บทที่ 6
โมเมนตัม

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงกลโดยใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานสามารถวิเคราะห์ได้โดยไม่จำเป็นต้องทราบแรงที่กระทำต่อวัตถุ ซึ่งถือได้ว่าเป็นหลักพื้นฐานที่สำคัญมากอันหนึ่ง ในบทนี้จะศึกษากฎพื้นฐานที่สำคัญอีกกฎหนึ่งเกี่ยวกับการอนุรักษ์โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์พลังงาน หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมจะทำให้การวิเคราะห์ระบบเชิงกลสมบูรณ์ยิ่งขึ้น นอกจากนี้ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับระบบอนุภาคและอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคในระบบที่มีอนุภาคตั้งแต่สองตัวขึ้นไป

6.1 โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคเดี่ยว (The linear momentum of a particle)

กฎการเคลื่อนที่ข้อสองในหนังสือ Principia ซึ่งนิวตันใช้คำในภาษาละตินว่า Mutationem ตรงกับภาษาอังกฤษว่า Change in the quality of motion ตีความอย่างง่ายๆ ว่าเป็น ความเร่ง หรือกล่าวได้ว่า Quality of motion จะเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติในการเคลื่อนที่ซึ่งขึ้นกับมวลและความเร็วมีค่าเท่ากับ $m\vec{v}$ ดังนั้นสามารถเขียนกฎข้อสองของนิวตันได้ว่าแรงคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณ $m\vec{v}$ นั่นคือ

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

เมื่อมวล m คงที่ จะได้

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{6.1}$$

และเรียกปริมาณ $m\vec{v}$ หรือ Quality of motion ของนิวตันว่า โมเมนตัมเชิงเส้น (Linear momentum, $\vec{P}$) ของอนุภาค และเขียนเป็น

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{6.2}$$

และสามารถเขียนกฎข้อสองของนิวตันในเทอมของโมเมนตัมเชิงเส้นได้

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{6.3}$$

มีหน่วยในระบบ SI เป็น kg.m/s

บางเหตุการณ์มีแรงกระทำบนวัตถุหรืออนุภาคในช่วงเวลาสั้นๆ เช่นการตีลูกเทนนิสหรือตีกอล์ฟ พบว่าลูกเทนนิสจะกระทบกับแร็คเก็ตหรือไม้ตีกอล์ฟกระทบกับลูกกอล์ฟในช่วงเวลาสั้น จะเรียกแรงที่กระทำในช่วงเวลาสั้นๆนี้ว่า แรงดล (Impulsive force) และเรียกปริมาณที่เป็นผลจากแรงดลว่า การดล (Impulse) ในที่นี้จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{I}$

จากสมการ (6.3) สามารถเขียนได้

$$\vec{F}dt = d\vec{P}$$

ถ้าให้ t_1 เป็นเวลาที่เริ่มมีการกระทำต่อวัตถุ และ t_2 เป็นเวลาที่เสร็จสิ้นการกระทำของแรงจะได้การดลคือ

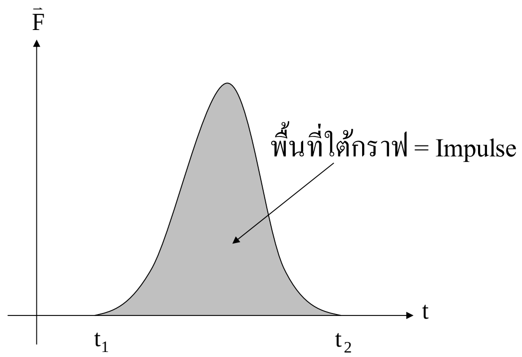
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \qquad (6.4)$$

การดลเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้นสมการ (6.4) จึงเป็นสมการเวกเตอร์ด้วย

สำหรับแรงเฉลี่ยที่เกิดจากแรงดลกระทำบนวัตถุในช่วงเวลาสั้นๆระหว่าง t_1 ถึง t_2 กำหนดได้เป็น

$$\vec{F}_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \qquad (6.5)$$

และมีกราฟของการดลแสดงดังภาพที่ 6.1



ภาพที่ 6.1 พื้นที่ใต้กราฟระหว่างแรงดลกับเวลา
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 256)

ตัวอย่างที่ 6.1 ลูกบอลมวล 0.25 kg กำลังเคลื่อนที่ไปทางทิศ +x ด้วยอัตราเร็ว 13 m/s เมื่อลูกบอลถูกตีด้วยไม้ตี ความเร็วสุดท้ายของลูกบอล คือ 19 m/s ในทิศ –x ไม้ตีกระทำต่อลูกบอลเป็นเวลานาน 0.010 s จงหาแรงเฉลี่ย F ที่ไม้ตีกระทำต่อลูกบอล

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า v_i = 13 m/s และ v_f = -19 m/s เมื่อเลือกให้ทิศการเคลื่อนที่เดิมเป็นทิศบวก จากสมการของการดลจะได้ว่า

$$F\Delta t = mv_f - mv_i$$
$$F(0.010) = (0.25)(-19) - (0.25)(13)$$

ซึ่งให้ F = -0.80 kN

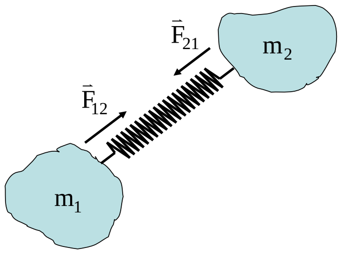
ตัวอย่างที่ 6.2 ก้อนอิฐ 2.0 kg กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 6.0 m/s จะต้องใช้แรง F ขนาดเท่าไร ในการหยุดก้อนอิฐในเวลา 7×10^{-4} s

วิธีทำ การดลต่อก้อนอิฐ = โมเมนตัมที่เปลี่ยนไปของก้อนอิฐ

$$F\Delta t = mv_f - mv_i$$
$$F(7.0\times10^{-4}) = 0 - (2.0)(6.0)$$

ซึ่งจะให้ F = -1.7×10^{4} N โดยเครื่องหมายลบบ่งชี้ว่า แรงนี้ต้านการเคลื่อนที่

6.2 อันตรกิริยาของระบบ 2 อนุภาค (The two - particle interacting system)



ภาพที่ 6.2 ระบบอิสระของมวลที่ยึดกันไว้ด้วยสปริงเบา
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 262)

การศึกษาการชนกันของอนุภาคในหนึ่งและสองมิติสามารถพิจารณาได้จากอนุภาคมวล m_1 และ m_2 ที่มีอันตรกิริยาซึ่งกันและกันในระบบอิสระ เช่น การยึดมวลทั้งสองด้วยสปริงเบาและนำไปวางไว้ในที่ซึ่งปราศจากการรบกวนจากแรงใดๆ ดังภาพที่ 6.2 เมื่อมวลทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากกันจะมีแรงเข้ามาเกี่ยวข้องคือแรง $\vec{F}_{12}$ ซึ่งเป็นแรงที่มวล m_2 กระทำกับมวล m_1 และแรง $\vec{F}_{21}$ เป็นแรงที่มวล m_1 กระทำกับมวล m_2 จากกฎข้อสามของนิวตันจะได้

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

และจากกฎข้อสองของนิวตัน สามารถเขียนแรงได้เป็น

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} \text{ และ } \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

ดังนั้น

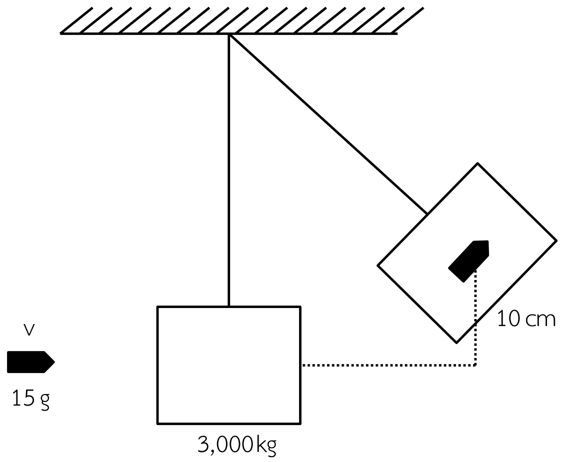
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0$$

แสดงว่า

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{constant} \qquad (6.6)$$

เนื่องจากมีแรงอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคทั้งสองทำให้โมเมนตัมเชิงเส้นย่อย $\vec{P}_1$ และ $\vec{P}_2$ อาจเปลี่ยนแปลงไปกับเวลา แต่โมเมนตัมเชิงเส้นสุทธิของระบบคือ $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ จะมีค่าคงที่ นั่นคือโมเมนตัมสุทธิไม่ขึ้นกับเวลาซึ่งเรียกว่า “การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอิสระ” ซึ่งสรุปได้ว่าในระบบอิสระอ้างอิงเฉื่อยใดๆ โมเมนตัมเชิงเส้นที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างอนุภาคในระบบอิสระเป็นปริมาณอนุรักษ์ กล่าวคือ โมเมนตัมสุทธิเป็นค่าคงที่ของการเคลื่อนที่

<u>ตัวอย่างที่ 6.3</u> จากภาพที่ 6.3 แสดงให้เห็นว่า ลูกกระสุนปืนมวล 15 g ถูกยิงในแนวระดับเข้าไปในแท่งไม้มวล 3.000 kg ซึ่งแขวนไว้กับเชือกยาว ลูกปืนฝังอยู่ในแท่งไม้ จงคำนวณอัตราเร็วของลูกปืนถ้าการชนทำให้แท่งไม้แกว่งขึ้นไปสูง 10 cm เหนือระดับเดิม



ภาพที่ 6.3 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.3

วิธีทำ พิจารณาการชนระหว่างไม้และลูกปืน ในระหว่างการชนพบว่าโมเมนตัมคงตัว ดังนั้น

โมเมนตัมก่อนการชนพอดี = โมเมนตัมหลังการชนพอดี

$$(0.015)v + 0 = (3.015)\,V$$

โดยที่ v คือ อัตราเร็วเดิมของลูกปืน

และ V คือ อัตราเร็วของแท่งไม้และลูกปืนหลังการชน

ในการหาอีกสมการหนึ่งจะใช้ความรู้ที่ว่า แท่งไม้แกว่งขึ้นไปสูง 10 cm ถ้ากำหนดให้ที่ระดับเดิมของแท่งไม้ $E_p = 0$ และจากหลักการอนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า

E_k หลังการชนทันที = E_p สุดท้าย

$$\frac{1}{2}(3.015)v^2 = (3.015)(9.81)(0.10)$$

ซึ่งจะได้ว่า v = 1.40 m/s เมื่อแทนค่าลงในสมการก่อนหน้า จะให้ v = 0.28 km/s เป็นอัตราเร็วของลูกปืน สังเกตว่าจะไม่สามารถใช้สมการการคงตัวของพลังงาน คือ $\frac{1}{2}mv^2 = (m + M)\,gh$ ได้ โดยที่ m = 0.015 kg และ M = 3.000 kg ได้ เพราะมีการสูญเสียพลังงานโดยแรงเสียดทานในกระบวนการชน

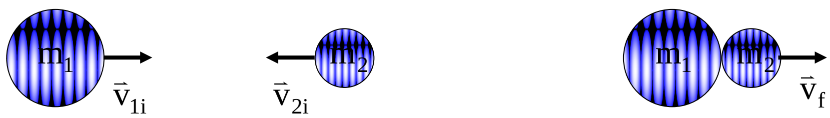
การชนกันเป็นอันตรกิริยาที่สำคัญมากในทางฟิสิกส์ ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาในระดับจุลภาค เช่น การชนกันของอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้า หรือในระดับมหภาคเช่นการชนกันของรถยนต์ เป็นต้น การชนเป็นอันตรกิริยาที่วัตถุทั้งสองออกแรงกระทำซึ่งกันและกันในช่วงเวลาสั้นๆ จึงไม่จำเป็นที่วัตถุทั้งสองจะต้องสัมผัสกัน เช่น อนุภาคอัลฟามีประจุบวกชนกับนิวเคลียสของอะตอมซึ่งมีประจุบวกเช่นกัน กรณีเช่นนี้อนุภาคอัลฟาจะไม่สัมผัสกับนิวเคลียสของอะตอมเลย ดังภาพที่ 6.4 เมื่อทั้งสองเคลื่อนที่เข้าใกล้กันจะเกิดแรงไฟฟ้ากระทำซึ่งกันและกัน การชนจึงเป็นคำที่ใช้แสดงเหตุการณ์ที่อนุภาคเข้ามาใกล้

กันที่สุดในช่วงเวลาสั้นๆและทำให้เกิดแรงดลระหว่างกันและกันขึ้น โดยแรงดลที่เกิดขึ้นนี้จะมีขนาดใหญ่กว่าแรงภายนอกซึ่งทำให้อนุภาคทั้งสองชนกัน

(ก) การชนระหว่างอนุภาคที่ไม่มีประจุ (ข) การชนระหว่างอนุภาคที่มีประจุ

ภาพที่ 6.4 แสดงลักษณะของการชน
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 235)

การชนของอนุภาคหรือวัตถุสามารถแบ่งได้โดยการเปรียบเทียบพลังงานจลน์ของวัตถุ ถ้าชนแล้วไม่มีการสูญเสียพลังงานจลน์ นั่นคือพลังงานจลน์ก่อนชน (E_{ki}) เท่ากับพลังงานจลน์หลังชน (E_{kf}) และเรียกการชนแบบนี้ว่า การชนแบบยืดหยุ่น (Elastic collision) แต่ถ้าพลังงานจลน์ภายหลังชนน้อยกว่าก่อนชนแล้วจะเรียกว่า การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic Collision) ส่วนกรณีที่ภายหลังชนแล้วพลังงานจลน์ก่อนชนถูกดูดกลืนและเปลี่ยนไปเป็นพลังงานในภาพอื่นจนหมดจะเรียกการชนแบบนี้ว่า การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ เช่น การชนกันของวัตถุขนาดใหญ่ๆ ส่วนการชนกันของลูกสนุ๊กนั้นถือว่าเกือบเป็นการชนแบบยืดหยุ่น



ภาพที่ 6.5 แสดงการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ในหนึ่งมิติ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 235)

พิจารณาอนุภาคมวล m_1 และ m_2 มีความเร็วเริ่มต้นเป็น $\vec{v}_{1i}$ และ $\vec{v}_{2i}$ ตามลำดับ ถ้าอนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่ในแนวเดียวกันและชนกันแบบประสานงาดังภาพที่ 6.5 และหลังชนอนุภาคทั้ง

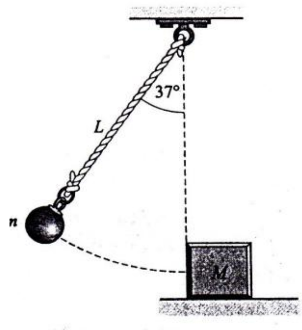
สองติดกันและเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกับอนุภาคตัวที่หนึ่งด้วยเร็วเท่ากับ $\vec{v}_f$ เมื่อโมเมนตัม ของระบบเป็นปริมาณอนุรักษ์ ทำให้โมเมนตัมก่อนชอนเท่ากับโมเมนตัมหลังชนดังนั้น

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

จะได้ความเร็วหลังชนคือ

$$\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{6.7}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6.4</u> นาฬิกาลูกตุ้มซึ่งประกอบด้วยลูกบอลมวล m ถูกปล่อยให้เคลื่อนที่จากตำแหน่งที่แสดงในภาพที่ 6.6 และชนก้อนวัตถุมวล M ก้อนวัตถุไถลไปเป็นระยะทาง D ก่อนหยุดนิ่งภายใต้ การกระทำของแรงเสียดทานคงตัวขนาด 0.20 Mg จงหาระยะ D ถ้าลูกบอลกระดอนกลับขึ้นไปถึงตำแหน่งที่ทำมุม 20°



ภาพที่ 6.6 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.4

<u>วิธีทำ</u> ลูกตุ้มนาฬิกาตกลงมาเป็นระยะความสูง $(L - L\cos 37^\circ) = 0.201\ L$ และกระดอนกลับไปที่ความสูง $(L - L\cos 20^\circ) = 0.0603\ L$

เนื่องจากสำหรับลูกบอล

$$(mgh)_{\text{บน}} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{ล่าง}}$$

อัตราส่วนของลูกบอลที่จุดล่าง จึงมีค่า

$$v = \sqrt{2gh}$$

แม้ว่าพลังงานจลน์จะไม่คงตัวในการชนกัน แต่ว่าโมเมนตัมคงตัว ดังนั้นสำหรับการชนนี้จึงได้ว่า

โมเมนตัมก่อนชนพอดี = โมเมนตัมหลังชนพอดี

$$m\sqrt{2g(0.201L)} + 0 = -m\sqrt{2g(0.0603L)} + MV$$

โดยที่ V คือ ความเร็วของก้อนวัตถุหลังการชนพอดี (สังเกตเครื่องหมายลบที่โมเมนตัมของลูกบอลที่กระดอนกลับ) เมื่อแก้สมการข้างบน จะได้ว่า

$$V = \frac{m}{M}0.981\sqrt{gL}$$

ก้อนวัตถุใช้พลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งในการทำงานต้านแรงเสียดทาน ในขณะที่มันเลื่อนไถลไปเป็นระยะทาง D
ดังนั้น

$$\frac{1}{2}MV^2 = F_f D$$

หรือ

$$\frac{1}{2}M(0.963gL)\left(\frac{m}{M}\right)^2 = (0.20Mg)(D)$$

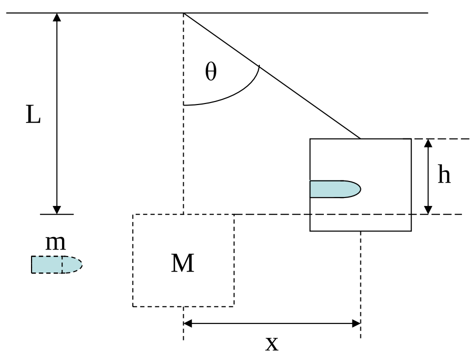
ซึ่งให้

$$D = 2.4\,(m/M)^2\,L$$

<u>ตัวอย่างที่ 6.5</u> The ballistic pendulum ลูกปืนมวล m มีความเร็ว $\vec{v}_{1i}$ เข้าชนมวล M ที่แขวนไว้ด้วยเชือกยาว L หลังการชนปรากฏว่าลูกปืนฝังอยู่ในมวล M และทำให้ระบบแกว่งขึ้นไปยังตำแหน่งที่สูงขึ้นไป h ดังภาพที่ 6.7 จงหา

(ก) ความเร็วและพลังงานจลน์ของระบบภายหลังชน

(ข) ความเร็วของลูกปืนก่อนชน



ภาพที่ 6.7 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.5

วิธีทำ ก) เมื่อลูกปืนวิ่งชนแล้วฝังอยู่ในมวลดังกล่าวพบว่า พลังงานจลน์ของระบบจะเปลี่ยนไปเป็นพลังงานศักย์

$$\frac{1}{2}(m+M)v_f^2 = (m+M)gh$$
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ภายหลังการชน คือ

$$E_{kf} = \frac{1}{2}(m+M)(\sqrt{2hg})^2$$
$$= (m + M)gh$$

ข) ความเร็วของลูกปืนก่อนชน หาได้จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$m_1v_{1i} + 0 = (m + M)v_f$$
$$v_{1i} = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$$

ในกรณีที่ h มีค่าน้อยๆเมื่อเทียบกับ x และ L แล้ว สามารถเขียนความเร็วสุดท้ายของระบบให้อยู่ในเทอมของ x และ L ได้โดยทฤษฎีของปิธากอรัส ดังนี้

จากภาพที่ 6.7 จะได้

$$L^2 = x^2 + (L - h)^2 = x^2 + L^2 - 2hL + h^2$$

ในกรณีที่ $h << x, L$ ทำให้ $h^2 \rightarrow 0$ ดังนั้น

$$2h \approx x^2/L$$

จะได้

$$v_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{gx^2/L} \approx x\sqrt{\frac{g}{L}}$$

ภาพที่ 6.8 แสดงการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ของวัตถุ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 236)

เมื่อพิจารณาอนุภาคสองตัวที่มีการชนกันแบบประสานงาและเป็นการชนแบบยืดหยุ่นดังภาพที่ 6.8 ถ้าอนุภาคมวล m_1 ไถลด้วยความเร็ว $\vec{v}_{1i}$ ในแนวราบเข้าชนอีกอนุภาคหนึ่งมวล m_2 มีความเร็ว $\vec{v}_{2i}$ เมื่อการชนแบบยืดหยุ่นและพื้นไม่มีความฝืด ทำให้ภายหลังชนมวล m_1 มีความเร็วเป็น $\vec{v}_{1f}$ และมวล m_2 มีความเร็วเป็น $\vec{v}_{2f}$ จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \tag{6.8}$$

เมื่อการชนเป็นแบบยืดหยุ่น พลังงานจลน์จะคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \tag{6.9}$$

จากสมการ (6.8) และ (6.9) จะได้

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_{1i} + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)}v_{2i} \tag{6.10}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_{1i} + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}v_{2i} \tag{6.11}$$

และจากสมการ (6.10) และ (6.11) พบว่า

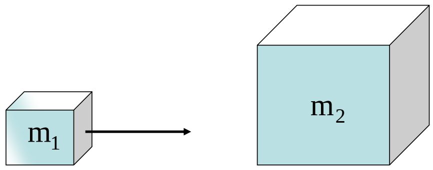
1) เมื่อ $m_1 = m_2$ ทำให้ $v_{1f} = v_{2i}$ และ $v_{2f} = v_{1i}$ นั่นคืออนุภาคจะแลกเปลี่ยนความเร็วซึ่งกันและกัน

2) เมื่อ $m_1 \neq m_2$ และ $v_{2i} = 0$ จะได้ว่า

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)}v_{1i}$$

3) เมื่อ $m_1 >> m_2$ และ $v_{2i} = 0$ จะได้ $v_{1f} \approx v_{1i}$ และ $v_{2f} \approx v_{2i}$

<u>ตัวอย่างที่ 6.6</u> กล่องมวล m_1 เคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร็ว u_1 เข้าชนกล่องมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่ง จงหาความเร็วของกล่องทั้งสองภายหลังชน เมื่อการชนเป็นแบบยืดหยุ่นและพื้นไม่มีความฝืด



ภาพที่ 6.9 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.6

<u>วิธีทำ</u> ถ้าหลังชนกล่องมวล m_1 มีความเร็วเป็น v_1 และมวล m_2 มีความเร็วเป็น v_2 จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมจะได้

$$m_1u_1 + 0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2v_2 \qquad (ก)$$

เนื่องจากเป็นการชนแบบยืดหยุ่น จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2v_2^2$$

อาศัยเอกลักษณ์ทางพีชคณิต $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ สามารถเขียนสมการได้ใหม่เป็น

$$m_1(u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = m_2v_2^2 \qquad (ข)$$

เมื่อหารสมการ (ข) ด้วยสมการ (ก) จะได้

$$u_1 + v_1 = v_2 \qquad (ค)$$

แทนค่า v_2 ในสมการ (ก) จะได้

$$m_1u_1 = m_1v_1 + m_2(u_1 + v_1)$$
$$(m_1 - m_2)u_1 = (m_1 + m_2)v_1$$

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} u_1 \qquad (ง)$$

และเมื่อแทน v_1 ลงในสมการ (ค) จะได้

$$v_2 = u_1 + \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} u_1$$

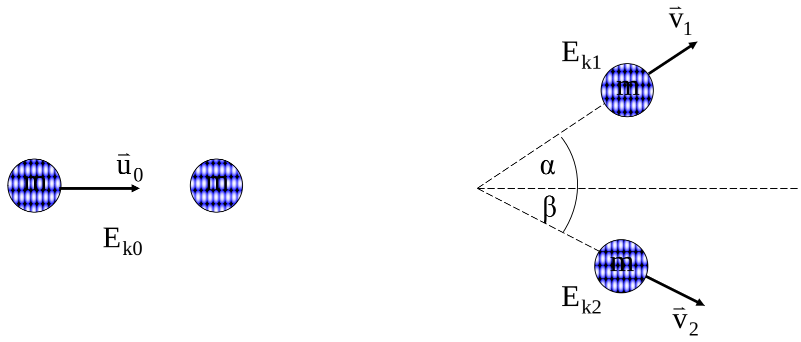
$$v_2 = (1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}) u_1$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} u_1 \qquad (จ)$$

จากสมการ (ง) และ (จ) สามารถสรุปได้ดังนี้

1. ถ้า $m_1 = m_2$ ทำให้ $v_1 = 0$ และ $v_2 = u_1$ แสดงว่าหลังชนมวล m_1 จะหยุดนิ่ง ส่วนมวล m_2 จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่ากับความเร็วก่อนชนของมวล m_1 หรือกล่าวได้ว่า มวล m_1 จะถ่ายพลังงานทั้งหมดให้กับมวล m_2
2. ถ้า $m_1 > m_2$ จะได้ $v_1 > 0$ ทำให้มวลทั้งสองเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกับ u_1
3. ถ้า $m_1 > m_2$ จะได้ $v_1 < 0$ แสดงว่าหลังชนมวล m_1 จะสะท้อนกลับ ทำให้การเคลื่อนที่มีทิศตรงข้ามกับก่อนชน
4. ถ้า $m_1 << m_2$ แล้ว ภายหลังชนมวล m_2 จะหยุดนิ่ง ส่วนมวล m_1 จะสะท้อนกลัป์มีความเร็วเท่ากับก่อนชน หรือ $u_1 \approx - u_1$

<u>ตัวอย่างที่ 6.7</u> มวลสองอันมีขนาดและมวลเท่ากันวางอยู่บนพื้นลื่น ขณะเริ่มต้นมวลอันหนึ่งอยู่นิ่งและมวลอีกก้อนหนึ่งวิ่งเข้ามาชนด้วยความเร็ว u_0 ภายหลังชนมวลทั้งสองจะเคลื่อนที่แยกออกจากกันโดยมวลอันแรกเคลื่อนที่ในทิศที่ทำมุม α กับแนวเดิม ส่วนมวลอีกอันหนึ่งเคลื่อนที่ทำมุม β ดังภาพที่ 6.10 ถ้าการชนเป็นการชนแบบยืดหยุ่น จงหาพลังงานจลน์ของมวลอันแรกก่อนและหลังชน



(ก) ก่อนชน (ข) หลังชน

ภาพที่ 6.10 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.7

<u>วิธีทำ</u> จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม จะได้

$$m\vec{u}_0 + 0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

หรือ

$$u_0 = v_1 + v_2 \qquad (ก)$$

และสำหรับองค์ประกอบของโมเมนตัมในแนวราบ คือ

$$mu_0 + 0 = mv_1\cos(\alpha) + mv_2\cos(\beta)$$

หรือ

$$v_2\cos(\beta) = u_0 - v_1\cos(\alpha) \qquad (ข)$$

และองค์ประกอบของโมเมนตัมในแนวดิ่ง เท่ากับ

$$0 = mv_1\sin(\alpha) + mv_2\sin(\beta)$$

หรือ

$$mv_2\sin(\beta) = mv_1\sin(\alpha) \qquad (ค)$$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้

$$\frac{1}{2}mu_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

หรือ

$$u_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (ง)$$

เมื่อยกกำลังสองสมการ (ข) และ (ค) จะได้

$$v_2^2\cos^2(\beta) = u_0^2 + v_1^2\cos^2(\alpha) - 2u_0v_1\cos(\alpha) \qquad (จ)$$

และ

$$v_2^2\sin^2(\beta) = v_1^2\sin^2(\alpha) \quad \text{(ฉ)}$$

เมื่อบวกสมการ (จ) และสมการ (ฉ) จะได้

$$v_2^2\cos^2(\beta) + v_2^2\sin^2(\beta) = u_0^2 + v_1^2\cos^2(\alpha) - 2u_0v_1\cos(\alpha) + v_1^2\sin^2(\alpha)$$

$$v_2^2 = u_0^2 - 2u_0v_1\cos(\alpha) + v_1^2 \quad \text{(ช)}$$

จากสมการ (ง) เมื่อแทนค่า $v_2^2 = u_0^2 - v_1^2$ ลงในสมการ (ช) จะได้

$$u_0^2 - v_1^2 = u_0^2 - 2u_0v_1\cos(\alpha) + v_1^2$$

$$2v_1^2 = 2u_0v_1\cos(\alpha)$$

$$v_1 = u_0\cos(\alpha) \quad \text{(ซ)}$$

เมื่อยกกำลังสองสมการ (ซ) แล้วคูณด้วย $\frac{m}{2}$ จะได้

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_0^2\cos^2(\alpha)$$

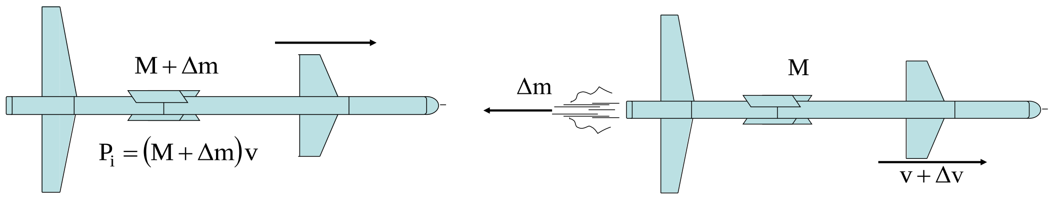
หรือ

$$E_{k1} = E_{k0}\cos^2(\alpha) \quad \text{(ฌ)}$$

เมื่อ E_{ko}, E_{k1} เป็นพลังงานจลน์ก่อนและหลังชนของมวลอันแรก

6.3 การเคลื่อนที่ของระบบที่มวลเปลี่ยนแปลง (Motion of variable mass)

ตัวอย่างของระบบที่มวลมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาในขณะเคลื่อนที่คือจรวดซึ่งมีการสูญเสียเชื้อเพลิงในขณะเผาไหม้ตลอดเวลาเราสามารถวิเคราะห์แรงขับดันของจรวดได้ด้วยหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมคล้ายกับการวิเคราะห์การยิงปืนใหญ่ที่ติดอยู่บนรถไฟหรือรถยนต์ ในขณะยิงลูกปืนจะได้รับโมเมนตัมปริมาณหนึ่งแล้ววิ่งออกจากปากกระบอกปืน ส่วนปืนและรถจะได้รับโมเมนตัมขนาดที่เท่าๆกันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามถ้าไม่มีแรงเสียดทานระหว่างพื้นและล้อรถ จะทำให้รถดังกล่าวเคลื่อนที่ได้



(ก) (ข)

ภาพที่ 6.11 (ก) มวลเริ่มต้นของจรวดเป็น M + Δm ที่เวลา t และมีอัตราเร็ว v

(ข) เมื่อเวลาผ่านไป Δt มวลของจรวดลดลงเป็น M

ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 278)

ในทำนองเดียวกันสำหรับจรวดที่เคลื่อนที่ในระบบอิสระ โมเมนตัมของจรวดจะเปลี่ยนไป เนื่องจากมวลของจรวดลดลงเพราะเกิดการเผาไหม้ของเชื้อเพลิงเป็นไอพ่นออกมาซึ่งมีโมเมนตัมปริมาณหนึ่ง ทำให้ตัวจรวดได้รับโมเมนตัมขนาดเท่ากับโมเมนตัมของไอพ่นดังกล่าวแต่มีทิศทางตรงกันข้าม ซึ่งเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม จรวดจึงมีการเคลื่อนที่ไปในทิศทางตรงข้ามกับไอพ่น สมมติให้ขณะเวลา t ใดๆ โมเมนตัมของจรวดและเชื้อเพลิงเท่ากับ (M + Δm)v ดังภาพที่ 6.11 (ก) หลังจากเวลาผ่านไปเป็น t + Δt จรวดสูญเสียมวลไป Δm ทำให้จรวดมีความเร็วเพิ่มขึ้นเป็น v + Δv ดังภาพที่ 6.11 (ข) ถ้าไอพ่นมีความเร็ว v_e เมื่อเทียบกับจรวดหรือมีความเร็ว v - v_e เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมพบว่า

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

นั่นคือ

$$M\Delta v = \Delta m(v_e)$$

เมื่อช่วงเวลา $\Delta t \to 0$ จะได้ $\Delta v \to dv$ และ $\Delta m \to dm$ และมวลของไอพ่นจะเท่ากับมวลของจรวดที่สูญเสียไป นั่นคือ dm = -dM จะได้ความสัมพันธ์ใหม่เป็น

$$Mdv = -\,v_e dM \qquad (6.12ก)$$

เมื่อหารด้วย dt จะได้

$$F = M\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dM}{dt} \qquad (6.12ข)$$

ซึ่งเรียกขนาดของ $\left|v_e \frac{dM}{dt}\right|$ ว่า แรงขับดันจรวด (Thrust of the rocket) ซึ่งมีมิติเหมือนกับแรง

จากสมการ (6.12ก) สามารถหาความเร็วที่เปลี่ยนไปของจรวดได้ ถ้า M_i เป็นมวลเริ่มต้นของจรวดและเชื้อเพลิง เมื่อเวลาผ่านไปแล้วมวลลดลงเหลือ M_f ทำให้จรวดมีความเร็วเปลี่ยนจาก v_i เป็น v_f จะได้

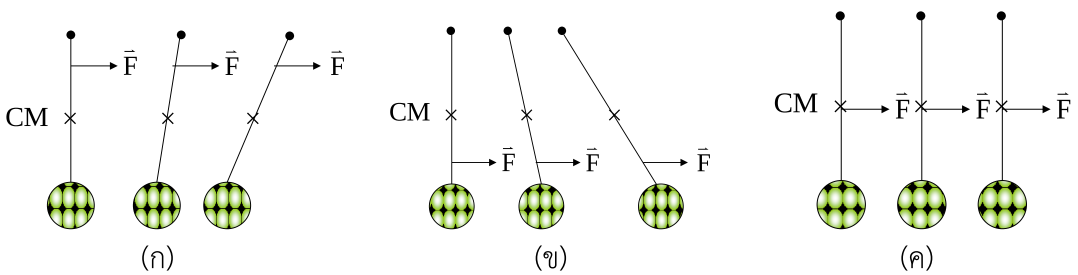
$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$\begin{aligned} v_f - v_i = -v_e \ln(M)\Big|_{M_i}^{M_f} &= -v_e[\ln(M_f) - \ln(M_i)] \\ &= v_e[\ln(M_i) - \ln(M_f)] \\ &= v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \end{aligned} \tag{6.13}$$

เรียกสมการ (6.13) ว่า Tsiolkovskii formula โดยความเร็วที่เปลี่ยนไปของจรวดจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วของไอพ่นซึ่งมีอัตราเร็วที่สูงมากและขึ้นอยู่กับ $\ln(\frac{M_i}{M_f})$ อัตราส่วนนี้จะมีค่ามากแสดงว่ามวลของจรวดที่ไม่มีเชื้อเพลิงจะมีขนาดน้อยๆหรือจรวดต้องบรรจุเชื้อเพลิงเป็นจำนวนมากนั่นเอง

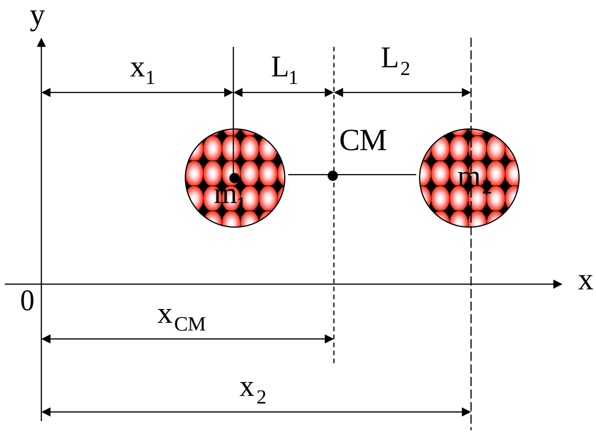
6.4 จุดศูนย์กลางมวล (Center of mass)

การศึกษาที่ผ่านมาได้กล่าวถึงเฉพาะกรณีการเคลื่อนที่ของมวลที่มีลักษณะเป็นอนุภาคเดี่ยวซึ่งถือว่าไม่มีขนาดแต่ในความเป็นจริงทั่วๆไปมวลจะมีขนาดเสมอและประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคตั้งแต่สองตัวขึ้นไปหรือเรียกว่า ระบบอนุภาค (System of particle) โดยทุกๆอนุภาคที่ประกอบขึ้นเป็นระบบจะเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับจุดคงที่จุดหนึ่งซึ่งเรียกว่า จุดศูนย์กลางมวล (Center of mass; CM) ของระบบ ดังนั้นเมื่อกล่าวถึงการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง (Translation motion) ของมวลหรือระบบใดๆ จะหมายถึง การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลนั่นเอง หรือกล่าวได้ว่าจุดศูนย์กลางมวลเป็นเสมือนจุดที่เป็นตัวแทนของระบบหรือมวงทั้งก้อน การศึกษาระบบอนุภาคจึงควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับจุดศูนย์กลางมวลก่อน



ภาพที่ 6.12 แสดงการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 269)

พิจารณาระบบที่ประกอบด้วยมวล m_1 และ m_2 ที่เชื่อมกันด้วยลวดเบา ถ้าให้แรงกระทำกับระบบที่จุดใดๆ ตามภาพที่ 6.12 (ก) และ 6.12 (ข) จะทำให้ระบบเกิดการหมุนขึ้น แต่ถ้าให้แรงกระทำที่จุดศูนย์กลางมวลดังภาพที่ 6.12 (ค) ระบบจะเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้นโดยไม่มีการหมุน



ภาพที่ 6.13 ระบบอนุภาคเมื่อวางตัวในแนวแกน x
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, D., 2007, หน้า 270)

พิจารณาภาพที่ 6.13 ถ้ามวล m_1 และมวล m_2 อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลเป็นระยะ L_1, L_2 ตามลำดับ จากหลักของโมเมนตัมเมื่อระบบสมดุลจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง L_1, L_2 เทียบกับจุดศูนย์กลางมวลเป็น

$$m_1gL_1 = m_2gL_2$$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \text{หรือ} \qquad m_1L_1 = m_2L_2 \tag{6.14}$$

ถ้าพิจารณาระบบโดยอ้างอิงกับจุด 0 ใดๆ ดังภาพที่ 6.13 สามารถหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลได้เมื่อ

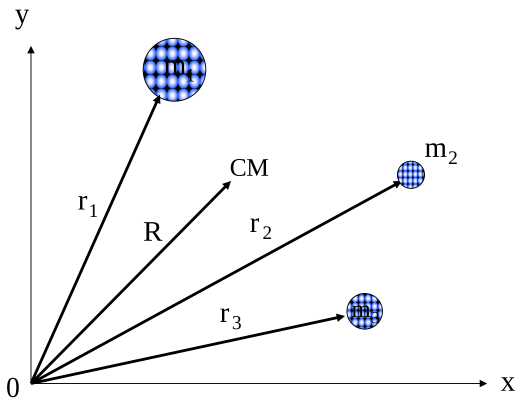
$$L_1 = x_{CM} - x_1 \qquad \text{และ} \qquad L_2 = x_2 - x_{CM}$$

จากความสัมพันธ์ตามสมการ (6.14) จะได้

$$m_1(x_{CM} - x_1) = m_2(x_2 - x_{CM})$$

นั่นคือ

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.15)$$



ภาพที่ 6.14 แสดงตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, 2007, หน้า 270)

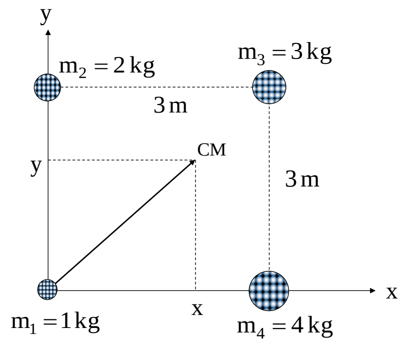
ถ้าระบบประกอบด้วยมวล m_1, m_2,...., m_n โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ ตามลำดับ ดังภาพที่ 6.14 สามารถหาเวกเตอร์หรือตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบได้เป็น

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \qquad (6.16)$$

เมื่อ $M = \sum_i m_i$ และองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{R}$ ได้จาก

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \,, Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \,, Z = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad (6.17)$$

<u>ตัวอย่างที่ 6.8</u> จงหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของระบบดังภาพที่ 6.15



ภาพที่ 6.15 ภาพประกอบสำหรับตัวอย่างที่ 6.8

วิธีทำ เนื่องจากเป็นระบบสองมิติจึงหาเฉพาะองค์ประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่งในแกน X และ Y จะได้

$$X = \frac{[(1)(0) + (2)(0) + (3)(3) + (4)(3)]}{10} = 2.1\,m$$

$$Y = \frac{[(1)(0) + (2)(3) + (3)(3) + (4)(0)}{10} = 1.5\,m$$

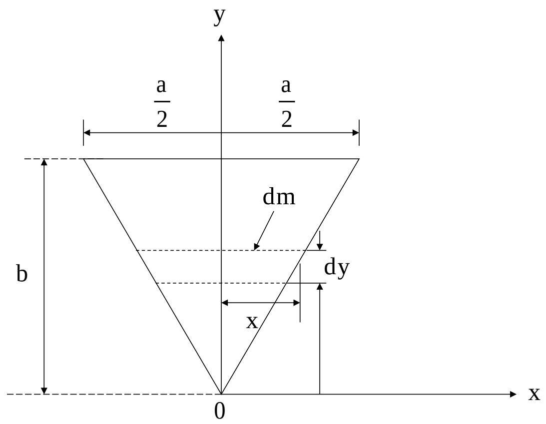
สมการ (6.16) และ (6.17) จะใช้หาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่ประกอบด้วยมวลไม่ต่อเนื่อง สำหรับระบบที่มีมวลอยู่ติดกันอย่างหนาแน่น เช่น วัตถุเกร็ง (Solid object) ซึ่งเป็นวัตถุที่มีความหนาแน่นคงที่ สามารถหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลได้จากสมการ

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm \qquad (6.18)$$

และ

$$X = \frac{1}{M}\int_M x\,dm,\ \ Y = \frac{1}{M}\int_M y\,dm,\ \ Z = \frac{1}{M}\int_M z\,dm \qquad (6.19)$$

ตัวอย่างที่ 6.9 จงหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแผ่นวัตถุภาพสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว a และมีความสูงเป็น b ดังภาพประกอบสำหรับตัวอย่างที่ 6.9 โดยวัตถุนี้มีความหนาแน่นคงที่



ภาพที่ 6.16 ภาพประกอบสำหรับตัวอย่างที่ 6.9

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้มวลของวัตถุเป็น M มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่เป็น $\sigma = \frac{2M}{ab}$ มีลักษณะสมมาตรรอบแกน y จะได้ x = 0 จากสมการ (6.19) สามารถหาองค์ประกอบของจุดศูนย์กลางมวลในแกน y ได้

$$Y = \frac{1}{M}\int ydm$$

และ dm = σdA เมื่อ dA เป็นพื้นที่ในส่วนเล็กๆ ถ้า dy มีค่าน้อยมากๆและพออนุโลมได้ว่าพื้นที่ dA มีลักษณะใกล้เคียงกับสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง dy และยาว 2x ดังนั้น dA $\approx$ (2x)dy และจากภาพจะได้อัตราส่วน $\frac{y}{b} = \frac{2x}{a}$ หรือ $x = \frac{ay}{2b}$ ดังนั้น $dA = \left(\frac{a}{b}\right)ydy$ จะได้ $dm = \sigma(\frac{a}{b})ydy$ นั่นคือ

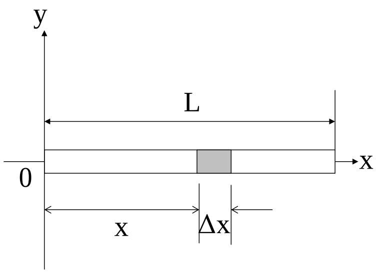
$$Y = \frac{1}{M}\int_0^b \sigma(\frac{a}{b})y^2dy$$

$$= \frac{1}{M}\sigma(\frac{a}{b})\frac{y^2}{3}\Big|_0^b = \frac{1}{M}\sigma(\frac{a}{b})\frac{b^3}{3}$$

เมื่อ $\rho = \frac{2M}{ab}$ จะได้

$$Y = \frac{1}{M}\frac{2M}{ab}\sigma(\frac{a}{b})\frac{b^3}{3} = \frac{2b}{3}$$

ตัวอย่างที่ 6.10 จงหาศูนย์กลางมวลของแท่งวัตถุขนาดสม่ำเสมอ ยาว L มีมวล M ที่วางตัวในแกน x โดยปลายด้านหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉากดังภาพที่ 6.17



ภาพที่ 6.17 ภาพสำหรับตัวอย่างที่ 6.10

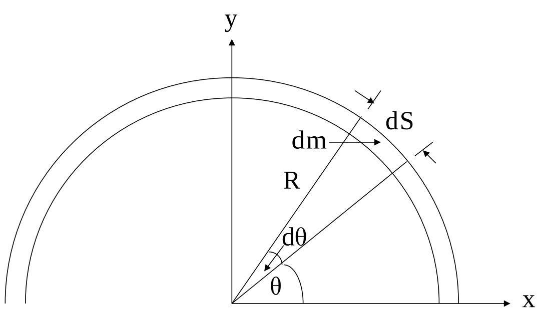
วิธีทำ เมื่อวัตถุวางตัวในแกน x จะได้และมีความหนาแน่นเชิงเส้น = λ ที่ Y = 0

เนื่องจากวัตถุมีความสม่ำเสมอ จะมีความหนาแน่นคงที่ เมื่อพิจารณาในส่วนเล็กๆที่ยาว dx มีมวล dm และอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะ x แล้ว จาก dm = λdx จะได้

$$X = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

เมื่อแทน λ = M/L และจะได้ $x = \frac{L}{2}$

ตัวอย่างที่ 6.11 จงหาจุดศูนย์กลางมวลของลวดครึ่งวงกลมรัศมี R มีมวล M โดยลวดนี้มีความหนาแน่นเชิงเส้นคงที่เท่ากับ λ kg/m



ภาพที่ 6.18 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.11

วิธีทำ เมื่อระบบสมมาตรรอบแกน y ดังนั้น x_{CM} = 0 จากภาพที่ 6.18 ds = Rdθ

จะได้

$$dm = \lambda ds = \lambda R d\theta$$

และ

$$Y = \frac{1}{M}\int y dm \text{ โดยที่ } y = R\sin(\theta)$$

ดังนั้น

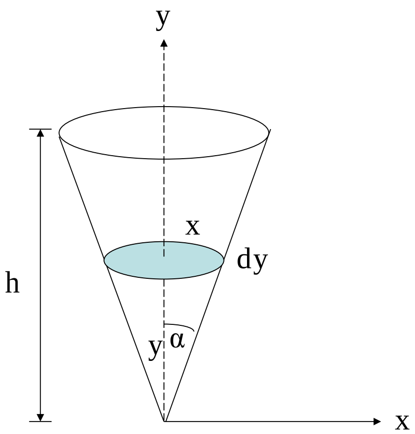
$$Y = \frac{\lambda R^2}{M}\int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta$$

$$= \frac{\lambda R^2}{M}[-\cos(\theta)]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\lambda R^2}{M}$$

เพราะว่า $\lambda = \frac{M}{\pi R}$ ดังนั้น $Y = \frac{2R}{\pi}$

<u>ตัวอย่างที่ 6.12</u> จงหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุตันภาพกรวย ซึ่งมีความหนาแน่นเชิงเส้นปริมาตรเป็น ρ



ภาพที่ 6.19 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 6.12

<u>วิธีทำ</u> จากภาพที่ 6.19 จุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ในแกน y ถ้าจะแบ่งกรวยออกเป็นชั้นเล็กๆมีความหนา dy และมีรัศมี x จะได้ปริมาตรของแผ่นนี้เป็น

$$dV = \pi x^2 dy = \pi (y\tan\alpha)^2 dy$$

จาก $dm = \rho dV$ ดังนั้น

$$M = \int \rho dV = \pi\rho \tan^2(\alpha)\int_0^h y^2 dy$$

$$= \frac{h^2 \pi\rho \tan^2(\alpha)}{3}$$

ดังนั้นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลคือ

$$Y = \frac{1}{M}\int y dm = \frac{1}{M}\int \rho y dV$$

$$= \frac{\pi\rho \tan^2(\alpha)}{M}\int_0^h y^3 dy$$

$$= \frac{\pi\rho h^4 \tan^2(\alpha)}{4M}$$

เมื่อแทนค่า M ลงไปจะได้ $Y = \frac{3h}{4}$

6.5 โมเมนตัมเชิงเส้นและระบบอนุภาค (Linear momentum of a system of particles)

จากสมการ (6.16) เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้

$$M\frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M\vec{V} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p} \tag{6.20}$$

เมื่อ $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

$\vec{p}_i = m_i(\frac{d\vec{r}}{dt})$ เป็นโมเมนตัมของอนุภาคตัวที่ i

$\vec{p} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ เป็นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค

โมเมนตัมสุทธิ $\vec{P}$ ของระบบอนุภาคจะพิจารณาเสมือนเป็นอนุภาคที่มีมวล M = $\sum m$ ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}_{CM}$ เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (6.20) เทียบกับเวลา จะได้

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

และจากกฎข้อสองของนิวตัน จะได้

$$M\,\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

เมื่อ $\vec{F}_i$ เป็นแรงสุทธิที่กระทำกับอนุภาคตัวที่ i เมื่อคิดทั้งระบบจะได้แรงสุทธิคือ $\sum \vec{F}_i$ เนื่องจากแรงภายในซึ่งเป็นแรงที่กระทำระหว่างอนุภาคจะหักล้างกันหมดไปตามกฎข้อสามของนิวตัน จะได้แรงสุทธิ $\sum \vec{F}_i$ เท่ากับแรงภายนอก ($\vec{F}_{ext}$) ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่ากฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตันสำหรับระบบอนุภาค คือ

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \tag{6.21}$$

หรือเขียนในภาพโมเมนตัมเชิงเส้นได้

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{6.22}$$

นั่นคือ “อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคจะเท่ากับแรงภายนอกสุทธิที่กระทำกับระบบ”

ในกรณีไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับระบบความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลจะคงที่ ดังนั้น เมื่อ $\vec{F}_{ext} = 0$ จะได้ $\vec{v}_{CM}$ เป็นค่าคงที่

ตัวอย่างที่ 6.13 อนุภาคมวล 3 kg อยู่ที่ตำแหน่ง x = -5 m และอนุภาคมวล 4 kg อยู่ที่ตำแหน่ง x = 3 m จงหา จุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคทั้งสองนี้

วิธีทำ หาจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาคทั้งสองได้จากสมการ

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{CM} = \frac{3(-5)+4(3)}{3+4} = -0.429\,\text{m}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6.14</u> จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของโมเลกุลไฮโดรเจนคลอไรด์ (HCl) เมื่อระยะห่างระหว่างอะตอมของไฮโดรเจนและอะตอมของคลอรีนเท่ากับ 1.3 x 10^{-10} m กำหนดให้คลอรีนอะตอมมีมวลมากกว่าอะตอมของไฮโดรเจน 35 เท่า

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ m_H คือ มวลของไฮโดรเจนอะตอม

m_{Cl} คือ มวลของคลอรีนอะตอม โดยที่ $m_{Cl} = 35m_H$

x_H คือ ตำแหน่งของไฮโดรเจนอะตอม

x_{Cl} คือ ตำแหน่งของคลอรีนอะตอม

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_H x_H + m_{Cl} x_{Cl}}{m_H + m_{Cl}}$$

$$x_{CM} = \frac{m_H(0) + 35m_H(1.3\times10^{-10})}{m_H + 35m_H}$$

$$x_{CM} = \frac{35m_H(1.3\times10^{-10})}{36m_H} = 1.26\times10^{-10}\ \text{m}$$

<u>ตัวอย่างที่ 6.15</u> นักดับเพลิงคนหนึ่งฉีดน้ำออกจากสายดับเพลิงเพื่อดับไฟ ปรากฏว่าเขาได้รับแรงดันกลับมา 700 N ถ้าน้ำไหลออกจากปลายสายดับเพลิงด้วยอัตรา 4,200 ลิตรต่อนาที จงหาอัตราเร็วของน้ำที่ไหลออกจากปลายสายดับเพลิง

<u>วิธีทำ</u> แรงขับดันของจรวด

$$F_{thrust} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

แทนค่าตัวแปรลงในสมการจะได้

$$700\ \text{N} = \left| v_e \left(\frac{4,200}{60} \right) \right|$$

$$v_e = 10\ \text{m/s}$$

สรุป

1. โมเมนตัม

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

2. การดล

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{P}$$

3. การชนแบบยืดหยุ่น: พลังงานรวมของการชนคงตัวเช่นเดียวกับโมเมนตัม ดังนั้นเขียนสมการแสดงความเร็วของอนุภาค A และ B ภายหลังการชน ได้ดังนี้

$$v_{A2} = \frac{2m_B v_{B1} + v_{A1}(m_A - m_B)}{m_A + m_B}$$

และ

$$v_{B2} = \frac{2m_A v_{A1} - v_{B1}(m_A - m_B)}{m_A + m_B}$$

4. จุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

ขนาดขององค์ประกอบของเวกเตอร์ตำแหน่ง

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

และ

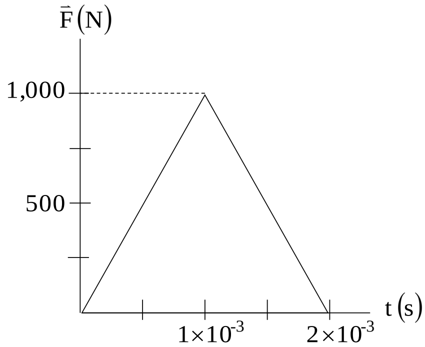
$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$

5. การขับเคลื่อนของจรวด อัตราเร็วของจรวดที่เวลา t

$$v = v_0 + v_r \ln\frac{m_0}{m} - gt$$

แบบฝึกหัด

1. ในการตีเทนนิส สมมติว่าความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่แร็คเก็ตส่งไปยังลูกเทนนิสและเวลา ดังกราฟในภาพที่ 6.20 จงหาอัตราเร็วของลูกเทนนิสขณะที่ลอยออกไปจากแร็คเก็ต เมื่อลูกเทนนิสมีมวล 60 g



ภาพที่ 6.20 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 1

ตอบ 16.67 m/s

2. มวล 50 g เคลื่อนที่ตามแนวราบด้วยอัตราเร็ว 10 m/s ในทิศทาง +x เข้าชนกับกำแพงแข็งและสะท้อนกลับในทิศทาง -x ด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม ถ้ามวลกระทบกับกำแพงในช่วงเวลาสั้นๆ เพียง 5 ms จงหาแรงดลเฉลี่ยที่กระทำบนมวล

ตอบ -200 N

3. กระสุนมวล 10 g เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 300 m/s เข้าชนแผ่นพลาสติกหนา 1.0 cm และผ่านทะลุออกมาด้วยอัตราเร็ว 100 m/s จงหาแรงเฉลี่ยที่ต้านการเคลื่อนที่ในขณะที่กระสุนทะลุผ่านแผ่นพลาสติก

ตอบ -4×10^{4} N

4. นิวเคลียสของอะตอมหนึ่งมีมวล 3.80×10^{-25} kg และอยู่นิ่ง นิวเคลียสนี้เป็นนิวเคลียสกัมมันตรังสี และอยู่ ๆ ก็ปล่อยอนุภาคมวล 6.6×10^{-27} kg ที่มีอัตราเร็ว 1.5×10^{7} m/s อยากทราบว่าอัตราเร็วสุดท้าย v_{nf} ของนิวเคลียสมีค่าเท่าใด ถ้าโมเมนตัมของระบบมีค่าคงตัวระหว่างการระเบิด

ตอบ 2.7×10^{5} m/s

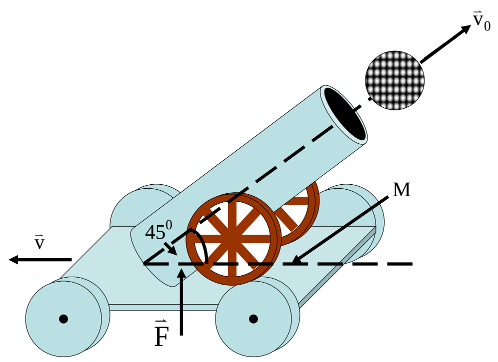
5. เด็กหญิงสองคน (มีมวล m_1 และ m_2) ใส่รองเท้าสเกตและยืนอยู่นิ่งใกล้ๆ กัน และหันหน้าเข้าหากัน เด็กหญิง 1 ผลักเด็กหญิง 2 ตรงๆ ทำให้เด็กหญิง 2 เคลื่อนถอยหลังออกไป ด้วยอัตราเร็ว v_2 สมมติว่าเด็กหญิงทั้งสองเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระบนสเกต เด็กหญิง 1 จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าไร

ตอบ $\frac{m_2}{m_1} v_2$

6. ปืนใหญ่กระบอกหนึ่งติดตั้งบนรถไฟมีมวลรวมกันเท่ากับ 9,000 kg ถ้าตั้งปืนใหญ่ทำมุม 45° กับแนวราบ เมื่อยิงลูกปืนใหญ่มวล 45 kg ออกไป ในขณะที่พ้นจากปากกระบอกปืนมีความเร็ว 400 m/s และรถไฟหยุดนิ่งขณะเวลาดังกล่าว จงหา

ก) อัตราเร็วของรถในขณะที่ยิงปืนใหญ่ เมื่อไม่มีแรงเสียดทานระหว่างล้อกับรางรถไฟ

ข) ถ้าตัวปืนใหญ่กระแทกกับตัวรถในเวลา 3 ms จงหาแรงดลเฉลี่ยที่รางกระทำกับล้อรถไฟ



ภาพที่ 6.21 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 6

ตอบ 4.24×10^{6} N

7. ระบบ ๆ หนึ่งประกอบด้วยมวลต่อไปนี้ ในระนาบ xy: มวล 4.0 kg ที่พิกัด (x = 0, y = 5.0 m), มวล 7.0 kg ที่พิกัด (3.0 m, 8.0 m) และมวล 5.0 kg ที่พิกัด (-3.0 m, -6.0 m) จงหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

ตอบ x = 0.38, y = 2.9, z = 0

8. ลูกบอลมวลเท่ากันสองลูก เคลื่อนที่เข้าหาจุดพิกัดของระบบพิกัด ลูกบอลลูกหนึ่งเคลื่อนที่ลงมาตามแกน +y ด้วยอัตราเร็ว 2.00 m/s และอีกลูกหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาตามแกน –x ด้วยอัตราเร็ว 3.00 m/s หลังจากที่ลูกบอลทั้งสองชนกัน ลูกบอลหนึ่งเคลื่อนที่ออกไปทางขวาตามแกน +x ด้วยอัตราเร็ว 1.20 m/s จงหาองค์ประกอบสเกลาร์ตามแกน x และ y ของความเร็วของลูกบอลอีกลูกหนึ่ง

ตอบ v_x = 1.80 m/s และ v_y = -2.00 m/s

9. รถบรรทุกมวล 7,500 kg เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 5.0 m/s ไปทางทิศตะวันออก และชนเข้ากับรถยนต์มวล 1,500 kg คันหนึ่ง ซึ่งกำลังแล่นมาด้วยอัตราเร็ว 20 m/s ในทิศทำมุม 30° ไปทางใต้ของทิศตะวันตก หลังการชน รถทั้งสองติดกันไป จงหาว่าซากรถทั้งสองที่พังจะเริ่มเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าไรและไปทางทิศใด

ตอบ 2.1 m/s ในทิศตะวันออกเฉียงใต้

10. อนุภาคมวล 3 kg เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $3\hat{i} - 4\hat{j}$ m/s จงหาองค์ประกอบของโมเมนตัมเชิงเส้นในแนวแกน x และแกน y และขนาดของโมเมนตัมเชิงเส้น

ตอบ p = 15 kg.m/s

11. เด็กคนหนึ่งเดาะลูกบาสเกตบอลลงบนพื้นพบว่า การดลเชิงเส้นที่พื้นกระทำต่อลูกบาสเกตบอลเท่ากับ 2 N.s ภายในช่วงเวลา 1/800 s ที่ลูกบอลสัมผัสกับพื้น จงหาขนาดของแรงเฉลี่ยที่พื้นสนามกระทำต่อลูกบอล

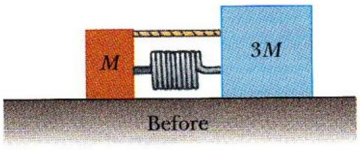
ตอบ 1,600 N

12. ยิงกระสุนปืนมวล 10 g เข้าไปฝังในแผ่นไม้มวล 5 kg ขณะที่ลูกปืนฝังอยู่ในแผ่นไม้นั้น แผ่นไม้กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.6 m/s จงหาอัตราเร็วของกระสุนปืนขณะกระทบกับแผ่นไม้

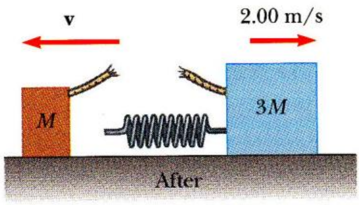
ตอบ v = 301 m/s

13. กล่องสองใบมวล M และ 3M วางอยู่บนพื้นระนาบที่ไม่มีความเสียดทาน กล่องทั้งสองใบผูกติดกันด้วยเชือกเบา และสปริงเบาที่ปลายแต่ละด้านของกล่อง ดังภาพที่ 6.22 (ก) เมื่อออกแรง

ผลักกล่องทั้งสองให้เคลื่อนที่ออกจากกันจนเชือกขาด ทำให้มวล 3M เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 2 m/s ดังภาพที่ 6.22 (ข) จงหาอัตราเร็วของมวล M



(ก)

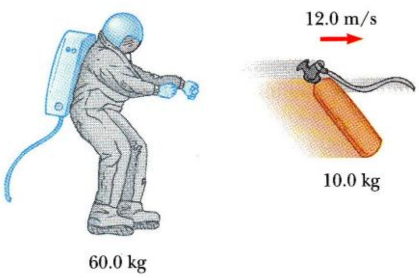


(ข)

ภาพที่ 6.22 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 13

ตอบ v = -6 m/s (เคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ)

14. นักบินอวกาศมีมวล 60 kg เดินออกจากกระสวยอวกาศ ทำให้เชือกที่ผูกติดระหว่างตัวเขากับกระสวยขาดออกจากกัน เขาจึงต้องสลัดถังบรรจุแก๊สออกซิเจนมวล 10 kg ทิ้งด้วยความเร็ว 12 m/s เพื่อให้ตัวเขากลับเข้าไปในกระสวยอวกาศได้ ดังภาพที่ 6.23 ถ้ากำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นของนักบินอวกาศเท่ากับศูนย์ จงหาระยะทางมากที่สุดที่นักบินสามารถเดินห่างจากกระสวยอวกาศนับตั้งแต่เมื่อเชือกเริ่มขาด และสามารถกลับมายังกระสวยได้ภายในเวลา 60 s



ภาพที่ 6.23 ภาพแบบฝึกหัดข้อที่ 14

ตอบ 120 m

15. ลูกบิลเลียดลูกหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 5 m/s ชนกับลูกบิลเลียดอีกลูกหนึ่งซึ่งวางนิ่งอยู่กับที่ หลังการชนกัน ลูกบิลเลียดที่วิ่งเข้าชนจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 4.33 m/s ในทิศทำมุม 30° กับแนวการเคลื่อนที่เดิม จงหาความเร็วและทิศทางของลูกบิลเลียดที่ถูกชน

ตอบ v = 2.5 m/s ทิศทาง -60°

16. ชายคนหนึ่งมีมวล m_1 = 60 kg ยืนอยู่ที่ท้ายเรือซึ่งจอดอยู่ในน้ำนิ่ง กำหนดให้เรือมีมวล m_2 = 40 kg และยาว 3 m ถ้าหัวเรืออยู่ห่างจากฝั่ง 2 m จะเกิดอะไรขึ้นเมื่อชายคนนี้เดินจากท้ายเรือมายังหัวเรือ เมื่อจุดศูนย์กลางมวลอยู่ห่างจากฝั่งเท่าเดิม และมวลของเรืออยู่ที่จุดศูนย์กลางเรือ

17. อนุภาคมวล 2 kg มีความเร็ว $(2\hat{i} - 3\hat{j})$ m/s และอนุภาคมวล 3 kg มีความเร็ว $(\hat{i} + 6\hat{j})$ m/s จงหา

    ก) ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

    ข) โมเมนตัมรวมของระบบ

ตอบ ก) $v_{CM} = (1.40\hat{i} + 2.40\hat{j})$ m/s ข) $\vec{p}_{CM} = (7\hat{i} + 12\hat{j})$ kg. m/s

18. จรวดลำหนึ่งมีอัตราการเผาผลาญเชื้อเพลิง 80 kg/s ถ้าอัตราเร็วของเชื้อเพลิงที่ถูกปล่อยออกมาเท่ากับ 2.5×10^3 m/s จงคำนวณหาแรงขับดันของจรวดลำนี้

ตอบ 200 kN

19. ลูกกระสุนมวล 8.0 g ถูกยิงในแนวระดับ แล้วเข้าไปฝังในก้อนไม้รูปลูกบาศก์ที่มีมวล 9.0 kg ก้อนไม้ลูกบาศก์เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ และมีอัตราเร็ว 40 cm/s หลังจากถูกชน จงหาความเร็วเดิมของลูกกระสุน

ตอบ $\vec{v}_B$ = 0.45 km/s ทิศบวก x

20. มวล 16 g กำลังเคลื่อนที่ไปในทิศ +x ด้วยอัตราเร็ว 30 cm/s ในขณะเดียวกันกับที่มวล 4.0 g กำลังเคลื่อนที่ไปในทิศ -x ด้วยอัตราเร็ว 50 cm/s เมื่อมวลทั้งสองชนกันแบบประสานงาและติดกัน จงหาความเร็วของมวลทั้งสองหลังการชน

ตอบ v = 0.14 m/s ในทิศทาง + x

21. วางมวล 3 ก้อน บนแกน x คือ วางมวล 200 g ที่ตำแหน่ง x = 0 cm วางมวล 500 g ที่ตำแหน่ง x = 30 cm และวางมวล 400 g ที่ตำแหน่ง x = 70 cm จงหาจุดศูนย์กลางมวลของมวลทั้งสาม

22. จรวดลำหนึ่งยืนอยู่บนฐานยิงโดยที่หัวชี้ขึ้นตรง เครื่องยนต์ไอพ่นของจรวดติดเครื่องและพ่นแก๊สออกมาด้วยอัตรา 1,500 kg/s โมเลกุลที่ถูกพ่นออกมีอัตราเร็ว 50 km/s เดิมจรวดจะต้องมีมวลเท่าไร จึงจะทำให้จรวดค่อย ๆ ลอยขึ้นช้า ๆ เนื่องจากแรงขับของเครื่องยนต์

ตอบ 7.7×10^6 kg

เอกสารอ้างอิง

พงษ์ศักดิ์ ชินนาบุญ และ วีระชัย ลิ้มพรชัยเจริญ. (2549). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ.

Halliday, D. , Resnick, R. , & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

________ . (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

Serway, R. A. (1996). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

________ . (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.