บทที่ 1
หน่วย ปริมาณฟิสิกส์และเวกเตอร์

การพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมีในปัจจุบัน มีการเปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็ว ซึ่งส่งผลทำให้มนุษย์สามารถคิดค้น ประดิษฐ์นวัตกรรมใหม่ๆ รวมไปถึงการพัฒนาความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้ดียิ่งขึ้น ทั้งนี้เมื่อพิจารณาถึงองค์ความรู้พื้นฐานจะพบว่า วิชาฟิสิกส์เป็นองค์ความรู้สำคัญที่ถูกนำมาใช้ในการพัฒนาองค์ความรู้ดังกล่าวทั้งสิ้นไม่ว่าจะเป็น การเคลื่อนที่ งาน พลังงาน กำลัง ความร้อน ปรากฏการณ์คลื่น แสง เสียง ไฟฟ้า และแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น นอกจากนี้ การดำเนินชีวิตประจำวันยังเกี่ยวข้องกับฟิสิกส์ทั้งทางตรงและทางอ้อม ทั้งนี้การบอกปริมาณทางกายภาพบางอย่าง สามารถบอกได้ด้วยตัวเลข (ขนาด) และหน่วยก็สามารถสื่อความหมายได้อย่างสมบูรณ์ เช่น สถานที่แห่งหนึ่งอากาศมีอุณหภูมิ 40 ^{0}C คนไทยจะรับรู้ได้ว่าอากาศร้อน แต่ถ้าอุณหภูมิต่ำกว่า 20 ^{0}C คนไทยจะรู้สึกหนาว สสารที่มีความหนาแน่นสัมพัทธ์ (relative density) มากกว่า 1 จะจมน้ำ เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีปริมาณกายภาพบางอย่าง บอกเพียงตัวเลขและหน่วยแต่ไม่สามารถสื่อความหมายได้อย่างสมบูรณ์ ต้องบอกพร้อมกับกำหนดทิศทางจึงจะได้ความหมายสมบูรณ์ เช่น ความเร็วซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ นอกจากจะบ่งบอกถึงปริมาณของความเร็วแล้ว จำเป็นต้องมีทิศทางด้วย การออกแรงกระทำต่อวัตถุต้องบอกขนาดและทิศทางของแรงเป็นต้น

1.1 ฟิสิกส์และพัฒนาการเกี่ยวกับฟิสิกส์

ความหมายของฟิสิกส์แต่เดิมที คือ “การศึกษาปรากฏการณ์ทางธรรมชาติทั้งหลาย” ในศตวรรษที่ 19 ความรู้ทางฟิสิกส์ได้ถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มใหญ่ๆ 3 กลุ่ม คือ

1) กลศาสตร์แบบดั้งเดิม (Classical mechanics) การศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคและวัตถุที่มีความเร็วต่ำๆ ซึ่งมีความเร็วน้อยกว่าแสงมากๆ โดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน เป็นหลัก

2) อุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) ศึกษาเกี่ยวกับอุณหภูมิ การถ่ายเทความร้อน และทฤษฎีจลของก๊าซ

3) แม่เหล็กและไฟฟ้า (Magnetic and electricity) ศึกษาเกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางไฟฟ้าแม่เหล็กและการแผ่รังสี

ซึ่งเรียกกลุ่มวิชาดังกล่าวว่า “ฟิสิกส์ดั้งเดิม (Classical physics)” และในศตวรรษที่ 20 มีปรากฏการณ์และปัญหาทางฟิสิกส์บางประการที่ไม่สามารถใช้ทฤษฎีในฟิสิกส์ดั้งเดิมอธิบายได้อย่างถูกต้อง เช่น การแผ่รังสีของวัตถุดำ (Black body radiation) ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริกซ์ (Photoelectric effect) และปรากฏการณ์คอมป์ตัน (Compton’s scattering) เป็นต้น จึงทำให้เกิดวิชา “ฟิสิกส์ยุคใหม่ (Modern physics)” โดยมีทฤษฎีที่สำคัญได้แก่ ทฤษฎีควอนตัม (Quantum theory) และ ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Relativity theory) ในปัจจุบันแนวความคิดของวิชาฟิสิกส์ดั้งเดิมและยุคใหม่จะถูกเรียกรวมเป็นวิชาเดียวกันว่า “ วิชาฟิสิกส์ ” ซึ่งนิยามความหมายของฟิสิกส์โดยสรุป

ได้ว่า เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาองค์ประกอบของสสาร อันตรกิริยา (Interaction) ระหว่างอนุภาคกับอนุภาคหรืออนุภาคกับสนาม โดยนักฟิสิกส์เชื่อว่าความเข้าใจเกี่ยวกับอันตรกิริยาต่างๆ จะทำให้ใจความเป็นจริงของธรรมชาติ และสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆในธรรมชาติได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น

1.2 การวัดและความคลาดเคลื่อน

1.2.1 การวัด (Measuring)

การศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์สิ่งที่สำคัญยิ่งอย่างหนึ่งคือ การวัดปริมาณต่างๆ ซึ่งเป็นที่มาของแหล่งข้อมูลใหม่ๆ การวัดปริมาณต่างๆ สิ่งที่ต้องระวังเป็นพิเศษ คือ

เครื่องมือวัด	ต้องได้มาตรฐานและต้องเหมาะสมกับปริมาณที่จะวัด
วิธีการวัด	ต้องเป็นวิธีที่สะดวกปลอดภัยและได้ค่าที่ละเอียดถูกต้อง

ก. **การแสดงผลของการวัด** เครื่องมือวัดที่ใช้งานทางด้านวิทยาศาสตร์จะแสดงผลการวัด 2 แบบ คือแบบขีดสเกลและแบบตัวเลข เช่นภาพที่ 1.1 และภาพที่ 1.2 ตามลำดับ

ภาพที่ 1.1 ไมโครมิเตอร์ใช้วัดความหนาของวัตถุแสดงผลเป็นแบบขีดสเกลสามารถวัดได้ละเอียดถึง 0.01 มิลลิเมตร

ภาพที่ 1.2 นาฬิกาบอกเวลาแสดงผลแบบตัวเลข

ข. การอ่านผลจากเครื่องมือวัด เนื่องจากเครื่องมือวัดทางด้านวิทยาศาสตร์ แสดงผลการวัดแบบขีดสเกล และแบบตัวเลข ดังนั้น การอ่านผลจากเครื่องมือวัดที่แสดงผลการวัดแบบต่างๆ จะมีข้อพิจารณาดังนี้

1. **เครื่องมือวัดแบบแสดงผลด้วยขีดสเกล** ค่าที่อ่านได้จากเครื่องมือนี้ เช่น ความยาวของไม้ที่วัด ด้วยไม้บรรทัด น้ำหนักของผลไม้ที่ชั่งด้วยตาชั่ง เป็นต้น จะประกอบด้วย

ค่าอ่านที่ได้โดยตรง + ค่าที่ต้องประมาณด้วยสายตา

2. **เครื่องมือวัดแบบแสดงผลด้วยตัวเลข** ค่าที่อ่านได้จากเครื่องมือชนิดนี้ เช่น ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่วัดด้วยเครื่องมัลติมิเตอร์ เป็นต้น จะประกอบด้วย ค่าความคลาดเคลื่อนไว้ให้ในคู่มือการใช้

ค. การเลือกใช้เครื่องมือวัด ในการเลือกใช้เครื่องมือวัด มีหลักในการพิจารณา คือ ต้องเลือกเครื่องมือวัดให้เหมาะสมกับลักษณะของงาน เช่น การวัดความยาวของกิ่งไม้ตามที่แสดงในภาพที่ 1.3 เราใช้ไม้บรรทัดที่สามารถวัดได้ละเอียดถึง 0.1 มิลลิเมตร ก็เพียงพอ โดยไม่จำเป็นต้องใช้ไมโครมิเตอร์ซึ่งมีความละเอียดในการวัดถึง 0.01 มิลลิเมตร เป็นต้น

ง. สิ่งที่มีผลกระทบต่อความถูกต้องของการวัด การวัดปริมาณทางวิทยาศาสตร์ สิ่งที่จะมีผลกระทบต่อความถูกต้องของการวัด ได้แก่ เครื่องมือวัด วิธีการวัด ผู้ทำการวัด สภาพแวดล้อมขณะทำการวัด มีข้อพึงระมัดระวังเพื่อไม่ให้สิ่งเหล่านั้นมีผลมากนัก ดังตารางที่ 1.1

1.2.2 ค่าความคลาดเคลื่อนและค่าความไม่แน่นอน (Errors and uncertainties)

ค่าความคลาดเคลื่อน คือ ค่าแตกต่างระหว่างค่าที่คำนวณได้ หรือค่าที่ได้จากการทดลองกับค่าแท้จริง (True value) โดยทั่วไปค่าแท้จริงของสิ่งต่างๆ จะสามารถหาได้จากค่าโดยประมาณซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการคาดคะเนทางทฤษฎี หรือเป็นค่าที่ได้จากการทดลองของนักวิทยาศาสตร์กลุ่มต่างๆ ที่ได้ทำการทดลองมาก่อน ค่าโดยประมาณจะเป็นค่าที่ทำให้เราทราบว่าผลการทดลองเป็นอย่างไร

ค่าโดยประมาณ มีความสำคัญและเกี่ยวข้องในการวัดทางวิทยาศาสตร์อย่างมาก โดยเฉพาะค่าที่ได้จากการทดลองในห้องปฏิบัติการจะเป็นค่าโดยประมาณและมีค่าความคลาดเคลื่อนเสมอ ในการทดลองใดๆ เมื่อทำการวัดหลายครั้งจะพบว่าค่าที่ได้นั้นมีค่าแตกต่างกัน แสดงว่าข้อมูลที่ได้มีค่าไม่แน่นอน ซึ่งขึ้นอยู่กับการแปรปรวนของข้อมูลและทฤษฎีที่ใช้อธิบายการทดลองดังกล่าว ค่าความไม่แน่นอนที่วัดได้สามารถใช้คาดคะเนค่าความคลาดเคลื่อนของการวัดได้ โดยค่าความคลาดเคลื่อนดังกล่าวจะได้มาจากความกว้างของการแจกแจงการวัดจำนวนหลายครั้งนั่นเอง แต่ในความเป็นจริงเราไม่สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนที่แท้จริงได้จึงจำเป็นที่จะต้องพัฒนาวิธีการวัดและวิธีคาดคะเนค่าความคลาดเคลื่อน อีกทั้งยังต้องเข้าใจแบบจำลองทางทฤษฎีที่ใช้หาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ด้วย การวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนไม่ได้พิจารณาถึงความแม่นยำของการทดลองเท่านั้น โดยทั่วไปต้องสนใจข้อมูลที่มีประโยชน์อื่นๆด้วย โดยไม่จำเป็นต้องทำการทดลองซ้ำด้วยเครื่องมือที่

ดีกว่า หรือทำการวัดหลายครั้ง แต่เราต้องทำความเข้าใจและศึกษาปัญหาต่างๆ ที่พบ นอกจากนี้ การปรับปรุง และพัฒนาเทคนิคสำหรับวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนทำให้สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับอธิบายข้อมูลดังกล่าวได้

1.2.3 เลขนัยสำคัญ (Significant figures)

ในการบันทึกผลจากการทดลองมักจะพบปัญหาในการบันทึกค่า โดยเฉพาะผลลัพธ์จากเครื่องคำนวณซึ่งให้ผลลัพธ์ออกมามีหลายๆตำแหน่ง การพิจารณาว่าค่าที่ได้จะสามารถใช้ค่าทั้งหมดที่ปรากฏได้หรือไม่ หรือจะเลือกบันทึกได้ตามต้องการ ในทางวิทยาศาสตร์การบันทึกผลจะใช้กี่หลักนั้นต้องคำนึงถึงความแม่นยำของการทดลองและความละเอียดของเครื่องมือหรืออุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลองนั้นๆ โดยพิจารณาจากเลขนัยสำคัญ (Significant number) ของข้อมูลเริ่มต้น การกำหนดเลขนัยสำคัญจะนับจำนวนหลักจากซ้ายไปขวามือเมื่อ

1) หลักทางซ้ายไม่เป็นศูนย์ ทั้งเลขจำนวนเต็มและทศนิยม

2) หลักทางขวามือ กรณีเลขจำนวนเต็มจะนับเฉพาะหลักที่ไม่เป็นศูนย์ ส่วนเลขทศนิยมจะนับทุกตัว

การเขียนเลขนัยสำคัญของผลลัพธ์จากการทดลองหรือการคำนวณจะต้องไม่ทำให้ ความแม่นยำของการวัดเปลี่ยนไป ทั้งนี้ในการคำนวณจะมีหลักในการบันทึกดังนี้

การบวกและลบของเลขนัยสำคัญ

หลักเกณฑ์ในการหาผลลัพธ์ของการบวกและลบของเลขนัยสำคัญ คือ ผลลัพธ์ที่ได้มีตัวเลขหลังจุดทศนิยมเท่ากับจำนวนตัวเลขหลังจุดทศนิยมน้อยที่สุดของเลขนัยสำคัญที่นำมาบวกหรือลบกัน

การคูณและหารของเลขนัยสำคัญ

หลักเกณฑ์ในการหาผลลัพธ์ของการคูณและหารของเลขนัยสำคัญ คือ ผลลัพธ์ที่ได้มีจำนวนตัวเลขนัยสำคัญเท่ากับจำนวนตัวเลขนัยสำคัญน้อยที่สุดของเลขนัยสำคัญที่นำมาคูณหรือหารกัน

1.3 มาตรฐานและหน่วย

การศึกษาวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับการวัด จึงจำเป็นต้องมีหน่วยมาตรฐานของปริมาณต่างๆ เช่น มวล ความยาว หรือ เวลา ในที่นี้จะใช้ระบบนานาชาติ (SI = Systems International d' Unites) ซึ่งเป็นระบบที่พัฒนาขึ้นมาโดย General conference on weights and measures โดยระบบหน่วยนานาชาติจะประกอบด้วย หน่วยฐาน หน่วยอนุพันธ์ และคำนำหน้าหน่วยแสดงปริมาณด้วยตัวเลขซึ่งบางครั้งเรียกว่า “คำอุปสรรค”

ก**. หน่วยฐาน** เป็นหน่วยหลักของหน่วยเอสไอ มี 7 หน่วย ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 หน่วยพื้นฐานในการวัด

ปริมาณ	หน่วย	สัญลักษณ์
ความยาว	เมตร	m
มวล	กิโลกรัม	kg
เวลา	วินาที	s
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์	A
อุณหภูมิทางอุณหพลศาสตร์	เคลวิน	K
ปริมาณของสาร	โมล	mol
ความเข้มของการส่องสว่าง	แคนเดลา	cd

ที่มา (Halliday, Resnick, & Walker, 2001, หน้า 2)

และหน่วยพื้นฐานทั้ง 7 ชนิด มีนิยามดังนี้

เมตร (Metre) คือ ความยาวที่เท่ากับระยะทางที่แสงเดินทางในสุญญากาศในช่วงเวลา 1/299, 792,458 ของวินาที

กิโลกรัม (Kilogram) คือ หน่วยของมวลที่เท่ากับมวลต้นแบบนานาชาติ

วินาที (Second) คือ ช่วงเวลา 9,191,631,770 เท่าของคาบการแผ่รังสีที่เกิดจากการเปลี่ยนระดับพลังงานของอะตอมซีเซียม -133 ระหว่างระดับไฮเปอร์ไฟน์สองระดับพลังงานของสถานะพื้น

แอมแปร์ (Ampere) คือ กระแสไฟฟ้าคงที่ที่ป้อนให้กับลวดตัวนำตรงสองเส้นที่มีความยาวอนันต์และมีพื้นที่หน้าตัดน้อยมากๆ เมื่อลวดตัวนำทั้งสองวางห่างจากกัน 1 เมตร ในสุญญากาศ แล้วทำให้เกิดแรงขนาด 2×10^{-7} นิวตันต่อความยาว 1 เมตร

เคลวิน (Kelvin) คือ หน่วยของอุณหภูมิทางอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics temperature) มีค่าเท่ากับ 1/273.16 ของอุณหภูมิทางพลศาสตร์ที่จุดน้ำสามสถานะ (triple point of water)

โมล (Mole) คือ ปริมาณของสารในระบบที่ประกอบด้วยองค์ประกอบมูลฐานที่เทียบเท่ากับจำนวนอะตอมคาร์บอน 12 ในปริมาณ 0.012 กิโลกรัม

แคนเดลา (Candela) คือ ความเข้มของการส่องสว่างในทิศที่กำหนดของแหล่งกำเนิดแสงความถี่เดียว 540×10^{12} เฮิรตซ์ และมีความเข้มของการแผ่รังสีในทิศทางดังกล่าว เท่ากับ 1/683 วัตต์ต่อสเตอเรเดียน

ข. **หน่วยอนุพันธ์** เป็นหน่วยที่เกิดจากหน่วยฐานหลายหน่วยรวมกัน เช่น แรง ความดัน งาน พลังงานกำลัง เป็นต้น

ค. คำนำหน้าหน่วยแสดงปริมาณด้วยตัวเลขหรือคำอุปสรรค ถ้าค่าในหน่วยฐาน หรือหน่วยอนุพันธ์มีค่ามากหรือน้อยเกินไป เพื่อความสะดวกจะเปลี่ยนเป็นตัวเลขคูณด้วยสิบยกกำลังบวกหรือลบแทน เช่น 0.003 A หรือ 3×10^{-3} A นั่นคือสามารถเขียนเป็น 3 mA ซึ่ง m เรียกว่าคำอุปสรรค และคำอุปสรรคอื่นๆ ได้แก่

ตารางที่ 1.2 คำอุปสรรค

ตัวคูณ	**ชื่อ**	**สัญลักษณ์**
10^{-18}	อัตโต (Atto)	a
10^{-15}	เฟมโต (Femto)	f
10^{-12}	พิโก (Pico)	p
10^{-9}	นาโน (Nano)	n
10^{-6}	ไมโคร (Micro)	μ
10^{-3}	มิลลิ (Milli)	m
10^{-2}	เซนติ (Centi)	c
10^{-1}	เดซิ (Deci)	d
10	เดคา (Deca)	da
10^{2}	เฮกโต (Hecto)	h
10^{3}	กิโล (Kilo)	k
10^{6}	เมกะ (Mega)	M
10^{9}	จิกะ (Giga)	G
10^{12}	เทระ (Tera)	T
10^{15}	เพตะ (Peta)	P
10^{18}	เอกซะ (Exa)	E

ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, Resnick, & Walker, 2001, หน้า 2)

1.4 การวิเคราะห์มิติ

มิติ (Dimension) เป็นตัวกำหนดลักษณะทางธรรมชาติของปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น การวัดระยะทางในหน่วยของฟุต หลา เซนติเมตร หรือเมตร จะมีมิติเป็น “ความยาว (Length)” สัญลักษณ์ของมิติที่ใช้กำหนดหน่วยพื้นฐานทางฟิสิกส์ เช่น ความยาว มวล เวลา จะกำหนดเป็น L, M และT ตามลำดับ เราจะใช้วงเล็บ [ ] ในการกำหนดมิติของปริมาณทางฟิสิกส์ เช่น มิติของความเร็ว จะเขียนเป็น [v] = L/T และมิติของพื้นที่คือ [A] = L^2 เป็นต้น ความสำคัญของมิติ คือ ใช้ตรวจสอบ

ความถูกต้องของสมการทางฟิสิกส์ กล่าวคือถ้าหากเป็นสมการที่ถูกต้องแล้ว ทั้งสองข้างของสมการจะต้องมีมิติเดียวกัน เช่น การเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวเส้นตรงมีสมการเป็น

$$X = vt \qquad \text{หรือ} \qquad [x] = [vt]$$

$$[\text{Length}] = [(\text{Length})/(\text{Time})][\text{Time}] \qquad L = (L/T)T$$

$$[\text{Length}] = [\text{Length}] \qquad L = L$$

สำหรับสมการที่มีความซับซ้อน เช่น $x = vt + \frac{1}{2}at^2$ จะหามิติได้ดังนี้

$$[x] = [vt] + \frac{1}{2}[at^2]$$

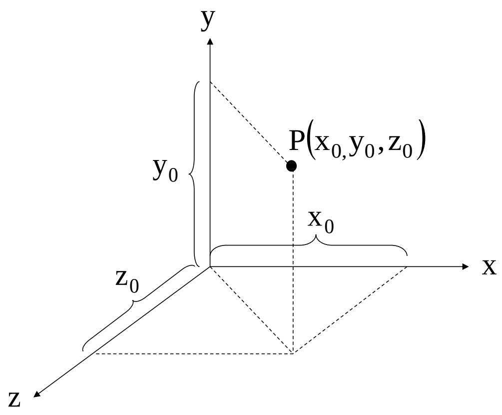
$$L = \left(\frac{L}{T}\right)T + \left(\frac{L}{T^2}\right)T^2$$

$$L = L + L$$

ซึ่งจะเห็นว่าทุกๆเทอมมีมิติเป็น L ทั้งหมด แสดงว่าสมการถูกต้องแล้วและจะสังเกตเห็นว่าตัวเลข $\frac{1}{2}$ นั้น ไม่มีมิติ

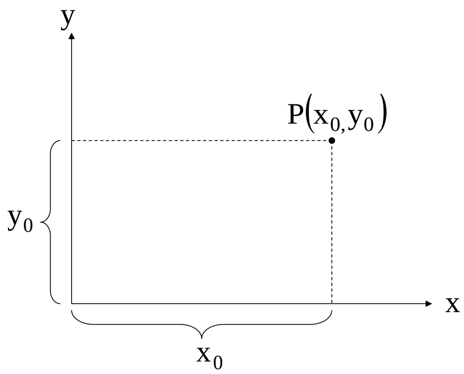
1.5 ระบบพิกัด (Coordinate system)

ในวิชาฟิสิกส์มักจะมีความเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งอธิบายได้จากตำแหน่งของวัตถุนั้นๆ โดยพิจารณาจากตำแหน่งปัจจุบัน ตำแหน่งที่ผ่านมา หรือตำแหน่งที่กำลังเคลื่อนที่ไป การบอกตำแหน่งของวัตถุจึงจำเป็นต้องมีระบบพิกัด (Coordinate system) เพื่อใช้ในการอ้างอิงสำหรับหาระยะและทิศทางของวัตถุในขณะนั้นๆ ระบบพิกัดที่นิยมใช้กันมากซึ่งสะดวกและง่ายต่อการบอกตำแหน่ง คือ ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) ประกอบด้วยเส้น ตั้งฉาก 3 เส้น เรียกว่า แกน (Axis) โดยทั่วไปกำหนดเป็นแกน x (x-Axis) แกน y (y-Axis) และแกน z (z-Axis) โดยแกนทั้งสามตัดกันที่จุดกำเนิด (Origin) ซึ่งเป็นจุดที่ระยะในแต่ละแกนมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นการบอกตำแหน่งของจุดใดๆในของระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียนแสดงได้ดังภาพที่ 1.3 ซึ่งสามารถวัดระยะในแต่ละแกนแล้วเขียนพิกัดเป็น (x , y , z) เมื่อพิจารณาจุด P ใดๆพบว่ามีระยะตามแกน x เท่ากับ x_0 ซึ่งสามารถหาได้จากจุดตัดของระนาบที่ขนานกับระนาบ yz ซึ่งผ่านจุด P นั่นเอง และทำนองเดียวกันสามารถหาระยะตามแกน y และแกน z ได้เท่ากับ y_0 และ z_0 ตามลำดับ



ภาพที่ 1.3 ระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียน
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)

ปรากฏการณ์โดยทั่วไปอาจจะบอกพิกัดได้ด้วยแกน 2 แกน คือ แกน x และแกน y ดังภาพที่ 1.4 โดยค่าบวกและค่าลบของระยะตามแกน x จะอยู่ทางขวาและทางซ้ายของแกน y ตามลำดับ สำหรับระยะตามแกน y จะกำหนดให้ค่าบวกอยู่เหนือแกน x และค่าลบอยู่ใต้แกน x ถ้ากล่าวถึงระยะตามแกน z สามารถพิจารณาจากระนาบของแผ่นกระดาษ โดยค่าบวกจะกำหนดให้มีทิศทางพุ่งออกจากหน้ากระดาษ ส่วนค่าลบจะมีทิศพุ่งเข้าไปในแผ่นกระดาษ โดยส่วนใหญ่จะเรียกระบบพิกัดแบบคาร์ทีเซียนว่า พิกัดฉาก (Rectangular coordinates)



ภาพที่ 1.4 ระบบพิกัด 2 มิติ
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)

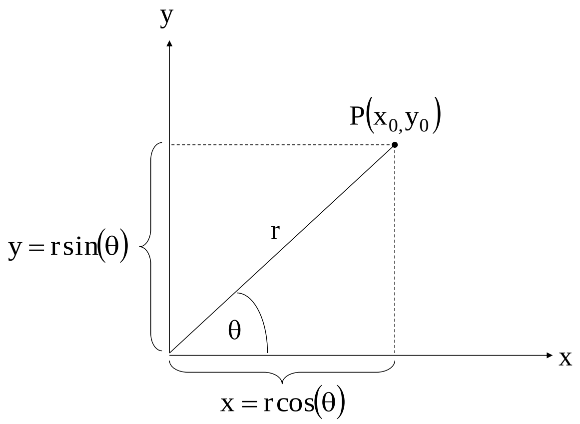
โดยทั่วไปการวัดและการสังเกตการณ์การเคลื่อนที่ของวัตถุ รถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบิน จะอ้างถึงจุดเริ่มต้นที่อยู่บนพื้นดิน หรือระนาบบนพื้นดิน จึงเรียกระนาบพื้นดินว่า กรอบอ้างอิง (Frame of reference) ถ้ากล่าวถึงโลกเคลื่อนที่จะใช้กรอบอ้างอิงที่ติดอยู่กับดวงอาทิตย์ ส่วนตัวเราเองจะรู้สึกว่าโลกหยุดนิ่ง ส่วนดวงอาทิตย์และดาวดวงอื่นๆต่างหากที่เคลื่อนที่และโคจรรอบโลกทั้งนี้ เพราะเราใช้ตัวเองเป็นหลักหรือเป็นจุดอ้างอิงของสิ่งอื่นๆ

ระบบพิกัดอีกระบบหนึ่งที่นิยมใช้บอกตำแหน่งของวัตถุ คือ ระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinates system) เป็นระบบที่บอกพิกัดของวัตถุด้วยระยะรัศมี r จากจุดกำเนิด และมุมที่ทำกับแกน x โดยบอกตำแหน่งเป็น (r,θ) ดังภาพที่ 1.5 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับพิกัดฉากดังสมการ

$$x = r\cos(\theta) \text{ และ } y = r\sin(\theta) \qquad (1.1)$$

หรือ

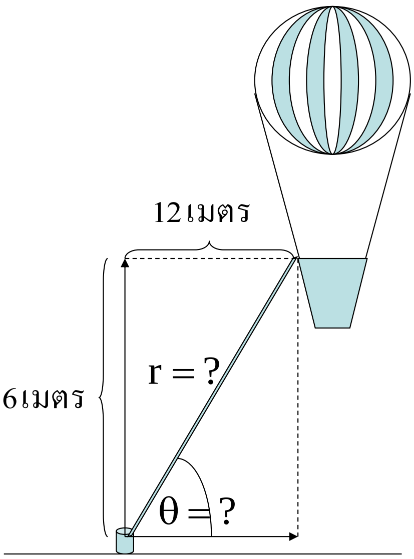
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ และ } \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (1.2)$$



ภาพที่ 1.5 ระบบพิกัดเชิงขั้ว
ที่มา (ปรับปรุงจาก สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์, 2543, หน้า 17)

จากสมการ (1.2) มุม θ ต้องเป็นมุมที่ทำกับแกน + x เท่านั้น ถ้าเป็นมุมที่ทำกับแกนอื่นจะต้องเปลี่ยนให้เป็นมุมที่ทำกับแกน x จึงจะสามารถเขียนอยู่ในเทอมของพิกัดเชิงขั้วได้ การหาค่ามุมจากสมการ (1.2) ต้องระมัดระวัง เช่น จุด (-1,2) และ (1,-2) ในพิกัด (x , y) มุมที่ได้จะต่างกันเนื่องจาก $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) \neq \tan^{-1}\left(\frac{1}{-2}\right)$ จึงจำเป็นต้องทราบตำแหน่งของวัตถุและมุมหาได้มีความสัมพันธ์กับแกน x อย่างไร

<u>ตัวอย่างที่ 1.1</u> บอลลูนลูกหนึ่งถูกยึดไว้ด้วยเชือกเส้นหนึ่ง พบว่าตำแหน่งของบอลลูนอยู่สูง 16 เมตร และอยู่ห่างจากจุดยึดไป 12 เมตร ดังภาพที่ 1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของบอลลูนดังกล่าว



ภาพที่ 1.6 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.1

<u>วิธีทำ</u> ตำแหน่งของลูกบอลลูนในพิกัดฉากคือ

$x = +12.0$ เมตร

$y = +16.0$ เมตร

สามารถหาตำแหน่งในพิกัดเชิงขั้วได้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20.0 \text{ เมตร}$$

และ

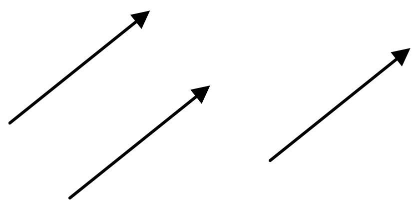
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{16.0}{12.0}\right) = 53.1^\circ$$

ได้พิกัดเชิงขั้วของลูกบอลลูน คือ $(20, 53.1^\circ)$

1.6 ปริมาณสเกลาร์และเวกเตอร์ (Scalars and vectors)

ในทางฟิสิกส์และวิศวกรรม การทราบจำนวนและหน่วยของปริมาณใดปริมาณหนึ่งอาจไม่เพียงพอสำหรับการอธิบายปริมาณนั้นให้สมบูรณ์ได้ เช่น การเดินไปทางทิศเหนือ 3 กิโลเมตร ย่อมมีตำแหน่งแตกต่างจากการเดินไปทางทิศตะวันออก 3 กิโลเมตร การกล่าวเพียงสั้นๆ ว่าเราได้เดินทางไปแล้ว 3 กิโลเมตร จะไม่สามารถบอกตำแหน่งสุดท้ายได้ถ้าไม่ทราบทิศทางของการเดิน เรียกตำแหน่งที่เปลี่ยนไปของวัตถุว่า “การกระจัด (Displacement)” และเรียกปริมาณที่มีทั้งขนาด

(Magnitude) และทิศทาง ว่า “ปริมาณเวกเตอร์ (Vector)” ซึ่งเป็นปริมาณที่สามารถใช้อธิบายปริมาณทางฟิสิกส์ได้สมบูรณ์มากขึ้น ปริมาณเวกเตอร์จะแทนด้วยเส้นตรงและเลือกสเกลที่เหมาะสม โดยความยาวของเส้นตรงจะใช้แทนขนาดเวกเตอร์ หรือใช้แทนการกระจัด หรือขนาดของความเร็ว หรือขนาดของปริมาณต่างๆ โดยหน่วยของความยาวของเส้นตรงจะไม่มีความสำคัญมากนัก ส่วนลูกศรที่ปลายเส้นตรงจะแสดงถึงทิศทางของเวกเตอร์ จากภาพที่ 1.7 แสดงเส้นตรงที่ใช้แทนเวกเตอร์อันหนึ่งซึ่งวางอยู่ 3 ตำแหน่ง พบว่า เส้นตรงแต่ละเส้นจะมีทั้งขนาดและทิศทางเหมือนกัน จึงเป็นเส้นตรงที่ใช้แทนเวกเตอร์เดียวกัน

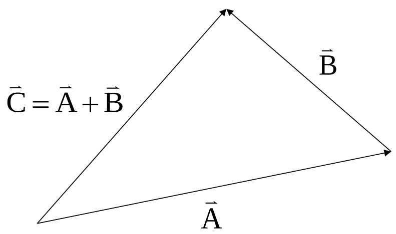


ภาพที่ 1.7 เส้นตรงใช้แทนเวกเตอร์
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 56)

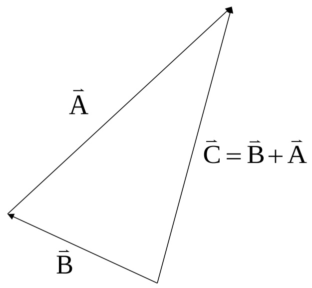
นอกจากปริมาณเวกเตอร์แล้วจะมีปริมาณบางปริมาณที่ไม่มีทิศทางเข้ามาเกี่ยวข้องแต่สามารถอธิบายปริมาณทางฟิสิกส์นั้นๆได้อย่างสมบูรณ์ด้วยตัวเลขเพียงอย่างเดียวเท่านั้น เรียกปริมาณนี้ว่า “สเกลาร์ (Scalars)” เช่น มวล ปริมาตร ความหนาแน่น ความดัน และอุณหภูมิ เป็นต้น การคำนวณทางคณิตศาสตร์ของปริมาณสเกลาร์จะเหมือนกับการคำนวณทั่วๆ ไป ส่วนการคำนวณปริมาณเวกเตอร์จะต้องคำนึงถึงทิศทางของปริมาณนั้นๆ ด้วย จึงเรียกการคำนวณแบบนี้ว่า “พีชคณิตเวกเตอร์ (Vector algebra)”

สำหรับขนาดของเวกเตอร์สามารถหาได้จากความยาวของเส้นตรง และบ่งบอกทิศทางด้วยหัวลูกศรที่ปลายเส้นตรงดังกล่าว เรียกระยะที่ได้นี้ว่า “การกระจัดของเวกเตอร์ (Displacement vector)” ซึ่งแทนด้วย $\vec{s}$ ส่วนความเร็วแทนด้วย $\vec{v}$ โดยลูกศรเหนืออักษรใช้แสดงว่าปริมาณดังกล่าวเป็นปริมาณเวกเตอร์ โดยทั่วไปแทนขนาดของเวกเตอร์ $\vec{s}$ และ $\vec{v}$ ด้วย s และ v ตามลำดับ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับปริมาณเวกเตอร์เป็น $s = |\vec{s}|$ และ $v = |\vec{v}|$ การทราบขนาดจะได้ข้อมูลเพียงบางส่วนของเวกเตอร์เท่านั้น เราจะสามารถอธิบายปริมาณดังกล่าวได้อย่างสมบูรณ์เมื่อทราบทิศทางของปริมาณดังกล่าวด้วย

1.7 การบวกเวกเตอร์ (Vector addition)



ภาพที่ 1.8 การบวกเวกเตอร์โดยบวก $\vec{A}$ ด้วย $\vec{B}$
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 56)



ภาพที่ 1.9 การบวกเวกเตอร์โดยบวก $\vec{B}$ ด้วย $\vec{A}$
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 56)

การบวกปริมาณเวกเตอร์จะแตกต่างจากการบวกทางคณิตศาสตร์ทั่วๆไป จึงต้องคำนึงถึงทั้งขนาดและทิศทางของเวกเตอร์นั้น วิธีที่สะดวกและง่าย คือ การวาดกราฟของเวกเตอร์เหล่านั้นด้วยสเกลที่แน่นอนสเกลหนึ่ง เช่น การบวก $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยกำหนดให้ 1 เซนติเมตรเท่ากับการกระจัด 1 กิโลเมตร จะเริ่มวาดเส้นตรงที่ลากจากจุดเริ่มต้นไปยังปลาย $\vec{B}$ ทำให้ $\vec{C}$ มีค่าดังสมการ

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.3}$$

เมื่อ $\vec{C}$ คือ ผลรวมของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยสมการ (1.3) จะใช้ได้กรณีที่เวกเตอร์ทั้งสองมีหน่วยเหมือนกัน สำหรับกรณีที่เวกเตอร์มีหน่วยต่างกัน เช่น การบวกการกระจัดกับความเร็วจะไม่สามารถใช้สมการ (1.3) วิเคราะห์ได้ และการวิเคราะห์จะยุ่งยากมากกว่า จึงต้องระมัดระวังกรณีดังกล่าวด้วย

การบวกเวกเตอร์สามารถสลับที่กันได้ (Commutative) ดังสมการ

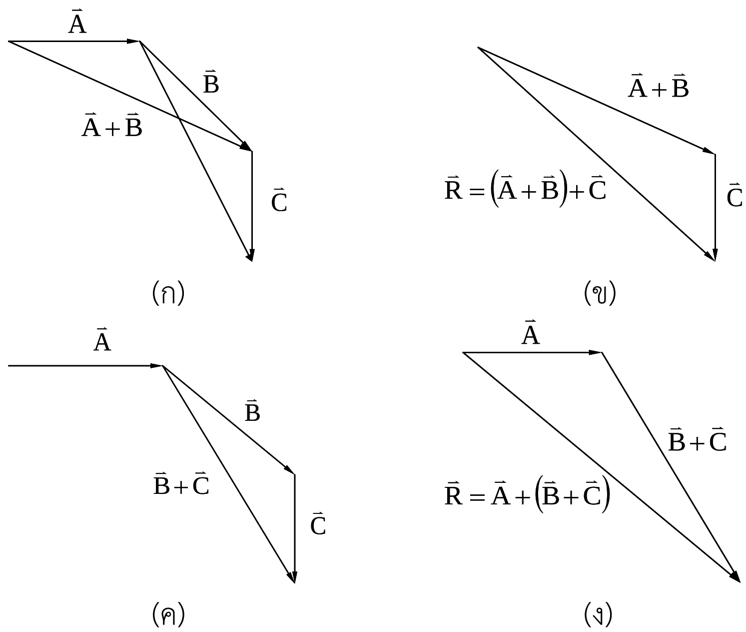
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.4}$$

จากภาพที่ 1.8 เป็นการบวกเวกเตอร์โดยเริ่มจาก $\vec{A}$ แล้วบวกด้วย $\vec{B}$ ส่วนภาพที่ 1.9 เป็นการบวก $\vec{B}$ ด้วย $\vec{A}$ ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เท่ากับกรณีแรก

การบวกเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์ สามารถสลับกลุ่มกันได้ (Associative) เช่น การบวก $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ โดยนำ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มาบวกกันก่อนแล้วจึงนำผลลัพธ์มาบวกด้วย $\vec{C}$ ดัง ภาพที่ 1.10

(ก) และ (ข) ส่วนภาพที่ 1.10 (ค) และ (ง) เป็นการบวกเวกเตอร์โดยนำ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ มาบวกกันก่อนแล้วนำผลที่ได้มาบวกกับ $\vec{A}$ ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

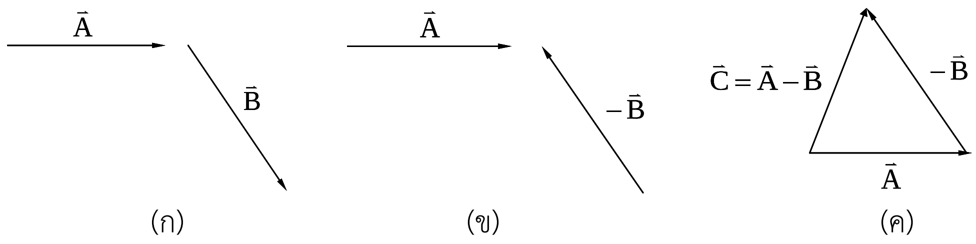
$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) \tag{1.5}$$



ภาพที่ 1.10 การจัดกลุ่มบวกเวกเตอร์
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 57)

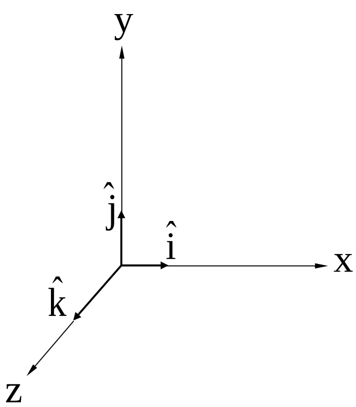
การลบเวกเตอร์ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกับการบวกเวกเตอร์ โดยเวกเตอร์ที่จะนำมาบวกจะเป็นส่วนกลับของเวกเตอร์ หรือมีขนาดเท่ากับเวกเตอร์แต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังตัวอย่างการลบ $\vec{A}$ ด้วย $\vec{B}$ ดังภาพที่ 1.11 (ก) โดยส่วนกลับของ $\vec{B}$ แสดงในภาพที่ 1.11 (ข) จะได้ผลลัพธ์ของการบวกเวกเตอร์ดังภาพที่ 1.11 (ค) ซึ่งมีความสัมพันธ์ตามสมการ

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \tag{1.6}$$



ภาพที่ 1.11 การลบ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 57)

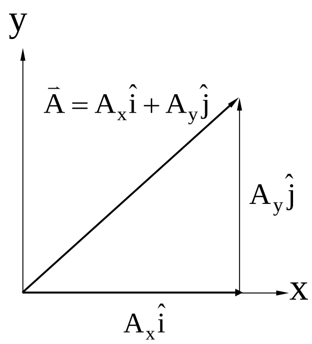
การคูณปริมาณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์จะสามารถหาผลลัพธ์ได้จากกฎการบวกเวกเตอร์เช่น $3\vec{A} = \vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$ หรือสามารถเขียนในภาพทั่วๆไปได้ $\left|s\vec{A}\right| = \left|s\right| \cdot \left|\vec{A}\right|$ โดยทิศทางของผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นกับเครื่องหมายของ s เมื่อ s เป็นบวกทิศทางของ $s\vec{A}$ จะมีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ ถ้า s มีค่าเป็นลบผลลัพธ์ที่ได้จะมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{A}$ การหารปริมาณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์สามารถหาผลลัพธ์ได้ทำนองเดียวกับการคูณ



ภาพที่ 1.12 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)

เพื่อเพิ่มความสะดวกและสามารถแบ่งปริมาณทางฟิสิกส์ระหว่างปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น จึงกำหนดเทอมเฉพาะขึ้นมาเพื่อบ่งบอกทิศทางซึ่งมีขนาดเท่ากับหนึ่งและไม่มีหน่วยเรียกว่า “เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector)” โดยใช้ สัญลักษณ์ “^” เป็นตัวกำหนด เช่น $\hat{V}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของความเร็ว สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากแสดงดังภาพที่ 1.12 กำหนดให้ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแกน x, y และ z ตามลำดับ สามารถเขียน $\vec{A}$ ใดๆ ให้อยู่ในเทอมของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้

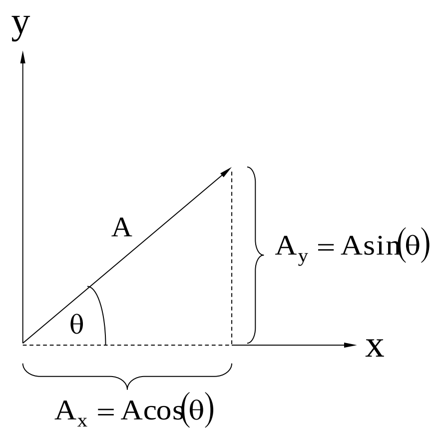
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \tag{1.7}$$



ภาพที่ 1.13 เวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)

เมื่อ A_x , A_y และ A_z คือเวกเตอร์ประกอบ (Component vector) $\vec{A}$ ตามแกน x , y และ z ตามลำดับ ถ้า A_x มีค่าเป็นบวกจะมีทิศทางตามแกน +x แต่ถ้ามีค่าเป็นลบจะมีทิศทางตามแกน -x ในกรณี A_y และ A_z สามารถพิจารณาได้เช่นเดียวกัน จากภาพที่ 1.13 จะได้เวกเตอร์ประกอบในกรณี 2 มิติ ดังสมการ

$$A_x = A\cos(\theta) \qquad \text{และ} \qquad A_y = A\sin(\theta) \tag{1.8}$$



ภาพที่ 1.14 เวกเตอร์ประกอบตามแกน x และ y
ที่มา (ปรับปรุงจาก Serway, 2008, หน้า 60)

เมื่อ A_x และ A_y คือเวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$ ตามแกน x และ y ตามลำดับ หรือเขียนความสัมพันธ์ได้ดังภาพที่ 1.14 ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ตามแกน x ที่ $\theta = 0$ ดังนั้น $A_x = A$ ในขณะที่ $A_y = 0$ ถ้าทราบค่า A_x และ A_y สามารถหาขนาดและทิศทางของ $\vec{A}$ ได้
โดยมีขนาดเท่ากับ

$$\left|A\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

และ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{1.9}$$

การบวก $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ได้ผลลัพธ์เป็น $\vec{C}$ และเวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A} + \vec{B}$ มีค่าเท่ากันนั่นคือ

$$\begin{aligned} C_x\hat{i} + C_y\hat{j} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \end{aligned} \tag{1.10}$$

พบว่า

$$C_x = A_x + B_x$$

และ

$$C_y = A_y + B_y \tag{1.11}$$

สำหรับการบวกเวกเตอร์ในสามมิติจะได้

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= (A_x + B_x)\,\hat{i} + (A_y + B_y)\,\hat{j} + (A_z + B_z)\,\hat{k} \end{aligned} \tag{1.12}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 รถยนต์คันหนึ่งเริ่มเคลื่อนที่ทำมุม 30° กับทิศตะวันออกไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 8 กิโลเมตร และวิ่งต่อไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 70° กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร จงหาการกระจัดที่รถยนต์คันดังกล่าววิ่งได้

วิธีทำ กำหนดให้แกน $+x$ คือ ทิศตะวันออกและ $+y$ คือทิศเหนือ และแทนการกระจัดที่รถยนต์วิ่งด้วย $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.2 (ก) โดย $\vec{A}$ แทนการวิ่งช่วงแรก และ $\vec{B}$ แทนการวิ่งช่วงที่สอง พบว่า $\vec{B}$ จะทำมุมกับแกน x เท่ากับ 160° จากภาพที่ 1.15 (ข) และ (ค) สามารถหาเวกเตอร์ประกอบได้

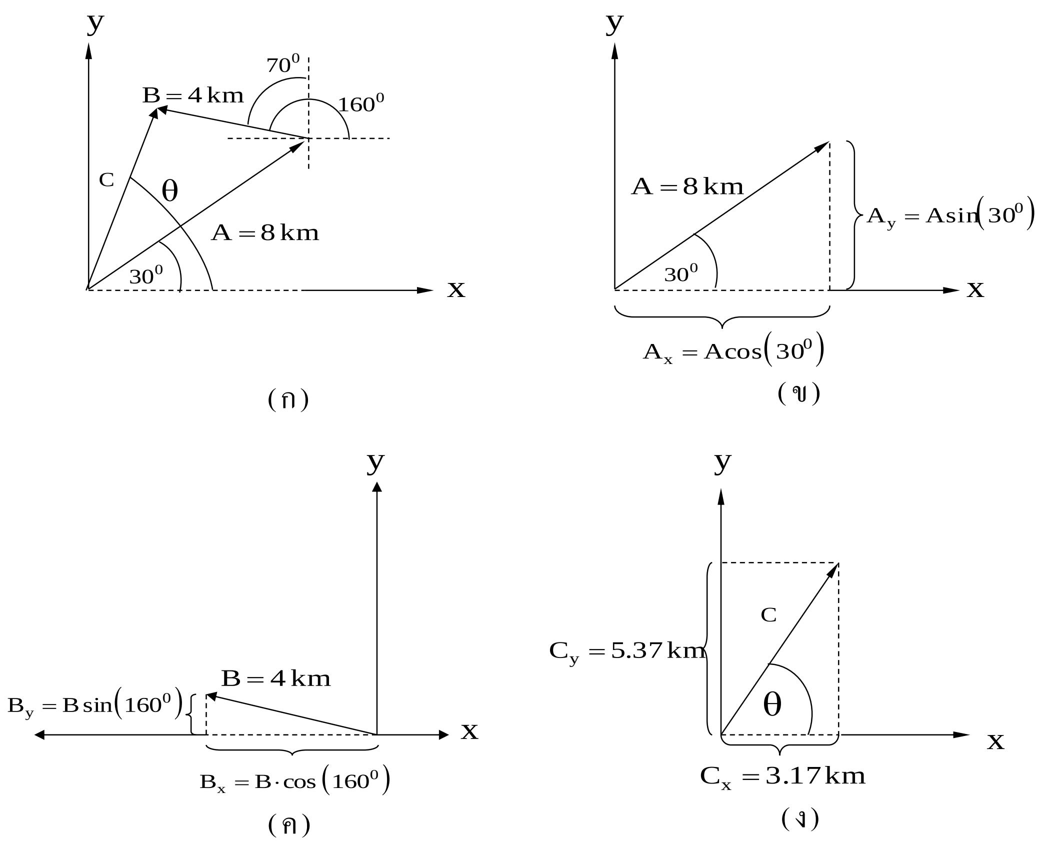
$$A_x = A\cos(\theta) = 8.0\cos(30^{\circ}) = 6.93 \text{ km}$$
$$A_y = A\sin(\theta) = 8.0\sin(30^{\circ}) = 4.0 \text{ km}$$
$$B_x = B\cos(\theta) = 4.0\cos(160^{\circ}) = 3.76 \text{ km}$$
$$B_y = B\sin(\theta) = 4.0\sin(160^{\circ}) = 1.37 \text{ km}$$

และได้เวกเตอร์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์คือ

$$C_x = A_x + B_x = 6.93 - 3.76 = 3.17 \text{ km}$$
$$C_y = A_y + B_y = 4.00 + 1.37 = 5.37 \text{ km}$$

นั่นคือ

$$C = 3.17\,\hat{i} + 5.37\,\hat{j}$$



ภาพที่ 1.15 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.2

ซึ่งมีขนาดเท่ากับ

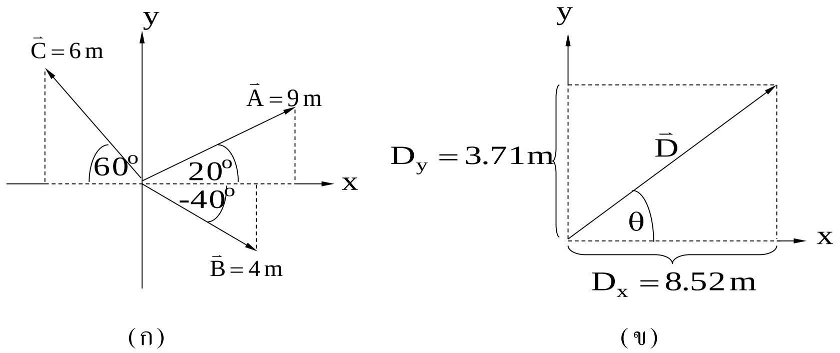
$$|C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(3.17)^2 + (5.37)^2} = 6.23\,\text{km}$$

และ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.37}{3.17}\right) = 59.4^{\circ}$$

จะได้การกระจัดของรถยนต์เท่ากับ 6.23 km ทำมุม 59.4° กับทิศตะวันออก

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาผลบวกของเวกเตอร์ต่อไปนี้



ภาพที่ 1.16 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.3

$\vec{A}$ = 9 m ทำมุม 20° กับแกน + x

$\vec{B}$ = 4 m ทำมุม -40° กับแกน + x

และ $\vec{C}$ = 6 m ทำมุม 60° กับแกน – x

<u>วิธีทำ</u> สามารถวาดเวกเตอร์ได้ดังภาพที่ 1.16 (ก) และจะได้เวกเตอร์ประกอบดังนี้

$A_x = A\cos(\theta) = 9.0\cos(20^{\circ}) = 8.46$ m

$A_y = A\sin(\theta) = 9.0\sin(20^{\circ}) = 3.08$ m

$B_x = B\cos(\theta) = 4.0\cos(-40^{\circ}) = 3.06$ m

$B_y = B\sin(\theta) = 4.0\sin(-40^{\circ}) = -2.57$ m

$C_x = C\cos(\theta) = 6.0\cos(60^{\circ}) = -3.0$ m

$C_y = C\sin(\theta) = 6.0\sin(60^{\circ}) = 5.2$ m

และเวกเตอร์ประกอบของเวกเตอร์ลัพธ์ดังภาพที่ 1.16 (ข) คือ

$D_x = A_x + B_x + C_x = (8.46 + 3.06 - 3.0) = 8.52$ m

$D_y = A_y + B_y + C_y = (3.08 - 2.57 + 5.2) = 5.71$ m

ดังนั้นขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(8.52)^2 + (5.71)^2} = 10.26\,\text{m}$$

และ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.71}{8.52}\right) = 33.83^{\circ}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.4</u> จงหาผลรวมของเวกเตอร์ต่อไปนี้

$\vec{A}$ = (-4.0 km)$\hat{i}$ + (1.0 km) $\hat{j}$ $\vec{B}$ = (2.0 km)$\hat{i}$ + (2.0 km) $\hat{j}$ และ $\vec{C}$ = (1.0 km)$\hat{i}$

<u>วิธีทำ</u> ผลรวมเวกเตอร์คือ

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \\ &= (-4.0\hat{i} + 1.0\hat{j}) + (2.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) + (1.0\hat{i}) \\ &= (-4.0 + 2.0 + 1.0)\hat{i} + (1.0 + 2.0)\hat{j} \\ &= -1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}\end{aligned}$$

ขนาดของ $\vec{D}$ คือ

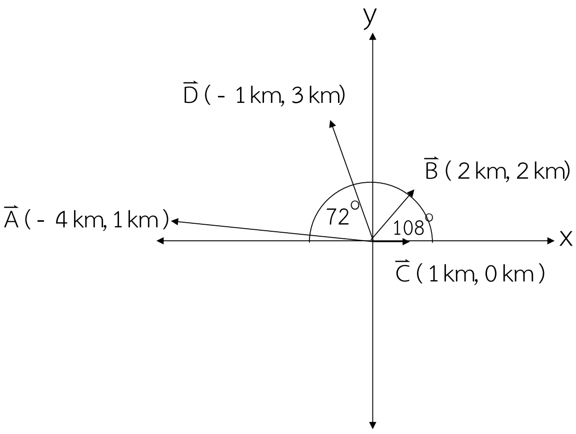
$$|D| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$$

= 3.16 กิโลเมตร

และ

$$\begin{aligned}\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{-1}\right) = -71.6^{\circ} \cong -72^{\circ}\end{aligned}$$

หรือเวกเตอร์ทำมุม 180 - 72 = 108° กับแกน x ดังภาพที่ 1.17

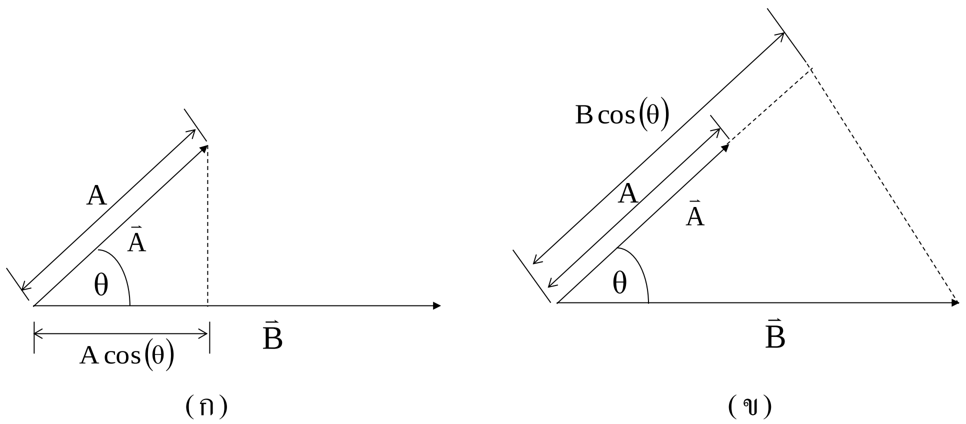


ภาพที่ 1.17 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.4

1.8 การคูณเวกเตอร์ (Vector multiplication)

การคูณเวกเตอร์จำนวน 2 จำนวน มีผลลัพธ์เป็นได้ทั้งปริมาณเวกเตอร์และสเกลาร์ ซึ่งขึ้นอยู่กับวิธีการคูณ กล่าวคือ

1.8.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product)



ภาพที่ 1.18 แสดงการคูณเวกเตอร์
ที่มา (ปรับปรุงจาก สมพงษ์ ใจดี, 2548, หน้า 12)

จากภาพที่ 1.18 $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดเดียวกัน และทำมุมระหว่างกันเท่ากับ θ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar product) หรือ $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ($\vec{A}$ dot $\vec{B}$) คือ

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta) \tag{1.13}$$

เรียกผลลัพธ์นี้ว่า ผลคูณแบบจุด (Dot product) เมื่อ A และ B เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตามลำดับ และพบว่าการคูณเชิงสเกลาร์ สามารถสลับที่กันได้ (Commutative) นั่นคือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \tag{1.14}$$

การคูณเชิงสเกลาร์จะเท่ากับผลคูณขององค์ประกอบของเวกเตอร์ซึ่งอยู่ในทิศทางเดียวกัน ดังตัวอย่างในภาพที่ 1.18 (ก) ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{A} \cdot \vec{B}$ เกิดจากการคูณขององค์ประกอบของ $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ นั่นคือ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = [A\cos(\theta)]B = AB\cos(\theta)$$

ส่วนภาพที่ 1.18 (ข) $\vec{B} \cdot \vec{A}$ เกิดจากผลคูณขององค์ประกอบของ $\vec{B}$ กับ $\vec{A}$ ดังนั้น

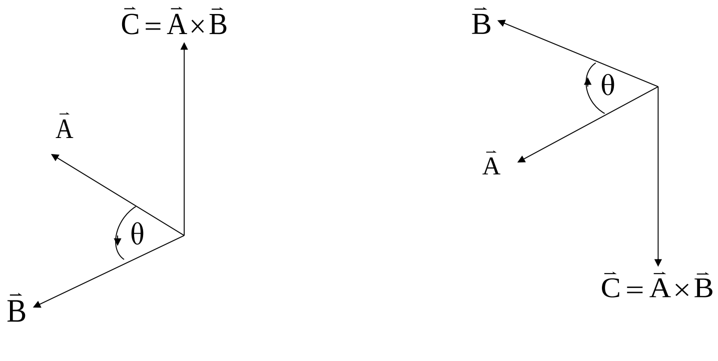
$$\vec{B} \cdot \vec{A} = [B\cos(\theta)]\,A = AB\cos(\theta)$$

ถ้า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$ จะทำให้ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

1.8.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector Product)

สำหรับการคูณเชิงเวกเตอร์ (Vector product) ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ($\vec{A}$ cross $\vec{B}$) บางครั้งจะเรียกผลคูณนี้ว่า ผลคูณไขว้ (Cross product) จะได้

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin(\theta) \tag{1.15}$$



ภาพที่ 1.19 แสดงทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ของการคูณไขว้
ที่มา (ปรับปรุงจาก Halliday, Resnick & Walker, 2007, หน้า 50)

เมื่อ θ มีค่าน้อยๆ และทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ จะตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ซึ่งสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ได้จากกฎมือขวา (Right - Hand rule) ดังภาพที่ 1.19 (ก) เมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีจุดร่วมกัน เมื่อให้นิ้วทั้งสี่ชี้ตามทิศทางของ $\vec{A}$ แล้วกวาดไปยังทิศทางของ $\vec{B}$ จะได้ทิศทางของ $\vec{C}$ มีทิศทางตามทิศของนิ้วหัวแม่มือ แต่ถ้าหมุนในลักษณะตรงกันข้ามโดยหมุนจากทิศทางของ $\vec{B}$ ไปยังทิศทางของ $\vec{A}$ การหมุนแบบนี้จะขัดกับความรู้สึก ($\vec{B}\times\vec{A}$) คือไม่สามารถกำมือได้จึงต้องจัดวางมือใหม่โดยให้นิ้วหัวแม่มือชี้ลงดังภาพที่ 1.19 (ข) ชี้นิ้วทั้งสี่ตามทิศทางของ $\vec{B}$ แล้วกวาดไปยังทิศทางของ $\vec{A}$ ซึ่งจะได้ $\vec{C}$ ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับกรณีแรก ดังนั้น

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B} \qquad (1.16)$$

ถ้าคูณปริมาณสเกลาร์ s กับเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งจะได้ผลคูณไขว้ดังสมการ

$$\vec{A}\times(s\vec{B})=(s\vec{A})\times\vec{B}=s.(\vec{A}\times\vec{B}) \qquad (1.17)$$

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีทิศทางตั้งฉากกันจะได้ผลคูณไขว้คือ

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB \qquad \text{เมื่อ} \qquad \vec{A}\perp\vec{B} \qquad (1.18ก)$$

ถ้า $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ จะได้

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad (\vec{A}//\vec{B}) \qquad (1.18ข)$$

การคูณเวกเตอร์จะเป็นไปตามกฎของการกระจาย (Distribution law) ดังนั้น

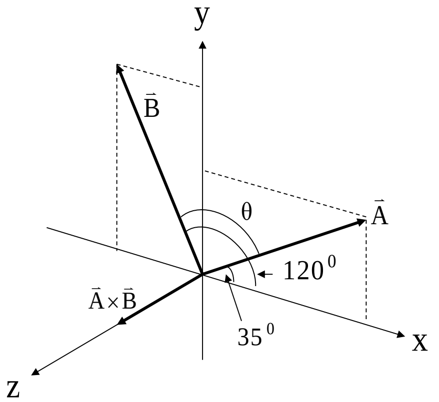
$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C}) \qquad (1.19)$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.5</u> เมื่อ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ อยู่บนระนาบ xy โดย $\vec{A}$ มีขนาด 2 เมตร และทำมุม 35° กับแกน + x ขณะที่ $\vec{B}$ มีขนาด 3 เมตร ทำมุม 120° กับ แกน +x จงหา

ก) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ข) $\vec{A}\times\vec{B}$ และ $\vec{B}\times\vec{A}$

<u>วิธีทำ</u> ก) $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แสดงดังภาพที่ 1.20 มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองเท่ากับ
$\theta = 120^\circ - 35^\circ = 85^\circ$ จากสมการ (1.13) จะได้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta) = (2)(3)\cos(85^\circ) = 0.52 \text{ m}$$



ภาพที่ 1.20 ภาพประกอบตัวอย่างที่ 1.5

ข) ผลของการคูณไขว้หาได้จากสมการ (1.15)

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin(\theta) = (2)(3)\sin(85^\circ) = 5.98 \text{ m}$$

ทิศทางของ $\vec{A}\times\vec{B}$ จะตั้งฉากกับระนาบ xy นั่นคือมีทิศทางตามแกน + z ดังนั้น

$$\vec{A}\times\vec{B} = 5.98\hat{k}$$

ส่วนขนาดของ $\vec{B}\times\vec{A}$ จะเท่ากับขนาดของ $\vec{A}\times\vec{B}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นทิศทางของ $\vec{B}\times\vec{A}$ จะอยู่ในแนวแกน – z

ถ้าพิจารณาการคูณ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ในเทอมของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ จากการศึกษาที่ผ่านมาจะได้ผลคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณสเกลาร์ คือ

$$s\vec{A} = s\,(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) = (sA_x\hat{i} + sA_y\hat{j} + sA_z\hat{k}) \tag{1.20}$$

สำหรับการคูณแบบจุดจะได้

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \tag{1.21ก}$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \tag{1.21ข}$$

และผลคูณแบบจุดของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ จะได้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.22}$$

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เท่ากัน จะได้

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{1.23}$$

ดังนั้น

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A.A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.24}$$

สำหรับผลคูณไขว้ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \qquad (1.25ก)$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k} \qquad (1.25ข)$$
$$\hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i} \qquad (1.25ค)$$
$$\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j} \qquad (1.25ง)$$

และผลคูณไขว้ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.26}$$

จากสมการ (1.26) สามารถเขียนในภาพของดีเทอร์มิแนนต์ได้

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

หรือเขียนในภาพผลคูณของเมทริกซ์ได้

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.27}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.6</u> เมื่อ $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j}$ และ $\vec{B} = 2\hat{i} + 6\hat{j}$ จงคำนวณหาผลคูณแบบจุดและผลคูณไขว้

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ (1.22) จะได้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y = (1)(2) + (-2)(6) = -10$$

และจากสมการ (1.23) จะได้

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$= [(-2)(0) - (0)(6)]\,\hat{i} + [(1)(0) - (2)(0)]\,\hat{j} + [(1)(6) - (-2)(2)]\,\hat{k}$$

$$= 10\hat{k}$$

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B} = -10\hat{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.7</u> กำหนดให้ $\vec{A} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ และ $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

จงคำนวณ 1) $\vec{A}+\vec{B}$ 2) $\vec{A}-\vec{B}$ 3) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

4) $\vec{A}\times\vec{B}$ 5) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 6) $\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$

7) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 8) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

<u>วิธีทำ</u> 1) $\vec{A}+\vec{B} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (-5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= (4 + (-5))\hat{i} + ((-2) + 3)\hat{j} + (3 + 6)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + \hat{j} + 9\hat{k}$$

2) $\vec{A}-\vec{B} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (-5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= (4 - (-5))\hat{i} + ((-2) - 3)\hat{j} + (3 - 6)\hat{k}$$

$$= 9\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$$

3) $\vec{A}\cdot\vec{B} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})\cdot(-5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= ((4\hat{i})\cdot(-5\hat{i})) + ((-2\hat{j})\cdot(3\hat{j})) + ((3\hat{k})\cdot(6\hat{k}))$$

$$= (-20) + (-6) + (18)$$

$$= -8$$

4) $\vec{A}\times\vec{B} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})\times(-5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$= [(6)(-2)\hat{i} + (-5)(3)\hat{j} + (3)(4)\hat{k}] - [(3)(3)\hat{i} + (6)(4)\hat{j} + (-5)(-2)\hat{k}]$

$= [-12\hat{i} - 15\hat{j} + 12\hat{k}] - [9\hat{i} + 24\hat{j} + 10\hat{k}]$

$= -21\hat{i} - 39\hat{j} + 2\hat{k}$

5) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ เริ่มหาจาก $\vec{B} \times \vec{C}$

$\vec{B} \times \vec{C} = (-5\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= [(3)(-2)\hat{i} + (1)(6)\hat{j} + (3)(-5)\hat{k}] - [(6)(3)\hat{i} + (-5)(-2)\hat{j} + (1)(3)\hat{k}]$

$= [-6\hat{i} + 6\hat{j} - 15\hat{k}] - [18\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k}]$

$= -24\hat{i} - 4\hat{j} - 18\hat{k}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-24\hat{i} - 4\hat{j} - 18\hat{k})$

$= ((4\hat{i}) \cdot (-24\hat{i})) + ((-2\hat{j}) \cdot (-4\hat{j})) + ((3\hat{k}) \cdot (-18\hat{k}))$

$= (-96) + (8) + (-54)$

$= -142$

6) $\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A})$ เริ่มหาจาก $\vec{B} \times \vec{A}$

$\vec{B} \times \vec{A} = (-5\,\hat{i} + 3\,\hat{j} + 6\,\hat{k}) \times (4\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 3\,\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$= [(3)(3)\hat{i} + (4)(6)\hat{j} + (-2)(-5)\hat{k}] - [(6)(-2)\hat{i} + (-5)(3)\hat{j} + (4)(3)\hat{k}]$

$= [9\hat{i} + 24\hat{j} + 10\hat{k}] - [-12\hat{i} - 15\hat{j} + 12\hat{k}]$

$= 21\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (21\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k})$

$= ((\hat{i}) \cdot (21\hat{i})) + ((3\hat{j}) \cdot (39\hat{j})) + ((-2\hat{k}) \cdot (-2\hat{k}))$

$= (21) + (117) + (4)$

$= 142$

7) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ เริ่มหาจาก $\vec{B}\times\vec{C}$

$$\vec{B}\times\vec{C}=(-5\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ -5 & 3 & 6 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$=[(3)(-2)\hat{i}+(1)(6)\hat{j}+(3)(-5)\hat{k}]-[(6)(3)\hat{i}+(-5)(-2)\hat{j}+(1)(3)\hat{k}]$$

$$=[-6\hat{i}+6\hat{j}-15\hat{k}]-[18\hat{i}+10\hat{j}+3\hat{k}]$$

$$=-24\hat{i}-4\hat{j}-18\hat{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})\times(-24\hat{i}-4\hat{j}-18\hat{k})$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ -24 & -4 & -18 & -24 & -4 \end{array}\right|$$

$$=[(-18)(-2)\hat{i}+(3)(-24)\hat{j}+(4)(-4)\hat{k}]$$

$$-[(-4)(3)\hat{i}+(-18)(4)\hat{j}+(-24)(-2)\hat{k}]$$

$$=[36\hat{i}-72\hat{j}-16\hat{k}]-[-12\hat{i}-72\hat{j}+48\hat{k}]$$

$$=48\hat{i}-64\hat{k}$$

8) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ เริ่มหาจาก $\vec{A}\times\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})\times(-5\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \\ -5 & 3 & 6 & -5 & 3 \end{array}\right|$$

$$=[(6)(-2)\hat{i}+(-5)(3)\hat{j}+(3)(4)\hat{k}]-[(3)(3)\hat{i}+(6)(4)\hat{j}+(-5)(-2)\hat{k}]$$

$$=[-12\hat{i}-15\hat{j}+12\hat{k}]-[9\hat{i}+24\hat{j}+10\hat{k}]$$

$$=-21\hat{i}-39\hat{j}+2\hat{k}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(-21\hat{i}-39\hat{j}+2\hat{k})\times(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ -21 & -39 & 2 & -21 & -39 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$=[(-39)(-2)\hat{i}+(1)(2)\hat{j}+(-21)(3)\hat{k}]-[(2)(3)\hat{i}+(-21)(-2)\hat{j}+(1)(-39)\hat{k}]$$

$$=[78\hat{i}+2\hat{j}-63\hat{k}]-[6\hat{i}+42\hat{j}-39\hat{k}]$$

$$= 72\hat{i} - 40\hat{j} - 24\hat{k}$$

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $\vec{A} = 2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}$ จงคำนวณหา

1) $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}$ 2) $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}$ 3) $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^2}$ 4) $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y^2}$

5) $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y}$ 6) หาปริพันธ์ของ $\vec{A}$ จาก 0 ถึง x

วิธีทำ 1)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial[2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial[2xy\hat{i}]}{\partial x} - \frac{\partial[3y^2\hat{j}]}{\partial x} + \frac{\partial[4x^2\hat{k}]}{\partial x}$$

$$= 2y\hat{i} + 8x\hat{k}$$

2)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial[2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial[2xy\hat{i}]}{\partial y} - \frac{\partial[3y^2\hat{j}]}{\partial y} + \frac{\partial[4x^2\hat{k}]}{\partial y}$$

$$= 2x\hat{i} - 6y\hat{j}$$

3)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial[2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial[2xy\hat{i}]}{\partial x^2} - \frac{\partial[3y^2\hat{j}]}{\partial x^2} + \frac{\partial[4x^2\hat{k}]}{\partial x^2}$$

$$= 4\hat{k}$$

4)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial[2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial[2xy\hat{i}]}{\partial y^2} - \frac{\partial[3y^2\hat{j}]}{\partial y^2} + \frac{\partial[4x^2\hat{k}]}{\partial y^2}$$

$$= -3\hat{j}$$

5)
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial [2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]}{\partial x \partial y}$$
$$= \frac{\partial [2xy\hat{i}]}{\partial x \partial y} - \frac{\partial [3y^2\hat{j}]}{\partial x \partial y} + \frac{\partial [4x^2\hat{k}]}{\partial x \partial y}$$
$$= 2\hat{i}$$

6) หาปริพันธ์ของ $\vec{A}$ จาก 0 ถึง x

$$\int_0^x \vec{A} dx = \int_0^x [2xy\hat{i} - 3y^2\hat{j} + 4x^2\hat{k}]\, dx$$
$$= \left[\int_0^x 2xy\, dx\right]\hat{i} - \left[\int_0^x 3y^2\, dx\right]\hat{j} + \left[\int_0^x 4x^2\, dx\right]\hat{k}$$
$$= 2y\left[\int_0^x x\, dx\right]\hat{i} - 3y^2\left[\int_0^x dx\right]\hat{j} + 4\left[\int_0^x x^2\, dx\right]\hat{k}$$
$$= 2y\left[\frac{x^2}{2}\right]\hat{i} - 3y^2[x]\,\hat{j} + 4\left[\frac{x^3}{3}\right]\hat{k}$$
$$= x^2y\hat{i} - 3xy^2\hat{j} + 4\frac{x^3}{3}\hat{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.9</u> ถ้า $\vec{A} = 2xy\hat{i} - yz\hat{j} + x^2z\hat{k}$ จงหา $\nabla \cdot \vec{A}$ และ $\nabla \times \vec{A}$

<u>วิธีทำ</u>
$$\nabla \cdot \vec{A} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{k}\right][2xy\hat{i} - yz\hat{j} + x^2z\hat{k}]$$
$$= \frac{\partial(2xy)}{\partial x}(\hat{i}\cdot\hat{i}) + \frac{\partial(-yz)}{\partial x}(\hat{i}\cdot\hat{j}) + \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}(\hat{i}\cdot\hat{k})$$
$$+ \frac{\partial(2xy)}{\partial x}(\hat{j}\cdot\hat{i}) + \frac{\partial(-yz)}{\partial x}(\hat{j}\cdot\hat{j}) + \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}(\hat{j}\cdot\hat{k})$$
$$+ \frac{\partial(2xy)}{\partial x}(\hat{k}\cdot\hat{i}) + \frac{\partial(-yz)}{\partial x}(\hat{k}\cdot\hat{j}) + \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}(\hat{k}\cdot\hat{k})$$
$$= 2y + 0 + 0 + 0 - z + 0 + 0 + 0 + x^2$$
$$= x^2 + 2y - z$$

$$\nabla\times\vec{A}=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{k}\right]\times[2xy\hat{i}-yz\hat{j}+x^2z\hat{k}]$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & -yz & x^2z & 2xy & -yz \end{array}\right|$$

$$=\left[\frac{\partial(x^2z)}{\partial y}\hat{i}+\frac{\partial(2xy)}{\partial z}\hat{j}+\frac{\partial(-yz)}{\partial x}\hat{k}\right]$$

$$-\left[\frac{\partial(-yz)}{\partial z}\hat{i}+\frac{\partial(x^2z)}{\partial x}\hat{j}+\frac{\partial(2xy)}{\partial y}\hat{k}\right]$$

$$=[0+0+0]-[-y\hat{i}+2xz\hat{j}+2x\hat{k}]$$

$$=y\hat{i}-2xz\hat{j}-2x\hat{k}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.10</u> จงคำนวณเกรเดียนต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x,y,z)=x^3y^2z^4$ 2) $f(x,y,z)=xy^{-2}z^2$

<u>วิธีทำ</u> 1) หา

$$\nabla f=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{k}\right][x^3y^2z^4]$$

$$=\frac{\partial(x^3y^2z^4)}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial(x^3y^2z^4)}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial(x^3y^2z^4)}{\partial z}\hat{k}$$

$$=3x^2y^2z^4\hat{i}+2x^3yz^4\hat{j}+4x^3y^2z^3\hat{k}$$

2) หา

$$\nabla f=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{k}\right][xy^{-2}z^2]$$

$$=\frac{\partial(xy^{-2}z^2)}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial(xy^{-2}z^2)}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial(xy^{-2}z^2)}{\partial z}\hat{k}$$

$$=y^{-2}z^2\hat{i}-2xy^{-1}z^2\hat{j}+2xy^{-2}z\hat{k}$$

ตัวอย่างที่ 1.11 จงคำนวณลาปลาสเซียนของ

1) $F = 4x^2y$　　　　2) $\vec{F} = 2x\hat{i} - 3y^2x\hat{j} + x^2y^2\hat{k}$

วิธีทำ　　1) หา

$$\nabla^2 f = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right][4x^2y]$$

$$= \frac{\partial^2(4x^2y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(4x^2y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(4x^2y)}{\partial z^2}$$

$$= 8y + 0 + 0$$

$$= 8y$$

2) หา

$$\nabla^2 f = \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right][2x\hat{i} - 3y^2x\hat{j} + x^2y^2\hat{k}]$$

$$= \frac{\partial^2(2x\hat{i} - 3y^2x\hat{j} + x^2y^2\hat{k})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(2x\hat{i} - 3y^2x\hat{j} + x^2y^2\hat{k})}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{\partial^2(2x\hat{i} - 3y^2x\hat{j} + x^2y^2\hat{k})}{\partial z^2}$$

$$= (0 - 0 + 2y^2\hat{k}) + (0 - 6x\hat{j} + 2x^2\hat{k}) + (0 - 0 + 0)$$

$$= -6x\hat{j} + 2(x^2 + y^2)\hat{k}$$

สรุป

1. เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{C}$ ของสองเวกเตอร์ $\vec{A}+\vec{B}$ มุมระหว่างเวกเตอร์เป็น θ หาได้โดยสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนานหรือกฎของโคไซน์ คือ

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

2. เวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถเขียนเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบในระบบพิกัดฉาก

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

โดยที่

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

3. ผลคูณสเกลาร์นิยามว่า

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

4. ผลคูณสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากเขียนเป็น

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

5. ผลคูณเวกเตอร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{A}\times\vec{B}$ อ่านว่า “ $\vec{A}$ ครอส $\vec{B}$ ” นั่นคือถ้า

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

แล้ว

$$C = AB\sin\theta$$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ x เป็นระยะทาง v เป็นความเร็ว a เป็นความเร่ง และ t เป็นเวลา จงใช้การวิเคราะห์มิติตรวจสอบความถูกต้องของสมการต่อไปนี้

   (ก) $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

   (ข) $x - x_0 = vt$

   (ค) $v = v_0 + at$

   (ง) $x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

2. รัศมีเฉลี่ยของโลกคือ 6.37×10^6 m และของดวงอาทิตย์คือ 6.96×10^8 m จงคำนวณหา
   ก) อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของโลกกับดวงอาทิตย์
   ข) อัตราส่วนของปริมาตรของโลกกับดวงอาทิตย์

ตอบ ก) 0.85×10^{-4}, ข) 0.61×10^{-6}

3. ถ้าจินตนาการว่าโปรตอนมีลักษณะเป็นทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 3×10^{-13} cm และมีมวลเท่ากับ 1.67×10^{-24} kg จงหาความหนาแน่นของโปรตอนในหน่วย SI

ตอบ 1.18×10^{20} kg/m^2

4. จงคำนวณหา (แสดงผลลัพธ์ที่ได้ว่าควรจะมีจำนวนเลขนัยสำคัญเท่าไร)
   ก) ผลรวมของตัวเลขต่อไปนี้ 3.64, 62.1, 0.15, และ 1.6
   ข) ผลคูณของ 4.8 กับ 2.175
   ค) ผลคูณของ 2.8 กับ π

ตอบ ก) 67.5, ข) 10, ค) 8.8

5. จงหาตำแหน่งบนพิกัดตำแหน่งแบบขั้ว (Polar Coordinates) จากจุดบนระนาบ xy ตามพิกัดฉากดังนี้
   ก) (2.0 m, 3.5 m) ข) (-1.0 m, 2.50 m) ค) (-1.0 m, -2.0 m) ง) (2.5 m, -3.0 m)

ตอบ ก) (4.03, 60.3°) ข) (2.69, -68.2°) ค) (2.24, 63.4°) ง) (3.91, -50.2°)

6. จงหาตำแหน่งบนพิกัดฉากจากตำแหน่งบนพิกัดแบบขั้วต่อไปนี้
   ก) (5.0 m, 30°) ข) (10.0 m, 150°) ค) (6.0 m, 210°)

ตอบ ก) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{m}, \frac{5}{2}\,\text{m}\right)$, ข) (-8.7 m, 5 m), ค) (-5.22 m, -3 m)

7. จงหาตำแหน่งบนพิกัดตำแหน่งแบบขั้ว จากจุดบนพิกัดฉาก (1.0 m , 5.0 m) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-2.0 m, 2.0 m)

ตอบ (2.83 m , -45°)

8. จงหาตำแหน่งบนพิกัดฉาก และระยะกระจัดของจุด 2 จุด ซึ่งอยู่บนระนาบพิกัดขั้วดังนี้ (1.0 m, 60°) และ (5 m, 160°)

ตอบ (-4.7 m, 1.7 m)

9. จงหาเวกเตอร์ประกอบของเวกเตอร์อันหนึ่งที่มีขนาด 10 m/s และทำมุม 120° กับแกน +x

ตอบ $\vec{A} = -5\,\hat{i} + 8.66\,\hat{j}$

10. ถ้าเวกเตอร์ประกอบของเวกเตอร์หนึ่งมีค่าตามแกน x = 2.0 m และแกน y = -3.0 m จงคำนวณหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ดังกล่าว

ตอบ ขนาด 3.61 m มีทิศทางอยู่ใต้แกน +x เป็นมุม 56.31°

11. เวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$ คือ A_x และ A_y เท่ากับ 9 cm และ -2 cm ตามลำดับ ส่วนเวกเตอร์ประกอบของ $\vec{B}$ คือ B_x= -6 cm และ B_y = 3 cm จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{C}$ เมื่อ $\vec{A}+\vec{B} - 2\vec{C} = 0$

ตอบ ขนาด 1.58 cm มีทิศทางอยู่เหนือแกน +x เป็นมุม 18.43°

12. ถ้าเวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$ คือ A_x = -10 cm และ A_y = 20 cm และ $\vec{B}$ คือ B_x= 20 cm และ B_y = -10 cm จงหาเวกเตอร์ประกอบของ

ก) $\vec{A}+\vec{B}$ ข) $\vec{A} - \vec{B}$ ค) $2\vec{A}+\vec{B}$

ตอบ ก) $(10\,\text{cm})\hat{i} + (10\,\text{cm})\hat{j}$ ข) $(-30\,\text{cm})\hat{i} + (30\,\text{cm})\hat{j}$ ค) $(30\,\text{cm})\hat{j}$

13. ถ้า $\vec{A}$ มีขนาด 5 m ทำมุม 30° กับแกน + x และ $\vec{B}$ ขนาด 2 cm ทำมุม 160° กับแกน + x จงหา

ก) เวกเตอร์ประกอบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

ตอบ $\vec{A} = (4.33\,\text{m})\hat{i} + (2.5\,\text{m})\hat{j}$ และ $\vec{B} = (-1.88\,\text{cm})\hat{i} + (0.68\,\text{cm})\hat{j}$

ข) เวกเตอร์ประกอบ ขนาดและทิศทางของ $\vec{A}+\vec{B}$

ตอบ $\vec{A}+\vec{B} = (431.12\ \text{cm})\hat{i} + (249.32\ \text{cm})\hat{j}$ มีขนาด 4.98 m มีทิศทางอยู่เหนือแกน +x เป็นมุม 30.02°

14. ถ้า $\vec{A}$ = (2 m)$\hat{i}$ + (1.0 m)$\hat{j}$ และ $\vec{B}$ = (-5 m)$\hat{i}$ - (1.0 m)$\hat{j}$ จงหาเวกเตอร์ประกอบขนาดและทิศทางของ

ก) $3\vec{A}+\vec{B}$

ตอบ $(1\,m)\hat{i}+(2\,m)\hat{j}$ มีขนาด 2.24 m มีทิศทางอยู่เหนือแกน +x เป็นมุม 63.43°

ข) $\vec{A}$ - $3\vec{B}$

ตอบ $(17\,m)\hat{i}+(4\,m)\hat{j}$ มีขนาด 17.46 m มีทิศทางอยู่เหนือแกน +x เป็นมุม 13.24°

ค) -$\vec{A}$ + $2\vec{B}$

ตอบ $(-12\,m)\hat{i}-(3\,m)\hat{j}$ มีขนาด 12.37 m มีทิศทางอยู่เหนือแกน +x เป็นมุม 14.04°

15. กำหนดให้ $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{B}=-\hat{i}+\hat{k}$ และ $\vec{C}=\hat{i}+3\hat{j}$ จงคำนวณ

ก) $\vec{A}+\vec{B}$ ข) $\vec{B}+\vec{A}$ ค) $\vec{A}-\vec{B}$ ง) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

จ) $\vec{A}\times\vec{B}$ ฉ) $\vec{B}\times\vec{A}$ ช) $\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$ ซ) $\vec{C}\times(\vec{B}\times\vec{A})$

ฌ) $(\vec{C}\times\vec{B})\times\vec{A}$ ฎ) $(\vec{C}\times\vec{B})\cdot\vec{A}$

ตอบ ก) $2\hat{j}+4\hat{k}$ ข) $-2\hat{j}+4\hat{k}$ ค) $2\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$

ง) 2 จ) $-2\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$ ฉ) $2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$

ช) 14 ซ) $6\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ฌ) $3\hat{i}-6\hat{j}-5\hat{k}$

ฎ) 14

16. ถ้า $\vec{A}=t^2\,\hat{i}-t\,\hat{j}+3\,\hat{k}$ และ $\vec{B}=\sin(t)\,\hat{i}-\cos(t)\,\hat{k}$ จงหาค่าของ

ก) $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ข) $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ค) $\dfrac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t}$

ตอบ ก) $2t\hat{i}+\hat{j}$ ข) $\cos(t)\hat{i}+\sin(t)\hat{k}$ ค) $t^2\cos(t)+(2t+3)\sin(t)$

17. ถ้า $\vec{s}=2x^2\hat{i}-y\hat{j}+\hat{k}$ และ $\vec{v}=xy\hat{i}+2x^2\hat{j}+xy^2\hat{k}$ จงหา

ก) $\nabla\cdot\vec{s}$ ข) $\nabla\times\vec{v}$ ค) $\nabla\cdot(\vec{s}\times\vec{v})$

ตอบ ก) 4x-1 ข) $2xy\hat{i}-y^2\hat{j}+3x\hat{k}$ ค) $-3x-y^3-4x^3y$

18. จงหาปริพันธ์ของ $\vec{A}=2t^2\hat{i}-3t\hat{j}+4\hat{k}$ เมื่อ t = 0 ถึง 4

ตอบ $\dfrac{128}{3}\hat{i}-24\hat{j}+16\hat{k}$

19. จงหาเกรเดียนต์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก) $f(x, y, z) = 2xy^2z^3$

ตอบ $2y^2z^3\hat{i} + 4xyz^3\hat{j} + 6xy^2z^2\hat{k}$

ข) $f(x, y, z) = x^2y\sin(z)$

ตอบ $2xy\sin(z)\hat{i} + x^2\sin(z)\hat{j} + x^2y\cos(z)\hat{k}$

20. จงคำนวณลาปลาสเซียนของ

ก) $F(x, y, z) = \sin(xy^2z^2)$

ตอบ $(y^2 + z^2)x\cos(xy^2z^2)$

ข) $\vec{F} = 2x^2\hat{i} - 3y\hat{j} + 4y^2z^2\hat{k}$

ตอบ $2\hat{i} + 4(y^2 + z^2)\hat{k}$

เอกสารอ้างอิง

สมพงษ์ ใจดี. (2548). **ฟิสิกส์ มหาวิทยาลัย 1** (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมชูปถัมภ์. (2543). **ฟิสิกส์ เล่ม 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2 ฉบับปรับปรุงแก้ไข). กรุงเทพฯ

Beiser, A. (1983). **Applied physics**. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill.

Dare, W. A. & Harold, S. S. (1983). **Physics for engineering and science**. Schaum's outline series in engineering. New York: McGraw-Hill.

Frederick, K. J. , Edward, G. W. , & Malcolm, S. J. (1993). **Physics**. New York: McGraw-Hill.

Halliday, D. , Resnick, R. , & Walker, J. (1997). **Fundamental of physics** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

________ . (2001). **Fundamental of physics** (6th ed.). New York: John Willey & Sons.

________ . (2007). **Fundamental of physics** (8th ed.). New York: John Willey & Sons.

Knight, R. D. (1997). **Physics**. New York: Addison Wesley Longman.

Serway, R. A. (1996). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (4th ed.). Philadelphia: Saunders College.

________ . (2008). **Physics for scientists & engineers with modern physics** (7th ed.). Philadelphia: Saunders College.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (1996). **University physics** (9th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.

________ . (2000). **University physics** (10th ed.). San Francisco: Addison-Wesley.