย ซึ่งจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในที่นี้ ถ้าแรงต้านมีขนาดน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงดึงของสปริง จะได้ระยะกระจัดที่เวลาต่างๆ คือ

$$x(t) = Ae^{\frac{-bt}{2m}}\sin(\omega t + \phi) \qquad (7.36)$$

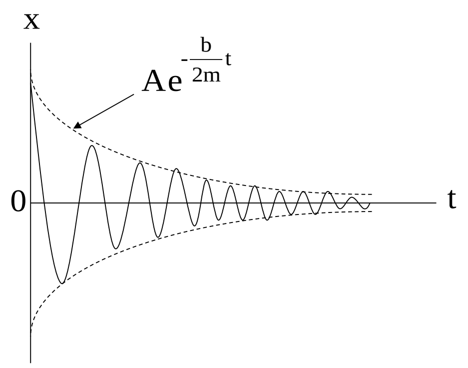
โดย b มีค่าน้อยๆ และมีความถี่เชิงมุมของการเคลื่อนที่เท่ากับ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad (7.37)$$

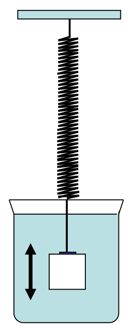
จากสมการ (7.36) จะได้ระยะกระจัดที่เวลาต่างๆ แสดงดังภาพที่ 7.13 (ก) พบว่าขนาดของแอมพลิจูดจะลดลงเรื่อยๆเมื่อเวลาผ่านไป จึงเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า การแกว่งแบบหน่วง (Damped oscillators) เช่น การแกว่งของมวลที่ติดกับสปริงหรือการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกา โดยแอมพลิจูดจะลดลงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ถ้าไม่มีพลังงานชดเชยจากแบตเตอรี่หรือขดลวดแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่จะลดลงอย่างรวดเร็ว ดังตัวอย่างการแกว่งของมวลที่ติดอยู่กับสปริง ดังภาพที่ 7.13 (ข) จากสมการ (7.37) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

เมื่อ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ เป็นความถี่เชิงมุมเมื่อไม่มีแรงหน่วง ($b = 0$) ทำให้ระบบแกว่งด้วยความถี่ธรรมชาติ (ω_0) ถ้า $b = 2m(\omega_0)$ ระบบจะไม่มีการแกว่งอีกต่อไป เรียกจุดนี้ว่า “การหน่วงวิกฤติ (Critically damped)” โดยวัตถุจะกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งสมดุลดังกราฟ b ในภาพที่ 7.14 ในกรณีที่แรงหน่วงมีค่ามากกว่าแรงชดเชยให้กับระบบ นั่นคือ $b > 2m(\omega_0)$ จะทำให้ระบบเกิดการหน่วงเกิน (Over damped) จะได้กราฟการกลับสู่สมดุลดังกราฟ c โดยการกลับสู่สมดุลจะขึ้นอยู่กับขนาดของแรงหน่วง ถ้าแรงหน่วงมีขนาดใหญ่ขึ้น เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่กลับสู่จุดสมดุลก็จะเพิ่มขึ้นตามด้วย การแกว่งแบบหน่วงจะมีพลังงานลดลงเป็นศูนย์ที่จุดสมดุลโดยพลังงานของระบบจะสูญเสียให้กับสิ่งแวดล้อมในภาพพลังงานความร้อน

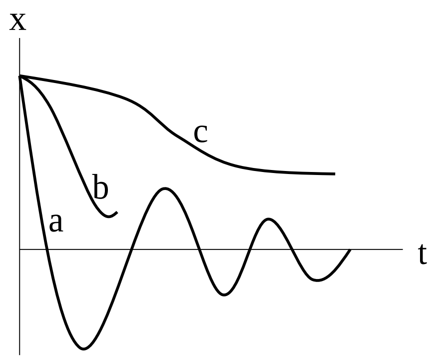


(ก)



(ข)

ภาพที่ 7.13 การเคลื่อนที่แบบหน่วง
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 409)



ภาพที่ 7.14 ระยะกระจัดของการเคลื่อนที่แบบต่างๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 409)

7.7 การแกว่งด้วยแรงบังคับ (Forced oscillators)

ในกรณีที่วัตถุมีการแกว่งแบบหน่วง โดยมีการสูญเสียพลังงานในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ ถ้ามีการป้อนแรงจากภายนอกให้กับวัตถุในทิศทางการเคลื่อนที่ จะทำให้วัตถุแกว่งด้วยแอมพลิจูดขนาดเท่าเดิม เช่น การแกว่งของชิงช้า ความสูงของการแกว่งจะลดลงเรื่อยๆ จึงจำเป็นต้องออกแรงผลักอย่างสม่ำเสมอเพื่อให้ชิงช้าแกว่งอยู่ได้ ถ้าพลังงานที่ผลักเท่ากับพลังงานสูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทานจะทำให้การแกว่งมีแอมพลิจูดที่คงที่

ถ้าแรงที่ป้อนให้กับระบบเป็นไปอย่างต่อเนื่อง โดยมีค่า $F = F_0\sin(\omega t)$ เมื่อ F_0 คือ ขนาดสูงสุดของแรงที่ป้อนให้กับระบบ และ ω เป็นความถี่เชิงมุมของการแกว่ง จากสมการ (7.35) จะได้

$$F_0\sin(\omega t) - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{7.38}$$

เมื่อพลังงานที่ป้อนให้กับระบบมีค่าเท่ากับพลังงานที่สูญเสียไประหว่างเคลื่อนที่ในแต่ละระบบ จะทำให้ระบบแกว่งด้วยแอมพลิจูดที่คงที่ ซึ่งมีระยะกระจัดที่เวลาต่างๆ คือ

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{7.39}$$

เมื่อ

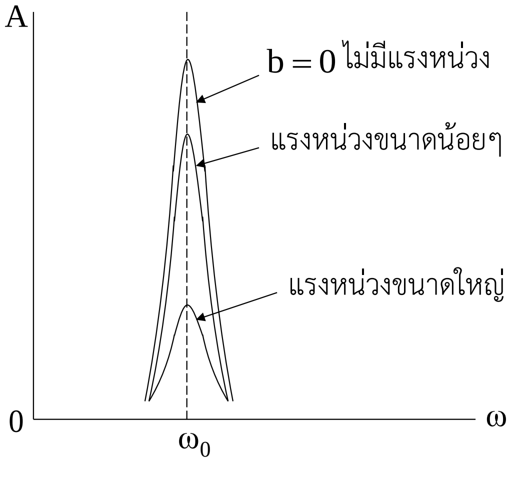
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{b\omega}{m})^2}} \tag{7.40}$$

เมื่อ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ คือความถี่เชิงมุมของการแกว่งเมื่อไม่มีแรงหน่วง (b = 0) จากสมการ (7.40) แสดงให้เห็นถึงระบบที่มีแรงภายนอกมากระทำจะแตกต่างจากการเคลื่อนที่แบบหน่วงที่กล่าวมาแล้ว โดยแรงที่ป้อนให้กับระบบจะชดเชยแรงที่หายไปเนื่องจากแรงหน่วง ถ้าระบบมีแรงหน่วงขนาดน้อยๆ จะทำให้แอมพลิจูดของการแกว่งมีขนาดใหญ่มาก เมื่อความถี่เชิงมุมของการแกว่งมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติจะทำให้การแกว่งเกิดเรโซแนนซ์ (Resonance) ขึ้น เรียกความถี่เชิงมุมที่จุดดังกล่าวว่า “ความถี่เรโซแนนซ์ (Resonance Frequency)”

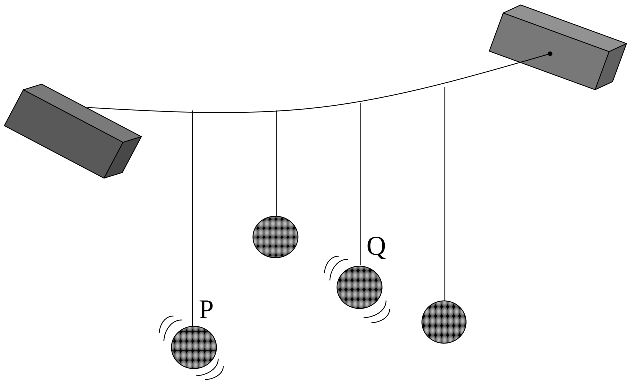
การที่ขนาดของแอมพลิจูดของการแกว่งมีขนาดใหญ่มากที่ความถี่เรโซแนนซ์ แสดงว่าพลังงานจากภายนอกถูกถ่ายทอดไปยังระบบได้สูงสุด สามารถหาความเร็วของการเคลื่อนที่จากอนุพันธ์ของระยะกระจัดเทียบกับเวลา พบว่าความเร็ว (v) ของการเคลื่อนที่จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\cos(\omega t + \phi)$ เมื่อมีแรง F จากภายนอกกระทำสอดคล้องกับเฟสของความเร็วจะทำให้เกิดงานขึ้น

เท่ากับ Fv ซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ ถ้า F และ v มีเฟสตรงกัน จะทำให้เกิดพลังงานสูงสุดถ่ายทอดไปกับระบบ และทำให้การแกว่งเกิดเรโซแนนซ์ขึ้นที่ตำแหน่งดังกล่าว ในภาพที่ 7.15 จะแสดงแอมพลิจูดของการแกว่งที่ความถี่ต่างๆ และระยะกระจัดของการแกว่งเมื่อมีและไม่มีแรงหน่วง โดยแอมพลิจูดของแกว่งจะเพิ่มขึ้นเมื่อแรงหน่วงลดลงและกราฟจะกว้างมากขึ้นเมื่อแรงหน่วงลดลงและกราฟจะกว้างมากขึ้นเมื่อแรงหน่วงมีขนาดเพิ่มขึ้น

สำหรับการแกว่งแบบคงตัวหรือการแกว่งที่มีแรงจากภายนอกเท่ากับแรงหน่วงของระบบพอดี ทำให้ระบบมีพลังงานเฉลี่ยคงที่ ถ้าระบบไม่มีแรงหน่วง (b = 0) จากสมการ (7.40) จะพบว่าแอมพลิจูดของการแกว่งมีค่าเป็นอนันต์ เมื่อความถี่ของการแกว่งเท่ากับความถี่ธรรมชาติหรือกล่าวได้ว่าระบบไม่มีการสูญเสียพลังงานให้สิ่งแวดล้อมเลย แต่มีการป้อนพลังงานให้กับระบบเท่ากับพลังงานที่ป้อนครั้งแรกโดยป้อนพลังงานให้สอดคล้องกับความเร็วของการเคลื่อนที่ แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่จะเพิ่มขึ้นอย่างไม่จำกัด แต่ในทางปฏิบัติเหตุการณ์ดังกล่าวจะไม่เกิดขึ้น เนื่องจากมีแรงหน่วงเข้ามาเกี่ยวข้องเสมอ ดังตัวอย่างการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาในภาพที่ 7.16 ประกอบด้วยลูกตุ้มหลายๆลูกที่แขวนด้วยเชือกที่มีความยาวแตกต่างกัน ถ้าลูกตุ้ม P ถูกผลักให้แกว่ง ลูกอื่นจะแกว่งตามไปด้วย ลูกตุ้ม Q ซึ่งแขวนด้วยเชือกยาวเท่ากับลูกตุ้ม P จะมีแอมพลิจูดสูงสุด หรืออาจจะพบตัวอย่างอื่นๆอีกที่เกิดเรโซแนนซ์ เช่น วงจรไฟฟ้า หรือการแกว่งของสะพานแขวน เป็นต้น



ภาพที่ 7.15 กราฟแสดงระยะกระจัดของการแกว่งที่ความถี่ต่างๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 438)



ภาพที่ 7.16 แสดงการแกว่งของลูกตุ้มนาฬิกาหลายลูก
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 411)

สรุป

การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว สมการแสดงการกระจัด ความเร็วและความเร่ง

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

กรณีของสปริง คาบการแกว่งกวัด

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ลูกตุ้มเชิงเดียว คาบการแกว่งกวัด

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ฟิสิกัลป์เพนดูลัม

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

ทอร์ชันเพนดูลัม

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

สมการการแกว่งกวัดแบบหน่วง

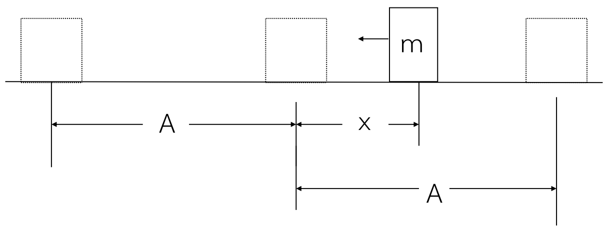
$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

แบบฝึกหัด

1. การทดสอบสปริงเส้นหนึ่งโดยออกแรงกดขนาด 10 N ทำให้ความยาวของสปริงลดลง 10 cm ถ้านำแท่งเหล็กหนัก 1 kg มาเชื่อมติดที่ปลายด้านหนึ่งของสปริงดังกล่าว ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดอยู่กับเพดานห้อง เมื่อกดสปริงให้หดสั้นจากระยะเริ่มต้นเท่ากับ 5 cm แล้วปล่อยจะทำให้สปริงแกว่งในแนวดิ่ง จงหา
   ก) ค่าคงที่ของสปริง
   ข) คาบ ความถี่ และความถี่เชิงมุมของการแกว่ง
   ค) แอมพลิจูด และเฟสเริ่มต้น
   ง) ความเร็วสูงสุด และความเร่งสูงสุดของแท่งเหล็ก
   จ) พลังงานรวมของระบบ
   ฉ) หาระยะกระจัด ความเร็ว และความเร่ง เมื่อ $\omega_0 t = \frac{\pi}{4}$

ตอบ ก) 100 N/m ข) 0.629 s, 1.59 Hz, 10 rad/s ค) 0.1, $\frac{3\pi}{2}$
ง) 1 m/s, 10 m/s^2 จ) 1 J ฉ) -0.07 m, 0.71 m/s, 7.07 m/s^2

2. จากภาพที่ 7.17 ถ้าความถี่เชิงมุมของการแกว่งเท่ากับ 2π rad/s จงหาระยะกระจัดที่เวลาต่างๆ เมื่อ x_0 = 0.5m และ v_0 = -2.5m/s



ภาพที่ 7.17 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 2

ตอบ $x(t) = (0.434)\sin(2\pi t + 1.082)$

3. ผู้เข้าชมตึกใบหยกคนหนึ่งต้องการทราบความสูงของจุดชมวิว เขาสังเกตลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่ายซึ่งปลายเชือกผูกจากจุดชมวิวดังกล่าว พบว่าคาบของการแกว่งที่พื้นชั้นล่างสุดเท่ากับ 20 s จงหา
   ก) ความสูงของจุดชมวิวของตึกใบหยก
   ข) แรงโน้มถ่วง ถ้านำลูกตุ้มนาฬิกาดังกล่าวไปไว้ที่ดวงจันทร์วัดคาบได้ 30 s

ตอบ ก) 99.4 m ข) 4.356 m/s^2

4. เมื่อนำไม้เมตรมาแขวนที่ปลายด้านหนึ่งแล้วปล่อยให้แกว่งด้วยมุมแคบๆ ถ้าไม้เมตร (L) มีมวล m จงหาคาบของการแกว่ง

ตอบ 1.64 s

5. พิจารณาการเคลื่อนที่เป็นวงกลมของวัตถุชิ้นหนึ่ง โดยมีทิศทางการเคลื่อนที่ตามเข็มนาฬิกา ด้วยรัศมี 2 m และมีความเร็วเชิงมุม 2.0 rad/s เมื่อเวลา t พบว่าเงาของวัตถุดังกล่าวมีระยะเท่ากับ 1 m ตามแนวแกน +x จงหา

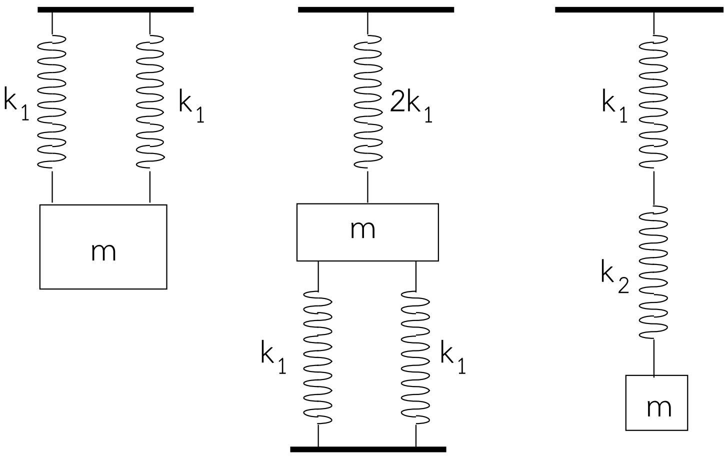
ก) ฟังก์ชันของระยะกระจัดตามแนวแกน x ที่เวลาต่างๆ

ข) ฟังก์ชันของความเร็ว และความเร่งตามแนวแกน x

ตอบ ก) $x(t) = 2.0\sin(2.0t + 0.523)$

ข) $v_x(t) = 4.0\cos(2.0t + \phi)$, $a_x(t) = -8.0\sin(2.0t + \phi)$

6. มวล m แขวนกับสปริง แสดงดังภาพที่ 7.18 ถ้าไม่คิดแรงเสียดทาน จงหาคาบของการเคลื่อนที่ของระบบ



(ก) (ข) (ค)

ภาพที่ 7.18 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 6

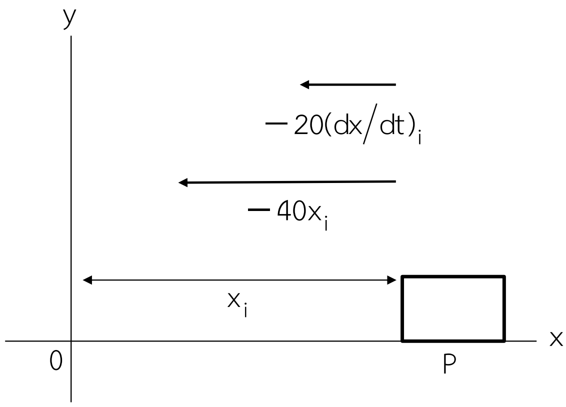
ตอบ ก) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_1}}$ ข) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k_1}}$ ค) $T = 2\pi\sqrt{m(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2})}$

7. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 6 ถ้าการกระจัดเริ่มต้นที่ 0.05 m ความเร็ว 2 m/s จงหาแอมพลิจูด มุมเฟส พลังงานรวมของการเคลื่อนที่พร้อมทั้งเขียนสมการแสดงตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลา

ตอบ แอมพลิจูด 0.206 m, มุมเฟส -1.33 rad, พลังงานรวม 4.25 J,

$x = (0.206)\sin[(10)t - 1.33]$

8. อนุภาคมวล 5 kg เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x ด้วยแรงดึงกลับของสปริงเข้าหาจุดกำเนิดขนาด 40 เท่า ของระยะทางจากจุดกำเนิด และแรงของความเสียดทานซึ่งเป็นสัดส่วนกับอัตราเร็ว เมื่ออนุภาคมีอัตราเร็ว 10 m/s ทำให้เกิดแดมพ์เท่ากับ 200 N ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งที่ระยะทาง 20 m จากจุดกำเนิด จงหา
    ก) สมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่
    ข) ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาใดๆ
    ค) แอมพลิจูด คาบ ความถี่และมุมเฟส



ภาพที่ 7.19 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 8

ตอบ ก) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+8x=0$ ข) $x=20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t-\dfrac{\pi}{4})$,

ค) คาบ π s, ความถี่ $\dfrac{1}{\pi}$ Hz, มุมเฟส $\dfrac{\pi}{4}$ rad

9. มวล 300 g ผูกติดกับสปริงแล้วเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียวด้วยคาบ 2.4 s จะมีคาบการแกว่งกวัดเท่าไร ถ้าผูกติดด้วยมวลขนาด 133 g

ตอบ 1.60 s

10. อนุภาคเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว ถ้าความเร่งที่ระยะทาง D จากตำแหน่งสมดุลเป็น A จงแสดงว่าคาบการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$T=2\pi\sqrt{\frac{D}{A}}$$

11. มวล M แขวนกับจุดปลายของสปริงแนวดิ่ง คาบการเคลื่อนที่เท่ากับ T จงแสดงว่าคาบการเคลื่อนที่จะมีค่าเป็น

$$T\sqrt{1+\frac{m}{M}}$$

12. จงพิสูจน์ว่าผลการซ้อนทับของสองฮาร์มอนิกเชิงเดียวความถี่เท่ากันในตัวกลางเดียวกัน จะได้ฮาร์มอนิกเชิงเดียวมีความถี่เดียวกัน

$$A_1\cos(\omega t-\phi_1)+A_2\cos(\omega t-\phi_2)=A\cos(\omega t-\phi)$$

เมื่อ $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_1-\phi_2)}$

และ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{A_1\sin\phi_1+A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1+A_2\cos\phi_2}$

13. อนุภาคมีประจุไฟฟ้าเบี่ยงเบนในสนามไฟฟ้าสองสนามในระนาบ xy การกระจัดของอนุภาคมีประจุไฟฟ้าที่เวลา t ใดๆ คือ

$$x=A\cos\omega t \qquad \text{และ} \qquad y=A\cos(\omega t+\phi)$$

จงหาสมการทางเดินของอนุภาคมีประจุไฟฟ้านี้ กรณีมุม $\phi=60^\circ$ และ $\phi=90^\circ$

ตอบ $x^2-xy+y^2=\frac{3}{4}A^2$ และ $x^2+y^2=A^2$

เอกสารอ้างอิง

พงษ์ศักดิ์ ชินนาบุญ และ วีระชัย ลิ้มพรชัยเจริญ. (2549). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ.

Halliday, D. , Resnick, R. , & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

________ . (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

Serway, R. A. (1996). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

________ . (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.