บทที่ 3
การเคลื่อนที่ในระนาบ

จากที่ได้ศึกษาการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติมาแล้ว ในบทนี้จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ในระนาบ 2 มิติ เช่น การเคลื่อนที่ของอนุภาคที่เป็นวงกลม หรือการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งของลูกบอล เป็นต้น โดยในการศึกษาจะพิจารณาอนุภาคที่ถูกขว้างให้เคลื่อนที่ระนาบ x - y ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีแรกอนุภาคไม่มีการหมุนในขณะเคลื่อนที่ สามารถแทนแนวทางเดินของทุกๆ จุดบนอนุภาค ด้วยแนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลจะมีแนวทางเดินที่ขนานกับแนวทางของจุดศูนย์กลางมวล การเคลื่อนที่ในลักษณะเช่นนี้อนุภาคจะมีเฉพาะเลื่อนตำแหน่ง (Translational motion) กรณีที่สองอนุภาคมีการหมุนในขณะที่เคลื่อนที่จะพบว่าในขณะที่จุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่ไปนั้น จุดอื่นๆบนอนุภาคจะเคลื่อนที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวลอีกทีหนึ่ง การเคลื่อนที่แบบนี้จึงมีทั้งการเลื่อนตำแหน่งและการเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotational motion) พร้อมกันไป ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรณีที่อนุภาคที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งในระนาบและไม่มีการหมุนเท่านั้น

3.1 เวกเตอร์ตำแหน่ง (Position vector)

ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบนั้น สิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือตำแหน่งของอนุภาคซึ่งกำหนดได้ด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}(t)$ สมมติว่าอนุภาคมีเส้นทางการเคลื่อนที่ดังภาพที่ 3.1 ที่เวลา t ใดๆ อนุภาคจะอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นทางเดินดังกล่าว ซึ่งสามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคได้ด้วยลูกศรที่ชี้จากจุดกำเนิดของระบบพิกัดไปยังตำแหน่งดังกล่าว โดยเวกเตอร์ตำแหน่งจะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งของวัตถุเทียบกับจุดกำเนิด

ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ในระบบพิกัดฉากแบบ 2 มิติ สามารถเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งในภาพฟังก์ชันของเวลาได้เป็น

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad (3.1)$$

เมื่อ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ในแกน x และ y ตามลำดับ

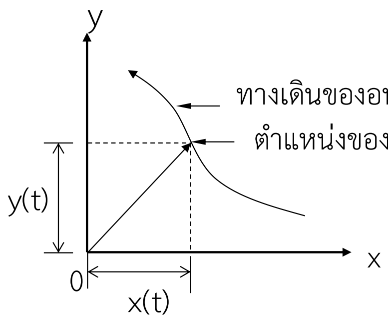
พิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ในระนาบ x-y ดังภาพที่ 3.2 ที่เวลา t_1 อนุภาคจะอยู่ที่จุด P มีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}(t_1)$ และที่เวลา t_2 อนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่จุด Q มีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}(t_2)$ สามารถหาการกระจัดของอนุภาคในระหว่างช่วงเวลา $t_2 - t_1$ ได้จาก

$$\begin{aligned}\vec{r}_{12} &= \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)\\ &= [x(t_2)\,\hat{i} + y(t_2)\,\hat{j}] - [x(t_1)\hat{i} + y(t_1)\,\hat{j}]\\ &= [x(t_2) - x(t_1)]\hat{i} + [y(t_2) - y(t_1)]\,\hat{j} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

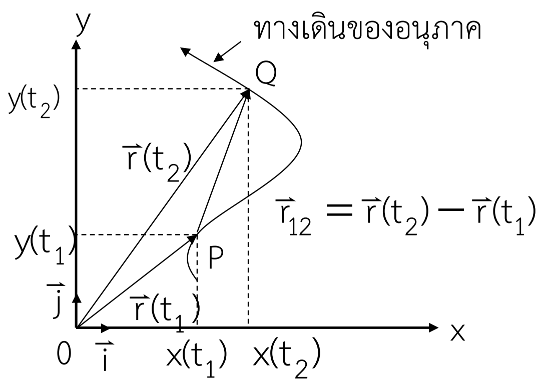
ถ้าช่วงเวลา t_2 - t_1 เท่ากับ Δt ซึ่งมีค่าน้อยมากๆแล้ว การกระจัดของอนุภาคจะมีขนาดน้อยๆ $\Delta\vec{r}_{12}$ หรือ เขียนในภาพง่ายๆ $\Delta\vec{r}$ คือ

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} \tag{3.3}$$

และเรียกปริมาณในสมการ (3.3) ว่า "เวกเตอร์การกระจัดที่เพิ่มขึ้น (Incremental displacement vector)"



ภาพที่ 3.1 เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคในระบบพิกัดฉาก
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)



ภาพที่ 3.2 แสดงการกระจัดของอนุภาค $\vec{r}_{12}$ ในช่วง t_1-t_2
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 61)

<u>ตัวอย่างที่ 3.1</u> ถ้าทางเดินของอนุภาคตัวหนึ่งเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$ โดย $x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ เมื่อ a, b,c,d และ e เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคที่เวลา t = 0 s และ t = 5 s

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (3.2) จะได้ว่า

$$\Delta\vec{r} = [x(5) - x(0)]\,\hat{i} + [y(5) - y(0)]\,\hat{j}$$

เมื่อ

$x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ จะได้

$x(5) = 25a + 5b + c$ $\quad y(5) = 5d + e$

$x(0) = c$ $\quad y(0) = e$

ดังนั้น

$$\Delta\vec{r} = (25a + 5b + c - c)\,\hat{i} + (5d + e - e)\,\hat{j} = (25a + 5b)\,\hat{i} + (5d)\,\hat{j}$$

3.2 เวกเตอร์ความเร็ว (Velocity vector)

เมื่ออนุภาคมีการเคลื่อนที่ พบว่าที่เวลา t_1 และ t_2 อนุภาคมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\vec{r}(t_1)$ และ $\vec{r}(t_2)$ ตามลำดับ และมีการกระจัดเป็น $\vec{r}_{12} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ จากนิยามพื้นฐานของความเร็วเฉลี่ยสามารถนิยามเวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ย (Average vector velocity) ในช่วงเวลาดังกล่าวได้

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}_{12}}{t_2 - t_1} \tag{3.4}$$

$\vec{v}_{av}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งเกิดจากการคูณเวกเตอร์ $\vec{r}_{12}$ ด้วยปริมาณสเกลาร์ $\dfrac{1}{(t_2 - t_1)}$ โดยขนาดของ $\vec{v}_{av}$ คือ $\dfrac{|\vec{r}_{12}|}{t_2 - t_1}$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{r}_{12}$

ถ้าแทน t_1, t_2-t_1 และ $\vec{r}_{12}$ ด้วย t, Δt และ $\Delta\vec{r}$ ตามลำดับ สามารถเขียนสมการ (3.4) ได้ใหม่เป็น

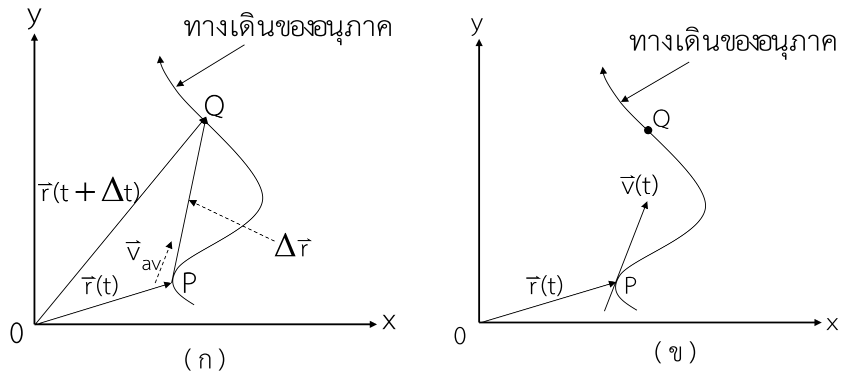
$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.5}$$

และสามารถหาความเร็วขณะเวลาใดๆได้จาก

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{3.6}$$

จากภาพที่ 3.3 แสดงทางเดินของอนุภาคตามสมการ (3.5) และ (3.6) พบว่า $\vec{v}(t)$ มีทิศทางอยู่ในแนวเส้นสัมผัสกับทางเดินของอนุภาคที่จุดนั้นๆ สามารถเขียนขนาดของความเร็ว $\vec{v}(t)$ เป็น $\left|\vec{v}(t)\right|$ ซึ่งจะเรียก v(t) ว่า " อัตราเร็ว (Speed) " ของอนุภาค

จากภาพที่ 3.3 พบว่า $\vec{r}(t)$ มีการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางตามเวลา ดังนั้นจึงสามารถหาความเร็วได้จากขนาดของการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว เช่น อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี R รอบจุดศูนย์กลางที่อยู่บนจุดกำเนิดของระบบพิกัด นั่นคือ $\left|\vec{r}(t)\right| = R$ ซึ่งเป็นค่าคงที่ ส่วนทิศทางของอนุภาคที่จุดใดๆสามารถหาได้จากทิศทางของเส้นสัมผัสกับแนวทางเดินของอนุภาคที่จุดนั้นๆ สามารถเขียนเวกเตอร์ความเร็วในภาพขององค์ประกอบได้ดังนี้



ภาพที่ 3.3 (ก) แสดงความเร็วเฉลี่ย (ข) แสดงความเร็วในขณะเวลาใดๆ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, Resnick, & Walker, 2007, หน้า 60)

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}] \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} \\ &= v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} \qquad (3.7)\end{aligned}$$

เมื่อ $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ และ $v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ องค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร็วเป็น

$$\vec{v}_x = \frac{dx}{dt}\hat{i} \qquad \text{และ} \qquad \vec{v}_y = \frac{dy}{dt}\hat{j}$$

ที่เวลาใดๆอนุภาคมีอัตราเร็วเป็น

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.8}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u> เรือลำหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ x - y โดยมีฟังก์ชันตำแหน่งที่เวลาใดๆในระบบพิกัดฉากเป็น $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$ และ $y(t) = -t^2 + 2t - 3$ จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งและความเร็วของเรือลำนี้ที่เวลา t = 3 s

<u>วิธีทำ</u> จากฟังก์ชันตำแหน่งที่กำหนดให้สามารถเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งที่เวลา t ใดๆ ได้

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 2t + 1)\,\hat{i} + (-t^2 + 2t - 3)\,\hat{j}\ \text{m}$$

และมีเวกเตอร์ของความเร็วที่เวลา t ใดๆ เป็น

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (6t - 2)\,\hat{i} + (-2t + 2)\,\hat{j}\ \text{m/s}$$

ดังนั้นเวกเตอร์ตำแหน่งและเวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t = 3 s คือ

$$\vec{r}(t = 3\text{ s}) = (27 - 6 + 1)\,\hat{i} + (-9 + 6 - 3)\,\hat{j} = 22\,\hat{i} - 6\,\hat{j}\,\text{m}$$
$$\vec{v}(t = 3\text{ s}) = (18 - 2)\,\hat{i} + (-6 + 2)\,\hat{j} = 16\,\hat{i} - 4\,\hat{j}\,\text{m/s}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.3</u> รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ x - y ด้วยความเร่ง $\vec{a} = 2\,\hat{i}\ \text{m/s}^2$ ถ้ารถยนต์คันนี้เริ่มเคลื่อนที่เมื่อเวลา t = 0 มีความเร็วเริ่มต้น $\vec{v}_0 = (10t\,\hat{i} - 5\,\hat{j})\ \text{m/s}$ จงหา

ก) ความเร็วที่เวลา t ใดๆ

ข) ความเร็วและอัตราเร็วของอนุภาคที่เวลา t = 7 s

ค) เวกเตอร์ตำแหน่งที่เวลา t ใดๆ

<u>วิธีทำ</u> ก) จาก $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ จะได้

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= [(10t\,\hat{i} - 5\,\hat{j}) + (2t\,\hat{i})]\ \text{m/s}\\ &= [(10t + 2t)\,\hat{i} - 5\,\hat{j}]\ \text{m/s}\\ &= [12t\,\hat{i} - 5\,\hat{j}]\ \text{m/s}\end{aligned}$$

ข) จากข้อ ก) เมื่อ t = 7 s จะได้

$$\begin{aligned}\vec{v}(7\text{ s}) &= [(12(7))\hat{i} - 5\hat{j}]\\ &= [84\,\hat{i} - 5\,\hat{j}]\ \text{m/s}\end{aligned}$$

อัตราเร็ว คือ

$$\vec{v}(7\text{ s}) = \left|\vec{v}(7\text{ s})\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(84)^2 + (-5)^2} = 84.15\text{ m/s}$$

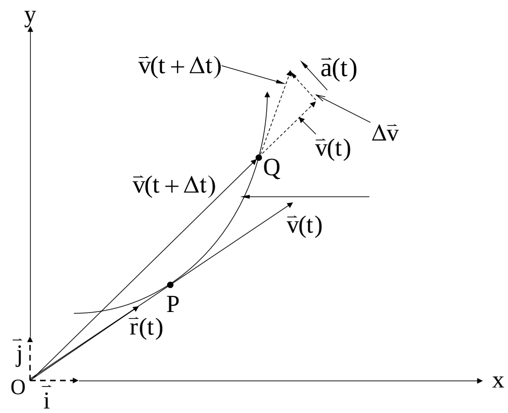
สามารถหามุม θ ที่ $\vec{v}$ กระทำกับแกน x ได้ดังนี้

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{84}\right) = -3.41^{\circ}$$

ค) สามารถหาเวกเตอร์ตำแหน่งที่เวลาใดๆ ได้จาก

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$
$$\int_0^t d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt$$
$$\vec{r}(t) = \int_0^t [12t\,\hat{i} - 5\hat{j}]\,dt = 12[\int_0^t tdt]\,\hat{i} - 5[\int_0^t dt]\,\hat{j}$$
$$= 12\,[\frac{t^2}{2}]\,\hat{i} - 5t\,\hat{j} = 6t^2\,\hat{i} - 5t\,\hat{j}\text{ m}$$

3.3 เวกเตอร์ความเร่ง (Acceleration vector)



ภาพที่ 3.4 แสดงทางเดินของอนุภาคเมื่อความเร็วเพิ่มขึ้นเป็น $\Delta\vec{v}$ และความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}(t)$ ที่มา (ปรับปรุงจาก พงษ์ศักดิ์ ชินนาบุญ และ วีระชัย ลิ้มพรชัยเจริญ, 2549, หน้า 56)

ที่เวลา t อนุภาคมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}(t)$ จากจุด P เมื่อเวลาผ่านไป Δt อนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่จุด Q มีความเร็วเป็น $\vec{v}(t+\Delta t)$ ดังภาพที่ 3.4 ซึ่งการที่ความเร็วของอนุภาคมีการเปลี่ยนแปลงไป เราสามารถนิยามได้เป็น "เวกเตอร์ของความเร่งเฉลี่ย (Average vector acceleration)" เขียนเป็นสมการคือ

$$\vec{a}_{av}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.9}$$

และความเร่งของอนุภาคที่เวลา t ใดๆ (Instantaneous vector acceleration) มีค่าเป็น

$$\vec{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \tag{3.10}$$

จะพบว่าขนาดและทิศทางของ $\vec{v}(t)$ จะเปลี่ยนไปตามเวลา ซึ่งการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะมีผลต่อเวกเตอร์ความเร่งด้วย พิจารณาอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ ถึงแม้ว่าอัตราเร็วของอนุภาคจะคงที่แต่ทิศทางของอนุภาคมีการเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา จะส่งผลให้ความเร่งของการเคลื่อนที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาไปด้วย สำหรับองค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร่งสามารถหาได้จากสมการ (3.7) คือ

$$\vec{v}(t)=v_x(t)\,\hat{i}+v_y(t)\,\hat{j}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\vec{a}(t)&=a_x(t)\,\hat{i}+a_y(t)\,\hat{j}\\&=\frac{dv_x(t)}{dt}\,\hat{i}+\frac{dv_y(t)}{dt}\,\hat{j}\end{aligned} \tag{3.11}$$

ดังนั้นองค์ประกอบของความเร่งคือ

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2} \qquad \text{และ} \qquad a_y(t)=\frac{dv_y(t)}{dt}=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 เรือมีฟังก์ชันความเร็วเป็น $\vec{v}(t)=at^2\,\hat{i}+bt\,\hat{j}$ โดยกำหนดให้ a = 10 m/s^3 และ b = -5 m/s^2 จงหา

(ก) ความเร็วที่เวลา t = 1 s และ t = 2 s
(ข) ความเร่งเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลาตามข้อ (ก) และความเร่งที่ t = 1.5 s

<u>วิธีทำ</u> (ก) จากโจทย์จะได้

$$\vec{v}(1) = 10\,\hat{i} - 5\,\hat{j}\ \text{m/s} \qquad \vec{v}(2) = 40\,\hat{i} - 10\,\hat{j}\ \text{m/s}$$

(ข) สามารถคำนวณหาความเร่งเฉลี่ยได้จากสมการ (3.10) โดยกำหนดให้

t = 1.5 s และ Δt = 2 s - 1 s = 1 s

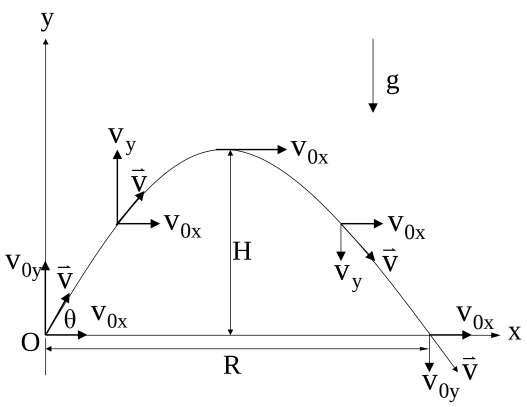
ดังนั้น

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(2) - \vec{v}(1)}{1\,\text{s}} = \frac{(40\,\hat{i} - 10\,\hat{j}) - (10\,\hat{i} - 5\,\hat{j})}{1\,\text{s}} = (30\,\hat{i} - 5\,\hat{j})\ \text{m/s}^2$$

และความเร่งที่เวลา t = 1.5 s คือ

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2at\,\hat{i} + b\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(1.5\,\text{s}) = (30\,\hat{i} - 5\,\hat{j})$$

3.4 การเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง (Projectile motion)



ภาพที่ 3.5 แสดงทางเดินของอนุภาคที่เคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 77)

การเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง คือการที่วัตถุมีการเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวระดับพร้อมๆ กัน จะเกิดขึ้นได้เมื่อวัตถุมีความหนาแน่นมากพอ ในขั้นพื้นฐานเพื่อให้ง่ายขึ้นต่อการศึกษาจะกำหนดเงื่อนไขสำหรับพิจารณาการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งดังนี้

1) ไม่คิดความต้านทานของอากาศ

2) วัตถุเคลื่อนที่ในลักษณะแบบเลื่อนตำแหน่งและไม่มีการหมุน

3) ความเร่งที่กระทำกับวัตถุเกิดจากความโน้มถ่วงเท่านั้น นั่นคือ

$$\vec{a}_x = 0$$

และ

$$\vec{a}_y = g\,\hat{j}$$

ในการศึกษาการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งจะพิจารณาความเร็ว ความเร่ง และระยะทางออกเป็น 2 ส่วน คือ องค์ประกอบในแนวราบ และองค์ประกอบในแนวดิ่ง ดังภาพที่ 3.5 ถ้าวัตถุมีความเร็วต้นเป็น v_0 และเคลื่อนที่ทำมุม θ กับแนวราบ เมื่อแยกพิจารณาในแต่ละแกนในระนาบ x - y จะได้

1) องค์ประกอบในแนวราบ

ความเร็วในแนวราบคือ $v_x(t) = v_{0x}(t) = v_0\cos(\theta)$ จะมีค่าคงที่เนื่องจากไม่มีความเร่งในแนวราบ ($\vec{a}_x = 0$) ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ไกลที่สุดในแนวราบคือ $R = v_{0x}T$ เมื่อ t เป็นเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ในอากาศ

2) องค์ประกอบในแนวดิ่ง

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

$$h = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh$$

$$v_{0y} = v_0\sin(\theta)$$

เมื่อ t และ $\mathbf{v_y}$ เป็นเวลาและความเร็วในแนวดิ่ง

และ h คือระยะสูงสุดที่วัตถุเคลื่อนที่ขึ้นไปได้

ส่วนอัตราเร็วขณะเวลา t ใดๆ สามารถหาได้จาก

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}$$

ปริมาณที่มักได้รับความสนใจสำหรับการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้ง คือ

(1) เวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ถึงจุดสูงสุด และเวลาที่วัตถุอยู่ในอากาศ หรือเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ (T)

(2) ระยะทางที่วัตถุขึ้นไปได้สูงสุด (h)

(3) ระยะทางไกลสุดในแนวราบ (R)

<u>การหาเวลาที่วัตถุอยู่ในอากาศ</u>

จาก $v_y(t) = v_{0y} - gt$ ที่ตำแหน่งสูงสุด (h) นั้น $v_y = 0$ ดังนั้น เวลาที่วัตถุใช้เคลื่อนที่ไปถึงจุดสูงสุด คือ

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \tag{3.12}$$

สำหรับเวลาที่วัตถุอยู่ในอากาศ คือ T = 2t ดังนั้น

$$T = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} \tag{3.13}$$

<u>การหาระยะที่วัตถุขึ้นไปได้สูงสุด</u>

จาก $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh$ เมื่อแทนค่า $v_y = 0$ และ $v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$ จะได้ว่า

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \tag{3.14}$$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง T กับ h</u>

เมื่อยกกำลังสองสมการ (3.13) จะได้ $T^2 = \frac{4v_0^2 \sin^2(\theta)}{g^2}$ ดังนั้นอัตราส่วน $\frac{T^2}{h}$ คือ

$$\frac{T^2}{h} = \frac{8}{g}$$

หรือ

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

และ

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3.15)$$

<u>การหาระยะที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ไกลสุดในแนวราบ</u>

จาก

$$R = v_x T = v_{0x} T = v_0 \cos(\theta).\frac{2v_0 \sin(\theta)}{g} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta).\cos(\theta)}{g}$$

แต่

$$\sin(\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

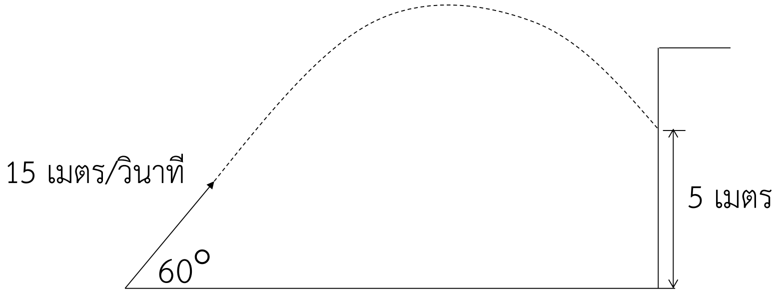
ดังนั้น

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \qquad (3.16)$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.5</u> เมื่อขว้างลูกเบสบอลไปยังตึกหลังหนึ่งโดยลูกเบสบอลมีความเร็วต้นเท่ากับ 15 m/s และทำมุม 60^0 กับแนวราบ ปรากฏว่าลูกเบสบอลกระทบกับตึกซึ่งสูงกว่าแนวระดับ 5 m ดังภาพที่ 3.6 จงหา

ก) เวลาที่ลูกเบสบอลอยู่ในอากาศ

ข) ระยะทางในแนวราบและความเร็วของลูกเบสบอลขณะกระทบตึก



ภาพที่ 3.6 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 3.5

วิธีทำ เพื่อความสะดวกให้พิจารณาเป็นการเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวดิ่งแยกกันจะได้ องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ในแนวราบ $a_x = 0$ คือ

$$v_x(t) = v_{0x} = v_x\cos(60^\circ) = (15\ \text{m/s})(0.5) = 7.5\ \text{m/s}$$

$$R = v_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2 = [15\cos(60^\circ)]\,t = 7.5t\ \text{m}$$

องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง จาก

$$v_{0y}(t) = v_{0y}\sin(\theta) = (15\ \text{m/s})\sin(60^\circ) \approx 13.0\ \text{m/s}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y = 0$$

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{13.0 \pm \sqrt{[-13.0]^2 - 2(9.8)(5)}}{(9.8)^2} = \frac{13 \pm 8.4}{9.8} = 2.18, 0.47\,\text{s}$$

จะได้ t = 2.18 s และ t = 0.47 s แต่ในที่นี้จะเลือกใช้ t = 2.18 s เพราะว่า t = 0.47 s เป็นเวลาที่ลูกเบสบอลใช้เดินทางในแนวดิ่งขึ้นไปสูง 50 m จะได้ระยะในแนวราบที่ลูกเบสบอลชนตึก วัดจากตำแหน่งยิง คือ

$$R = 7.5t = (7.5)(2.18) = 16.35\ \text{m}$$

และสามารถหาองค์ประกอบของความเร็วในแนวดิ่ง (v_y) ได้จาก

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

$$= (13.0) - (9.8)(2.18) = -8.36$$

ดังนั้น ความเร็วขณะกระทบตึก คือ

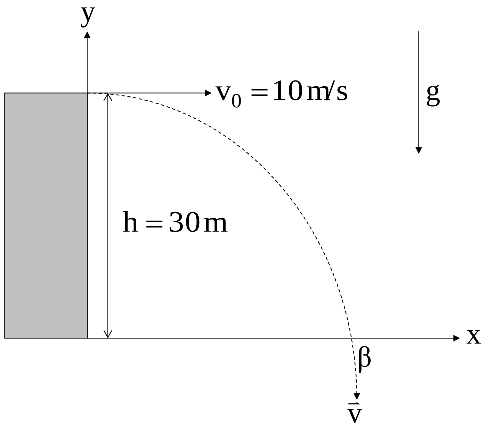
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(13.0)^2 + (-8.36)^2} = 9.96\ \text{m/s}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3.6</u> ผู้ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่ขอบหลังคาของอาคารหลังหนึ่งซึ่งสูงจากพื้น 30 m ถ้าเขาขว้างก้อนหินไปในแนวราบด้วยความเร็ว 10 m/s จงหา

ก) เวลาที่ก้อนหินอยู่ในอากาศ

ข) อัตราเร็วขณะกระทบพื้น

ค) มุมขณะกระทบพื้น



ภาพที่ 3.7 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 3.6

<u>วิธีทำ</u> ก) จากภาพที่ 3.7 กำหนดให้จุดอ้างอิงอยู่ที่พื้นด้านล่างของอาคารเมื่อเวลา t ใดๆ ก้อนหินจะมีระยะทางในแนวราบเท่ากับ $x(t) = v_0t$ และระยะความสูงจากพื้นเท่ากับ $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ เมื่อก้อนหินกระทบพื้นนั่นคือ y = 0 สามารถหาเวลาที่ก้อนหินอยู่ในอากาศ คือ

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(30)}{9.8}} = 2.47\,s$$

ข) อัตราเร็วขณะที่ก้อนหินกระทบพื้น คือ

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt = (-9.8)(2.47) = -24.21 m/s$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 = 10\,m/s$$

ดังนั้น อัตราเร็วขณะกระทบพื้น คือ

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(10)^2 + (-24.21)^2} = 26.19 \text{ m/s}$$

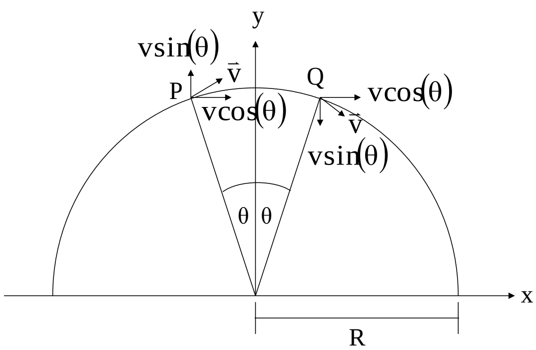
ค) มุมขณะกระทบพื้นหาได้จาก

$$\tan(\beta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-24.21}{10} \text{ จะได้ } \beta = -67.56^\circ$$

3.5 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมสมบูรณ์ (Uniform circular motion)

การเคลื่อนที่เป็นวงกลมสมบูรณ์ คือ การที่อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีวงโคจรทับแนวเดิมตลอดเวลา นั่นแสดงว่าอนุภาคมีอัตราเร็วคงที่ และมีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางเสมอ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นวงกลมรัศมี R ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ในระนาบ x - y ดังภาพที่ 3.8



ภาพที่ 3.8 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 1996, หน้า 78)

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จาก P ผ่านจุดสูงสุดไปยังจุด Q ในช่วงเวลา Δt ถ้ามุม θ มีค่าน้อยๆ ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ $2R\theta$ สามารถหาเวลา Δt ได้จาก

$$\Delta t = \frac{R(2\theta)}{v} \tag{3.17}$$

และมีขนาดของความเร่งเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x จาก P ไป Q คือ

$$\vec{a}_{av}(x-\text{axis}) = \frac{v_{Qx} - v_{Px}}{\Delta t} = \frac{v\cos(\theta) - v\cos(\theta)}{\Delta t} = 0$$

นั่นคือ องค์ประกอบของความเร็วในแนวแกน x มีค่าคงที่ และสำหรับขนาดของความเร่งเฉลี่ยในแนวแกน y ในการเคลื่อนที่ในช่วงเดียวกันคือ

$$\begin{aligned}\vec{a}_{av}(y-\text{axis}) &= \frac{v_{Qy}-v_{Py}}{\Delta t}\\ &= \frac{[v\sin(\theta)-(-v\sin(\theta))]}{\Delta t}\\ &= \frac{2v\sin(\theta)}{\Delta t}\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า Δt จากสมการ (3.17) จะได้

$$\vec{a}_{av}(y-\text{axis}) = \frac{2v^2\sin(\theta)}{2R\theta} = \frac{v^2}{R}\left(\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right) \tag{3.18}$$

ถ้ามุม θ น้อยๆ และมีหน่วยเป็นเรเดียน สามารถประมาณได้ว่า $\sin(\theta) \cong \theta$ จากสมการ (3.18) จะได้ความเร่งตามแกน y หรือความเร่งตามแนวรัศมีเป็น

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{3.19}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$a_C = \frac{v^2}{R}.\frac{R}{R} = \left(\frac{v}{R}\right)^2.R$$

เมื่อแทนเทอม $\frac{v}{R}$ ด้วย ω ซึ่งเป็น "ความถี่เชิงมุมของการหมุน (Angular frequency of rotation)" หรือ "อัตราเร็วเชิงมุม (Angular speed)" ของการเคลื่อนที่ นั่นคือ

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{3.20}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วกับคาบเวลาในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบ จะได้

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi v}{2\pi R}$$

เมื่อ $2\pi R$ คือเส้นรอบวงหรือระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ และ $T = \frac{2\pi R}{v}$ เป็นคาบเวลา ดังนั้น

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.21}$$

จากสมการ (3.13) พบว่า ω มีหน่วยเป็น เรเดียน (Radian) ต่อวินาที เขียนย่อเป็น rad/s

จากภาพที่ 3.8 จะเห็นว่าเวกเตอร์ตำแหน่ง ($\vec{r}$) , ความเร็วเชิงเส้น ($\vec{v}$) และความเร่งสู่ศูนย์กลาง ($\vec{a}_C$) จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เมื่อการเคลื่อนที่เป็นวงกลมสมบูรณ์ พบว่า

$$r = \left|\vec{r}\right|, v = \left|\vec{v}\right| \text{ และ } a_C = \left|\vec{a}_C\right| \text{ มีค่าคงที่}$$

3.6 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ (Circular motion with constant angular acceleration)

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยที่ความเร็วเชิงมุมมีการเปลี่ยนแปลง เราสามารถนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราเร็วเชิงมุม ω ได้เป็น "ความเร่งเชิงมุม (Angular acceleration; α)" ดังนั้น

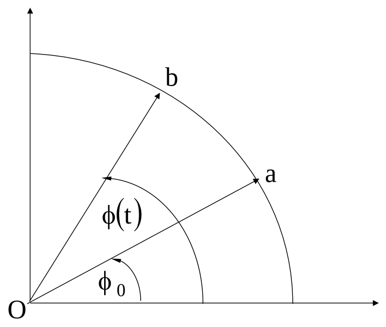
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{3.22}$$

ที่เวลา t = 0 อนุภาคมีอัตราเร็วเชิงมุมเป็น ω_0 และที่เวลา t ใดๆ อนุภาคมีอัตราเร็วเชิงมุมเป็น $\omega(t)$ เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่จะได้ว่า

$$\int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega$$

$$\alpha(t) = \omega(t) - \omega_0$$

$$\omega(t) = \alpha(t) + \omega_0 \tag{3.23}$$



ภาพที่ 3.9 แสดงส่วนของทางเดินของอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลม
ที่มา (ดัดแปลงมา Halliday, Resnick, & Walker, 2007, หน้า 243)

จากภาพที่ 3.9 ที่เวลา $t = 0$ อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่งจุด a มีการกระจัดเชิงมุมเป็น ϕ_0 เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที ปรากฏว่าอนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่จุด b มีการกระจัดเชิงมุม $\phi(t)$ เนื่องจากอัตราเร็วเชิงมุมคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของการกระจัด $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ ดังนั้น

$$\int_0^t \omega\, dt = \int_{\phi_0}^{\phi(t)} d\phi$$

$$\int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\, dt = \phi(t) - \phi_0$$

$$\phi(t) - \phi_0 = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{3.24}$$

จากสมการ (3.23) จะได้

$$t = \frac{\omega(t) - \omega_0}{\alpha}$$

เมื่อนำค่า t จากสมการด้านบนแทนลงในสมการ (3.24) จะได้

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha[\phi(t) - \phi_0] \tag{3.25}$$

สมการ (3.23), (3.24) และ (3.25) เป็นสมการที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่เป็นวงกลมซึ่งมีความเร่งเชิงมุมคงที่เมื่อนำไปเปรียบเทียบกันสมการของการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้นด้วยความเร่งคงที่พบว่าสมการทั้งสามชุดนี้มีลักษณะที่เหมือนกันดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 เปรียบเทียบสมการของการเคลื่อนที่เชิงเส้นกับวงกลม

การเคลื่อนที่เชิงเส้นที่มีความเร่งคงที่	การเคลื่อนที่แบบวงกลมที่มีความเร่งเชิงมุมคงที่
$v(t) = v_0 - at$	$\omega(t) = \alpha(t) + \omega_0$
$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$	$\phi(t) - \phi_0 = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v(t)^2 = v_0^2 + 2a[x(t) - x_0]$	$\omega^2(t) = \omega_0^2 + 2\alpha[\phi(t) - \phi_0]$

สำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นทางโค้งใดๆจะมีองค์ประกอบของเวกเตอร์ความเร่งทั้งในแนวสู่ศูนย์กลางและในแนวสัมผัสทางเดิน ดังนั้น

$$\bar{a} = a_r \hat{u}_r + a_\phi \hat{u}_\phi \tag{3.26}$$

เมื่อ $\hat{u}_r$ และ $\hat{u}_\phi$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวรัศมีและแนวสัมผัสทางเดินตามลำดับ โดยกำหนดให้ $\hat{u}_r$ มีทิศทางเป็นบวกเมื่อพุ่งออกจากจุดศูนย์กลาง และมีทิศทางเป็นลบเมื่อเข้าหาจุดศูนย์กลางการเคลื่อนที่ ถ้า $a_\phi = 0$ จะทำให้สมการ (3.26) เป็นกรณีการเคลื่อนที่เป็นวงกลมสมบูรณ์ ซึ่งมีเฉพาะความเร่งในแนวรัศมีและ $a_r = a_C$ ดังนั้นจากสมการ (3.19) จะได้ความเร่งในแนวรัศมีเป็น

$$a_r = -\frac{v^2}{R} = -R\omega^2 \tag{3.27}$$

ถ้า a_C มีเครื่องหมายลบ (-) แสดงว่าความเร่งในแนวรัศมีมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลาง ส่วนขนาดของความเร่งในแนวสัมผัสกับทางเดินสามารถหาได้จากสมการ

$$a_\phi = \frac{dv_\phi}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{3.28}$$

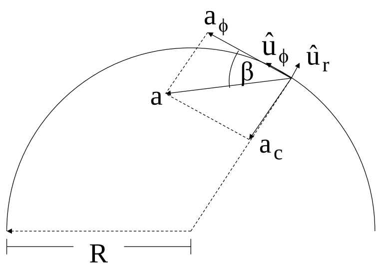
องค์ประกอบของความเร่งในแนวรัศมีและแนวสัมผัสทางเดินจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังภาพที่ 3.10 โดยที่ขนาดของความเร่งสุทธิหาได้จาก

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} \tag{3.29}$$

เมื่อ a_C และ a_ϕ เป็นขนาดของความเร่งในแนวรัศมีและแนวสัมผัสทางเดิน ตามลำดับ

ส่วนทิศทางของความเร่งลัพธ์สามารถหาได้จาก

$$\tan(\beta) = \frac{a_r}{a_\phi} \tag{3.30}$$



ภาพที่ 3.10 แสดงองค์ประกอบของความเร่ง
ที่มา (ดัดแปลงมา Halliday, Resnick, & Walker, 2007, หน้า 250)

ตัวอย่างที่ 3.7 อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี 0.2 m ด้วยอัตราเร็วเชิงเส้น 0.8 m/s และมีความเร่งเชิงมุมเป็น α = 8 rad/s^2 จงหาขนาดของความเร่งลัพธ์และทิศทางของอิเล็กตรอนตัวดังกล่าว

วิธีทำ จากสมการ (3.19) จะได้

$$a_r = -\frac{v^2}{R} = -\frac{(0.8)^2}{(0.2)} = -4.0\,\text{m/s}^2$$

จากสมการ (3.28) จะได้

$$a_\phi = R\alpha = (0.2)(8) = 1.6\,\text{m/s}^2$$

จากสมการ (3.29) จะได้

$$a = |a| = \sqrt{a_r^2 + a_\phi^2} = \sqrt{(-4.00)^2 + (1.6)^2} = 4.31\text{m/s}^2$$

และ

$$\beta = \tan^{-1}(\frac{a_r}{a_\varphi}) = \tan^{-1}(\frac{-4.0}{1.6}) = -14.04^\circ$$

สรุป

1. ความเร็วเฉลี่ย

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. ความเร็วขณะหนึ่ง

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

3. ความเร่งเฉลี่ย

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

4. ความเร่งขณะหนึ่ง

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

5. สมการแม่บทของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

$$x = (v_0 \cos\theta)t$$

$$y = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

6. ระยะทาง r จากจุดกำเนิดของโพรเจกไทล์ที่เวลา t ใด ๆ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

7. ความเร็วลัพธ์ของโพรเจกไทล์

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

8. ความเร่งสู่ศูนย์กลาง

$$a = \frac{v^2}{R}$$

แบบฝึกหัด

1. ถ้าอนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ xy โดยมีโคออร์ดิเนตเป็นฟังก์ชันของเวลา คือ

$$x = (1.75 \text{ m/s})t + (0.5 \text{ m/s}^2)t^2$$

และ

$$y = 2\ \text{m} + (0.5\ \text{m/s})t + (1\ \text{m/s}^2)t^2$$

จงหาตำแหน่งของอนุภาค ความเร็ว และความเร่ง ที่เวลา $t = 4$ s

ตอบ 25 m, 9.29 m/s และ 2.24 m/s^2 ทำมุม 26.57° เทียบกับแกน x

2. ลูกบอลถูกขว้างออกไปจากยอดตึกในแนวราบด้วยความเร็ว 2 m/s จงหาตำแหน่ง ความเร็ว หลังจากขว้าง 2 s

ตอบ ที่เวลา 2 s บอลอยู่ห่างจากจุดกำเนิด 10.84 m มีความเร็ว 19.71 m/s ทำมุม 84.20° ใต้แกน x

3. รถยนต์วิ่งด้วยอัตราเร็วคงตัวขนาด 15 m/s บนทางโค้งที่มีรัศมี 25 m จงหาความเร่ง

ตอบ 9.0 m/s

4. ปล่อยก้อนหินสองก้อนจากหน้าผาสูง H ก้อนที่สองถูกปล่อยเมื่อหินก้อนแรกเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่ากับ D จงแสดงว่าเมื่อหินก้อนแรกตกกระทบพื้น หินก้อนที่สองอยู่เหนือพื้น

$$2\sqrt{DH} - D$$

5. ชายคนหนึ่ง ยืนบนหน้าผาสูง 80 เมตร ขว้างลูกบอลออกไปในแนวราบ ด้วยความเร็วต้น 330 เมตร/วินาที ถามว่าลูกบอลไปตกไกลจากหน้าผาเท่าไร

ตอบ 1,415.7 เมตร

6. ยิงกระสุนปืน มวล 50 กรัม ด้วยความเร็วต้น 100 เมตร/วินาที ทำมุม 60° กับแนวระดับหลังจากนั้น 5 วินาที กระสุนตกกระทบเป้าบนหน้าผาเป้านั้นอยู่สูงจากพื้นระดับที่ยิงเท่าไร

ตอบ 377.5 เมตร

7. กำแพงห่างจากปากกระบอกปืน 8 เมตร โดยที่ปากกระบอกปืนเอียงทำมุม 45° เมื่อกระสุนถูกยิงออกจากปากกระบอกปืนด้วยอัตราเร็ว 20 เมตร/วินาที กระสุนปืนจะกระทบกำแพงสูงจากพื้นกี่เมตร

ตอบ 6.432 เมตร

8. ขว้างก้อนหินขึ้นไปในอากาศทำมุม θ กับแนวราบให้ t_1 เป็นเวลาที่คิดการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งจากพื้นจนตกกลับมาที่เดิม t_2 เป็นเวลาที่คิดการเคลื่อนที่ในแนวราบจากจุดที่ขว้างถึงจุดที่ตก t_3 เป็นเวลาที่ก้อนหินใช้ในการลอยอยู่ในอากาศทั้งหมดข้อใดถูก

ตอบ $t_1 = t_2 = t_3$

9. นักบาสเกตบอลยิงลูกจากระยะในแนวราบ 5 เมตร ห่างจากห่วง ขณะที่ลูกเข้าห่วง พบว่ามีความเร็ว 10 เมตร/วินาที ทำมุม 60° กับแนวราบ จงหาเวลาที่ลูกบาสเกตบอลใช้ในการเคลื่อนที่มาถึงห่วงในหน่วยวินาที

ตอบ t = 1

10. นักรักบี้คนหนึ่งเตะลูกบอลขึ้นด้วยความเร็ว 20 เมตร/วินาที เป็นมุม 60 องศา กับแนวระดับ เขาจะต้องวิ่งด้วยความเร็วอย่างน้อยที่สุดเท่าไรจึงจะไปรับลูกบอลที่เขาเตะออกไปเองได้พอดีก่อนตกถึงพื้นดิน

ตอบ t = 1

เอกสารอ้างอิง

พงษ์ศักดิ์ ชินนาบุญ และ วีระชัย ลิ้มพรชัยเจริญ. (2549). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

________ . (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

Serway, R. A. (1996). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

________ . (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.