บทที่ 4
ตัวแปรสุ่ม

เมื่อเราเก็บรวบรวมข้อมูลเรียบร้อยแล้วไม่ว่าข้อมูลนั้นจะเป็นข้อมูลเชิงคุณภาพ หรือข้อมูลเชิงปริมาณ เมื่อต้องการทราบโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ที่สนใจโดยพิจารณาจากข้อมูลในอดีต เราจะหาค่าความน่าจะเป็นโดยวิธีสังเกตจากการทดลอง หรือหาค่าความถี่สัมพัทธ์ ซึ่งความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา แต่ในความเป็นจริงข้อมูลที่เราสนใจมีค่าที่เป็นไปได้มากกว่าที่เราเก็บรวบรวมมา ดังนั้นถ้าต้องการทราบความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่นอกเหนือจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาจะทำต้องหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อไป

ความหมายของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (random variable) หมายถึงตัวแปรที่กำหนดขึ้นมาแทนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของข้อมูลที่สนใจซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงได้ มักแทนด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษพิมพ์ใหญ่ เช่น X, Y, … และจะแทนค่าของตัวแปรสุ่มด้วย x,y,… ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 การกำหนดตัวแปรสุ่มแทนข้อมูลที่เก็บรวบรวม

1. ข้อมูลที่เก็บรวบรวม คือ จำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าในช่วงเวลา 12.00 น.
   ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนลูกค้าที่เข้ามาซื้อสินค้าในช่วงเวลา 12.00 น.
   $x = 0, 1, 2, \ldots.$
2. ข้อมูลที่เก็บรวบรวมคือจำนวนวันที่ร้านอาหารเวียดนามเปิดขายในเดือนมกราคม
   ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนวันที่ร้านอาหารเวียดนามเปิดขายในเดือนมกราคม
   $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 31$
3. ข้อมูลที่เก็บรวบรวมคืออายุผู้ป่วยชายที่ได้รับเชื้อเอดส์ในประเทศไทย
   ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนอายุผู้ป่วยชายที่ได้รับเชื้อเอดส์
   $x > 0$
4. ข้อมูลที่เก็บรวบรวมคือระยะทางที่รถยนต์วิ่งได้ต่อน้ำมัน 40 ลิตร
   ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะทางที่รถยนต์วิ่งต่อนำมัน 40 ลิตร
   $x > 0$

จากตัวอย่าง 4.1 จะเห็นว่าค่าของตัวแปรสุ่มนั้นมีค่าที่แตกต่างกัน ตัวแปรสุ่ม 1 และ 2 จะมีค่าเป็นค่า ๆ จำนวนจำกัด หรือไม่จำกัดก็ได้โดยทั่วไปจะเป็นจำนวนนับ หรือที่เรียกว่ามีค่าไม่ต่อเนื่อง แต่ในตัวแปรสุ่ม 3 และ 4 จะมีค่าเป็นช่วง ๆ ไม่สามารถนับจำนวนได้ หรือที่เรียกว่ามีค่าต่อเนื่อง ดังนั้นตัวแปรสุ่มจึงแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง หรือแบบจุด (discrete random variable)
2. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (continuous random variable)

การนำข้อมูลที่เก็บรวบรวมไปทำนายเหตุการณ์ในอนาคต เรียกว่าการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เช่น

ต้องการทราบว่าในช่วงเวลา 12.00 น. ความน่าจะเป็นที่จะมีจำนวนลูกค้าเข้ามาซื้อสินค้าอย่างน้อย 20 คน เท่ากับเท่าใด นั่นคือ ต้องการทราบค่า $P(X \geq 20)$

ต้องการทราบว่าผู้ชายที่มีอายุในช่วง 20 - 45 ปี มีโอกาสที่จะได้รับเชื้อเอดส์มากน้อยเพียงใด นั่นคือ ต้องการทราบค่า $P(20 \leq X \leq 45)$

การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และแบบต่อเนื่องนั้น จะมีวิธีการหาค่าที่แตกต่างกัน ซึ่งในเอกสารฉบับนี้จะขอกล่าวแต่วิธีการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเท่านั้น

การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องนั้นสามารถหาได้จากการแจกแจงแบบต่าง ๆ ซึ่งเรียกว่าการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ต่อไปนี้

การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

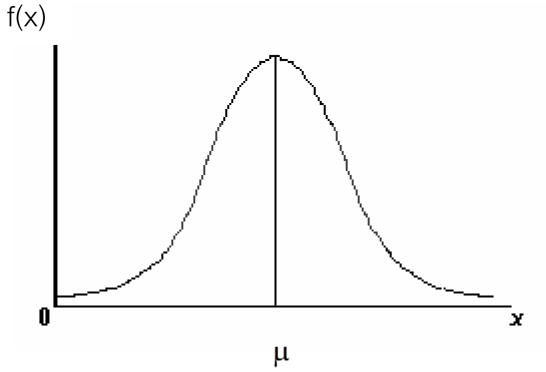
การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่สำคัญในทางสถิติ ซึ่งมีการประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันมากมาย ข้อมูลธรรมชาติหรือการทดลองในด้านต่าง ๆ เช่น น้ำหนัก ความสูง ระยะทาง คะแนน รายได้ ผลกำไร เป็นต้น ส่วนใหญ่จะมีการแจกแจงแบบปกติ หรือใกล้เคียงปกติ

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน σ^2 แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \; -\infty < x < \infty$$

โดยที่ $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, $\pi = 3.14159..$, $e = 2.71828..$

โดยทั่วไปจะใช้สัญลักษณ์ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ แทน ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ถ้าเขียนกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของ X เมื่อ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ จะได้กราฟลักษณะ ดังนี้

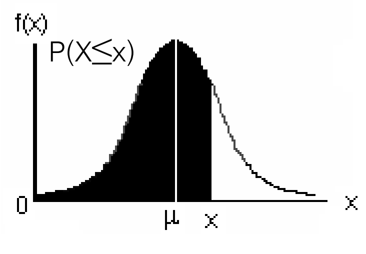


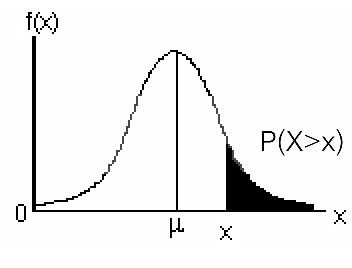
จะเห็นว่าลักษณะของกราฟเป็นรูประฆังคว่ำ และโดยทั่วไปนิยมเรียกกราฟของ f(x) ของการแจกแจงแบบปกติว่าโค้งปกติ (normal curve)

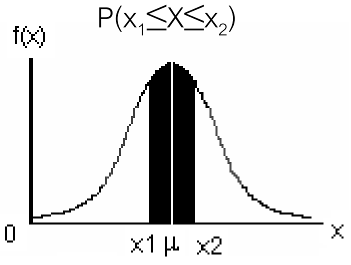
1. คุณสมบัติของโค้งปกติ

1. พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมีค่าเท่ากับ 1 และมีแกนสมมาตรที่ค่าเฉลี่ย μ จึงทำให้พื้นที่ใต้กราฟของ f(x) ที่อยู่ทางขวาของ μ เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ f(x) ที่อยู่ทางซ้ายของ μ
2. ค่าเฉลี่ย = มัธยฐาน = ฐานนิยม
3. ปลายเส้นโค้งปกติจะค่อย ๆ ลาดเข้าสู่แกน X แต่ ไม่สัมผัสแกน X

ดังนั้นการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เช่น $P(X \leq x)$ $P(X>x)$ หรือ $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ คือการหาค่าพื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ดังนี้



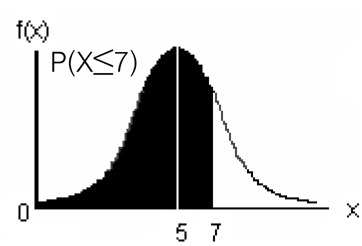


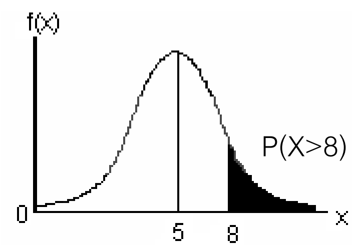


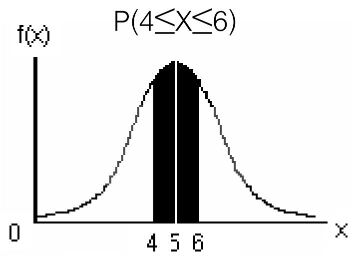
เช่น ถ้า X~N(5,9) นั่นคือ $\mu = 5$ และ $\sigma^2 = 9$ ฟังก์ชันความหนาแน่นของ X เป็น ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{3}\right)^2}$$

ดังนั้นการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เช่น $P(X \leq 7)$ $P(X>8)$ หรือ $P(4 \leq X \leq 6)$ คือการหาค่าพื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X~N(5,9) ดังนี้







2. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ

การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติของข้อมูลมีหลายวิธี ดังนี้

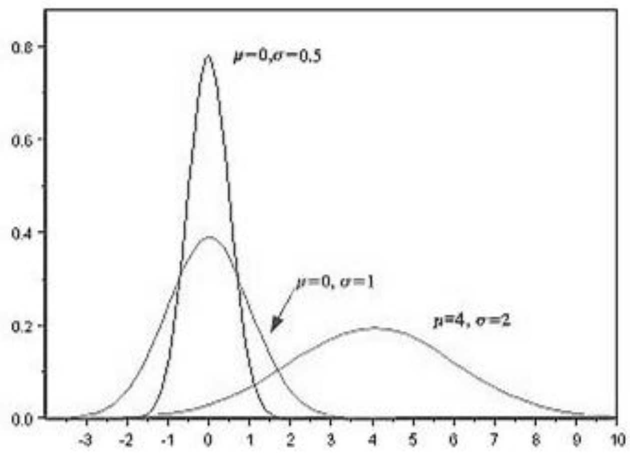
2.1 แบ่งรูปที่ต้องการหาเป็นส่วนเล็ก ๆ หาพื้นที่แต่ละส่วนแล้วนำมารวมกัน

2.2 อินทิเกรตฟังก์ชันเส้นความหนาแน่นของ X ดังนี้

$$\int_{-\infty}^{x} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

2.3 เปิดตารางสถิติ

แต่เนื่องจากลักษณะโค้งปกติของตัวแปรสุ่ม X แต่ละตัวจะแตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ดังนั้นถ้ากำหนดค่า μ และ σ^2 ต่างกันไปจะได้รูปกราฟที่แตกต่างกัน ดังนี้



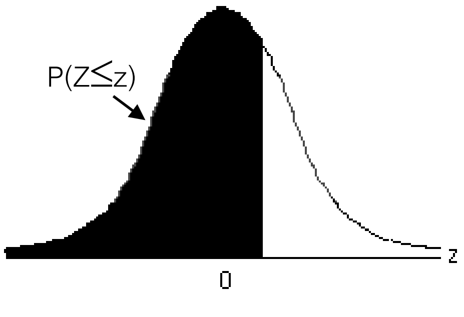
ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X จึงต้องแปลงค่าของตัวแปรสุ่ม $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ให้เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม $Z \sim N(\mu=0,\sigma^2=1)$ เสียก่อน

ถ้าตัวแปรสุ่ม $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ จะได้ว่า ตัวแปรสุ่ม $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\mu=0$ และความแปรปรวน $\sigma^2=1$ หรือใช้สัญลักษณ์ $Z \sim N(0,1)$ และเรียกการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม Z ว่าการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (standard normal distribution)

ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $Z \sim N(0,1)$ จะเป็น ดังนี้

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ,-\infty < x < \infty$$

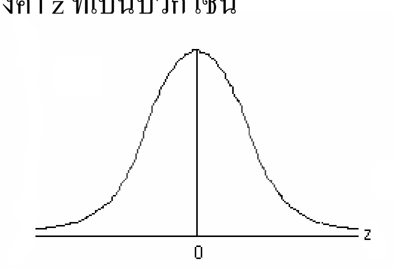
ลักษณะของโค้งปกติมาตรฐาน (standard normal curve) เป็นดังนี้



จากรูป สังเกตเห็นว่าจุดยอดของโค้งปกติมาตรฐานเกิดขึ้นที่จุด Z=0 สำหรับค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z หรือ $P(Z\leq z)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่แลเงาในรูปข้างต้นสามารถหาได้จากตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน เช่นจากตารางจะพบว่า $P(Z\leq 0.06) = 0.5239$ เป็นต้น

3. การเปิดตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานเพื่อหาความน่าจะเป็น

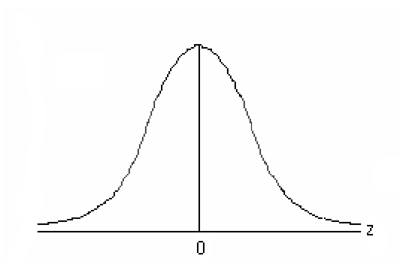
3.1 รูปแบบ 1 $P(Z \leq z)$ หรือพื้นที่ทางซ้ายของค่า z ที่เป็นบวก เช่น



$P(Z \leq 1.96) = ?$

$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$

3.2 รูปแบบ 2 $P(Z > z)$ หรือพื้นที่ทางขวาของค่า z ที่เป็นบวก เช่น



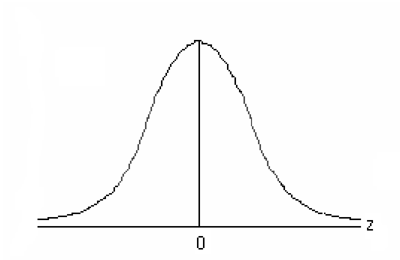
$P(Z > 2.06) = ?$

$P(Z > 2.06) = 1 - P(Z \leq 2.06)$

$= 1 - 0.9803$

$= 0.0197$

3.3 รูปแบบ 3 $P(Z \leq -z)$ หรือพื้นที่ทางซ้ายของค่า z ที่เป็นลบ เช่น



$P(Z \leq -1.96) = ?$

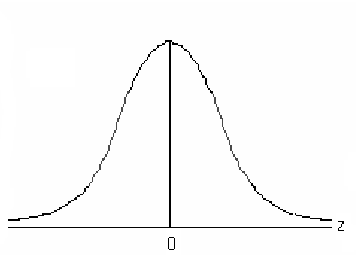
$P(Z \leq -1.96) = P(Z \geq 1.96)$

$= 1 - P(Z \leq 1.96)$

$= 1 - 0.9750$

$= 0.0250$

3.4 รูปแบบ 4 $P(Z > -z)$ หรือพื้นที่ทางขวาของค่า z ที่เป็นลบ เช่น



$P(Z \geq -1.96) = ?$

$P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96)$

$= 0.9750$

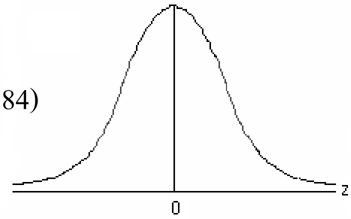
3.5 รูปแบบ 5 $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$ หรือพื้นที่ระหว่างค่า z ที่เป็นบวก เช่น

$P(0.84 \leq Z \leq 2.45) = ?$

$P(0.84 \leq Z \leq 2.45) = P(Z \leq 2.45) - P(Z \leq 0.84)$

$= 0.9929 - 0.7995$

$= 0.1934$



3.6 รูปแบบ 6 $P(-z_1 \leq Z \leq -z_2)$ หรือพื้นที่ระหว่างค่า z ที่เป็นลบ เช่น

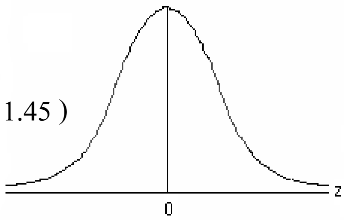
$P(-2.84 \leq Z \leq -1.45) = ?$

$P(-2.84 \leq Z \leq -1.45) = P(1.45 \leq Z \leq 2.84)$

$= P(Z \leq 2.84) - P(Z \leq 1.45)$

$= 0.9977 - 0.9265$

$= 0.0712$



3.7 รูปแบบ 7 $P(-z_1 \leq Z \leq z_2)$ หรือพื้นที่ระหว่างค่า z ที่เป็นบวกกับลบ เช่น

$P(-1.50 \leq Z \leq 1.00) = ?$

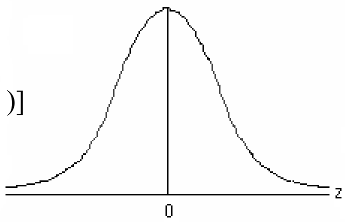
$P(-1.50 \leq Z \leq 1.00) = P(Z \leq 1.00) - P(Z \leq -1.50)$

$= 0.8413 - P(Z \geq 1.50)$

$= 0.8413 - [1 - P(Z \leq 1.50)]$

$= 0.8413 - [1 - 0.9332]$

$= 0.7745$



หมายเหตุ เนื่องจากการแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ

$$P(X=x) = 0$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
P(X \leq x) &= P(X<x)+P(X=x) \\
&= P(X<x)+0 \\
P(X \leq x) &= P(X<x) \\
\\
P(X \geq x) &= P(X>x)+P(X=x) \\
&= P(X>x)+0 \\
P(X \geq x) &= P(X>x)
\end{aligned}$$

$$P(x1 \leq X \leq x2) = P(X \geq x1) + P(X \leq x2)$$

$$= P(X > x1) + P(X < x2)$$

$$P(x1 \leq X \leq x2) = P(x1 < X < x2)$$

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ $X \sim N(50,100)$ จงหา

1. $P(X \leq 60)$
2. $P(X > 72)$
3. $P(20 \leq X \leq 80)$
4. $P(X \leq 62.68)$

1. $P(X \leq 60) = P\left(Z \leq \frac{60-50}{10}\right)$

$= P(Z \leq 1.00)$

$= 0.8413$

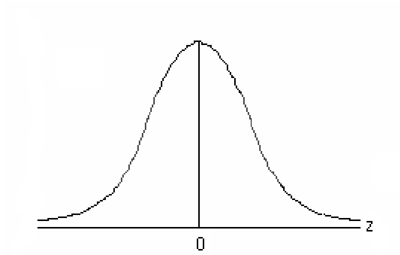
2. $P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72-50}{\sigma}\right)$

$= P(Z > 2.2)$

$= 1 - P(Z \leq 2.2)$

$= 1 - 0.9861$

$= 0.0139$



3. $P(20 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{20-50}{10} \leq Z \leq \frac{80-50}{10}\right)$

$= P(-3 \leq Z \leq 3)$

$= P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3)$

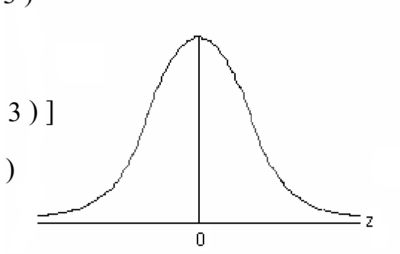
$= 0.9987 - P(Z > 3)$

$= 0.9987 - [1 - P(Z \leq 3)]$

$= 0.9987 - (1 - 0.9987)$

$= 0.9987 - 0.0013$

$= 0.9974$



4. $P(X \leq 62.68) = P\left(Z \leq \frac{62.68-50}{10}\right)$

$= P(Z \leq 1.268)$

เนื่องจาก $P(Z \leq 1.26) = 0.8962$

$P(Z \leq 1.268) = 0.8962 + ?$ (ใช้วิธีการเทียบบัญญัติไตรยางค์)

$P(Z \leq 1.27) = 0.8980$

ค่า z เพิ่มขึ้น 0.01 ค่าความน่าจะเป็นเพิ่มขึ้น 0.0018

ค่า z เพิ่มขึ้น 0.008 ค่าความน่าจะเป็นเพิ่มขึ้น $\frac{0.008 \times 0.0018}{0.01} = 0.00144$

ดังนั้น $P(Z \leq 1.268) = 0.8962 + 0.00144 = 0.89764$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าไม่ว่าตัวแปรสุ่ม X จะมีค่าเป็นเท่าใด เมื่อแปลงมาเป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Z ถึงแม้ไม่มีค่า z ในตารางก็สามารถหาค่าความน่าจะเป็นได้เสมอ

4. หลักการประยุกต์ใช้ตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

เพื่อให้การประยุกต์ใช้ตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานนั้นง่ายต่อการทำความเข้าใจ จึงขอสรุปเป็นขั้นตอน ดังนี้

1. กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องแทนข้อมูลที่สนใจ ได้ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
2. ต้องการหาค่า $P(X \leq x)$ หรือ $P(X > x)$ หรือ $P(x_1 \leq X \leq x_2)$
3. แปลง $P(X \leq x)$ หรือ $P(X > x)$ หรือ $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ เป็น

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$P(Z \leq z)$ หรือ $P(Z > z)$ หรือ $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$

โดย $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

4. หาค่า $P(Z \leq z)$ หรือ $P(Z > z)$ หรือ $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$
5. สรุป และแปลความหมาย

ตัวอย่าง 4.3 โรงงานแห่งหนึ่งผลิตหลอดไฟฟ้าที่มีอายุการใช้งานเฉลี่ย 900 ชั่วโมง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 50 ชั่วโมง ถ้าอายุการใช้งานของหลอดไฟมีการแจกแจงแบบปกติ จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟจะมีอายุการใช้งาน 800 ถึง 1000 ชั่วโมง

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนอายุการใช้งานของหลอดไฟ

ดังนั้น $X \sim N(\mu = 900, \sigma^2 = 2500)$ หรือ $X \sim N(900,2500)$

$$
\begin{aligned}
P(800 \leq X \leq 1000) &= P\left(\frac{800-900}{50} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{1000-900}{50}\right) \\
&= P(-2 \leq Z \leq 2) \\
&= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) \\
&= 0.9772 - (1 - 0.9972) \\
&= 0.9972 - 0.0228 \\
&= 0.9544
\end{aligned}
$$

หมายความว่าโอกาสที่หลอดไฟจะมีอายุการใช้งาน 800 ถึง 1000 ชั่วโมงเท่ากับ 95.44%

ตัวอย่าง 4.4 จากมาตรฐานอุตสาหกรรมในการผลิตอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ชนิดหนึ่งจะต้องมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 4.96 ถึง 5.08 ม.ม. นอกนั้นถือว่าเป็นอุปกรณ์ชำรุด นาย ก เป็นผู้จัดการของโรงงานที่ผลิตอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ชนิดนั้นต้องการทราบว่าอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่โรงงานผลิตนั้นมีโอกาสอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานมาก น้อยเพียงใด จึงสุ่มตัวอย่างอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์มา 200 ชิ้น ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยของเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น 5.02 ม.ม. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.05 ม.ม. จงตอบคำถามของนาย ก

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนเส้นผ่านศูนย์กลางของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์

ดังนั้น $X \sim N(5.02, 0.0025)$

$$
\begin{aligned}
P(4.96 \leq X \leq 5.08) &= P\left(\frac{4.96-5.02}{0.05} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{5.08-5.02}{0.05}\right) \\
&= P(-1.2 \leq Z \leq 1.2) \\
&= P(0 \leq Z \leq 1.2) \times 2 \\
&= (P(Z \leq 1.2) - 0.5) \times 2 \\
&= 0.7698
\end{aligned}
$$

หมายความว่าอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่โรงงานผลิตมีโอกาสอยู่ในเกณฑ์มาตรฐาน 76.98%

ตัวอย่าง 4.5 ในการผลิตบะหมี่กึ่งสำเร็จรูปชนิดหนึ่ง น้ำหนักบรรจุของบะหมี่กึ่งสำเร็จรูปจะมีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยน้ำหนักเฉลี่ย 60 กรัม ความแปรปรวน 0.09 กรัม^2

1. ทางฝ่ายผลิตจะส่งบะหมี่ออกจำหน่ายถ้าบะหมี่มีน้ำหนัก 59.5–60.5 กรัม ถ้าบะหมี่มีน้ำหนักนอกเหนือจากนี้ต้องถูกนำกลับมาบรรจุใหม่ อยากทราบว่าในการผลิตบะหมี่กึ่งสำเร็จรูปของบริษัทแห่งนี้มีโอกาสที่จะต้องนำบะหมี่กลับมาบรรจุใหม่กี่ %

2. ทางฝ่ายผลิตต้องการสุ่มบะหมี่ขึ้นมาตรวจ จำนวน 500 ห่อ จะมีบะหมี่กี่ห่อที่บรรจุไม่ได้น้ำหนักที่ต้องการ

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนน้ำหนักบะหมี่กึ่งสำเร็จรูป ดังนั้น X~N(60,0.09)

P(ไม่ต้องนำบะหมี่กลับมาบรรจุใหม่) = $P(59.5 \leq X \leq 60.5)$

P(ต้องนำบะหมี่กลับมาบรรจุใหม่) = $1 - P(59.5 \leq X \leq 60.5)$

$$= 1-P\left(\frac{59.5-60}{0.3} \leq Z \leq \frac{60.5-60}{0.3}\right)$$

$$= 1-P(-1.67 \leq Z \leq 1.67)$$

$$= 1-[\,2\times(P(Z\leq 1.67)-0.5)]$$

$$= 1-[\,2\times(0.9525-0.5)]$$

$$= 1-[\,2\times 0.4525]$$

$$= 0.095$$

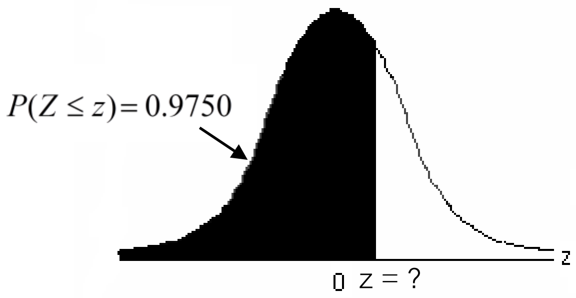
ในการผลิตบะหมี่ของบริษัทนี้ มีโอกาสต้องนำบะหมี่กลับมาบรรจุใหม่ 9.5%

ถ้าสุ่มบะหมี่มาตรวจจำนวน 500 ห่อ จะมีบะหมี่ที่บรรจุไม่ได้น้ำหนักตามต้องการ 47.5 ห่อ

5. การเปิดตารางการแจกแจงแบบปกติเพื่อหาค่า z

จะเห็นว่าเมื่อกำหนด $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ต้องการหา $P(X \leq x)$ เราต้องดำเนินการแปลง $P(X \leq x)$ เป็น $P(Z \leq z)$ แล้วจึงหาค่าความน่าจะเป็น โดย $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

ในบางครั้งเราอาจกำหนดค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X นั่นคือกำหนด $P(X \leq x)$ หรือ $P(Z \leq z)$ มาก่อน แล้วจึงย้อนกลับไปเพื่อหาค่า x ที่สอดคล้องกับค่าความน่าจะเป็นที่กำหนด ดังนี้



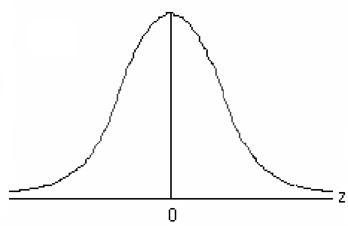
จากรูป ถ้ากำหนด $P(Z \le z) = 0.9750$ นั่นคือกำหนดพื้นที่ด้านซ้ายของค่า z เท่ากับ 0.9750 ซึ่งสอดคล้องกับค่า z= 1.96 เมื่อทราบค่า z แล้วจึงแปลงเป็น x โดย $x = z\sigma + \mu$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า z เมื่อกำหนดค่าความน่าจะเป็นดังนี้

1. $P(Z \le z) = 0.9750$

   เนื่องจาก $P(Z \le 1.96) = 0.9750$

   ดังนั้น $z = 1.96$

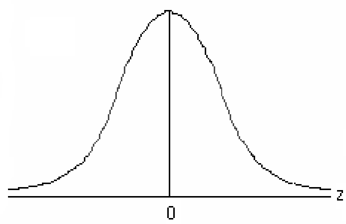


2. $P(Z > z) = 0.0384$

   เนื่องจาก $P(Z \le z) = 1-.0.0384$

   $P(Z \le 1.77) = 0.9616$

   ดังนั้น $z = 1.77$



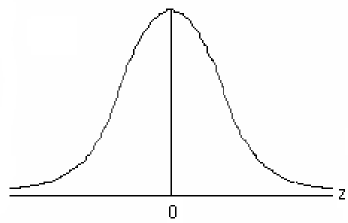
3. $P(0 \le Z \le z) = 0.4147$

   เนื่องจาก $P(Z \le z) = 0.5 + 0.4147$

   $P(Z \le z) = 0.9147$

   $P(Z \le 1.37) = 0.9147$

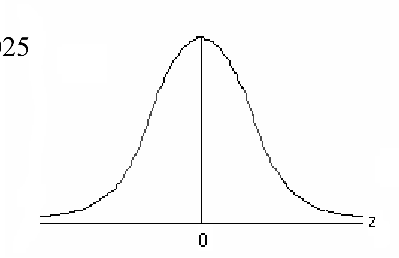
   ดังนั้น $z = 1.37$



4. $P(-z \leq Z \leq z) = 0.95$

จากรูปพื้นที่ที่ไม่ได้แรเงามีค่าเท่ากับ 0.05

ดังนั้นพื้นที่สีขาวแต่ละด้านจึงเท่ากับ 0.05/2 = 0.025



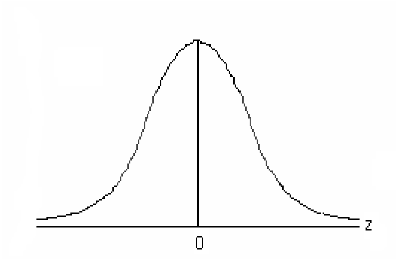
ดังนั้น $P(Z \leq z) = 0.95 + 0.025$

$P(Z \leq z) = 0.9750$

$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$

ดังนั้น $z = 1.96$ และ $-z = -1.96$

5. $P(Z > z) = 0.025$



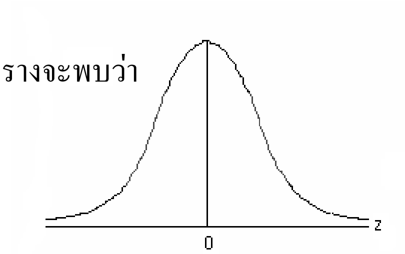
เนื่องจาก $P(Z \leq z) = 1 - 0.025$

$P(Z \leq z) = 0.9750$

$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$

ดังนั้น $z = 1.96$

6. $P(Z > z) = 0.05$



ค่า z ที่ทำให้ $P(Z \leq z) = 0.95$ จากตารางจะพบว่า

$P(Z \leq 1.64) = 0.9495$

และ $P(Z \leq 1.65) = 0.9505$

แสดงว่า z อยู่ระหว่าง 1.64 และ 1.65 จากการเทียบบัญญัติไตรยางค์

ค่าความน่าจะเป็นเพิ่มขึ้น 0.001 ค่า z เพิ่มขึ้น 0.01

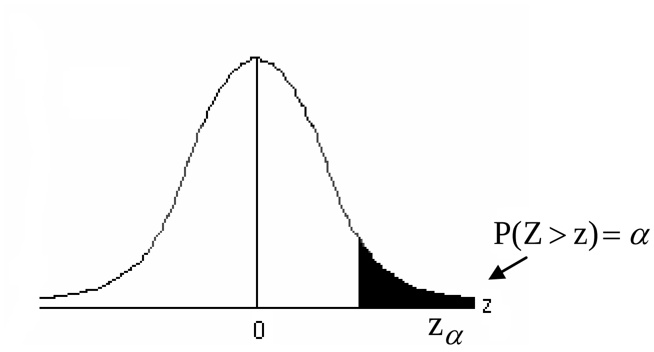
ค่าความน่าจะเป็นเพิ่มขึ้น 0.0005 ค่า z เพิ่มขึ้น $\dfrac{0.01 \times 0.0005}{0.001} = 0.005$

ดังนั้นจะได้ $z = 1.64 + 0.005$

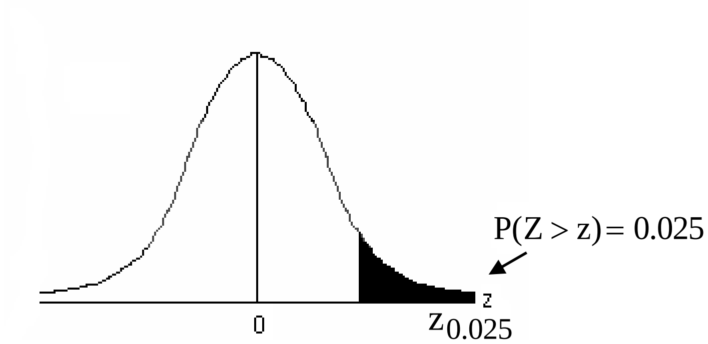
$z = 1.645$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.6 ข้อ 6 จะเห็นว่าไม่ว่าจะกำหนด $P(Z \leq z)$ เท่ากับเท่าไรก็สามารถหาค่า z ที่สอดคล้องกับ $P(Z \leq z)$ ได้เสมอ

เพื่อความสะดวกในการหาค่า z เมื่อทราบพื้นที่ทางขวาของ z ดังนี้ $P(Z > z) = \alpha$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ z_α ดังนี้



เช่น กำหนด $P(Z > z) = 0.025$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $z_{0.025}$ และสามารถแทนด้วยรูป ดังนี้

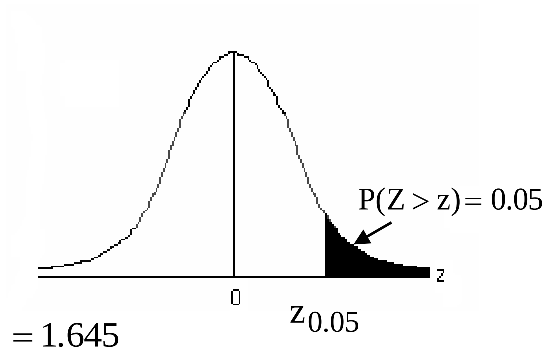


จากตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานด้านล่าง จะได้ $z_{0.025} = 1.96$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า z_α ต่อไปนี้

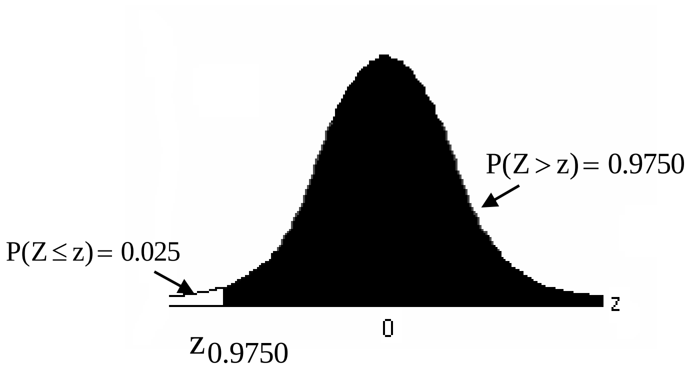
1. $z_{0.05}$
2. $z_{0.9750}$

1. ค่า $z_{0.05}$ สามารถเขียนแทนด้วยรูป

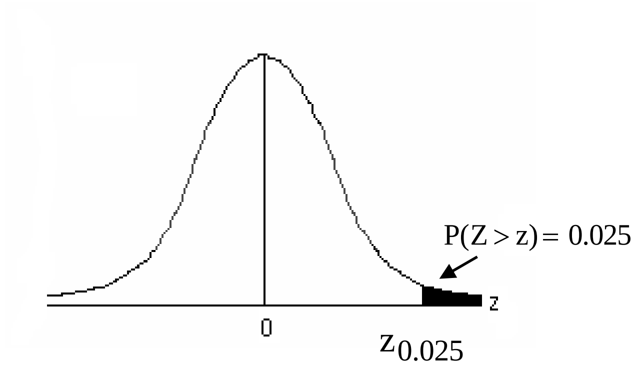


ดังนั้น $z_{0.05} = 1.645$

2. ค่า $z_{0.9750}$ สามารถเขียนแทนด้วยรูป



ซึ่งมีลักษณะตรงข้ามกับรูปที่แทนค่า $z_{0.025}$ ดังนี้



นั่นหมายความว่าค่า $z_{0.9750}$ มีค่าตรงข้ามกับค่า $z_{0.025}$

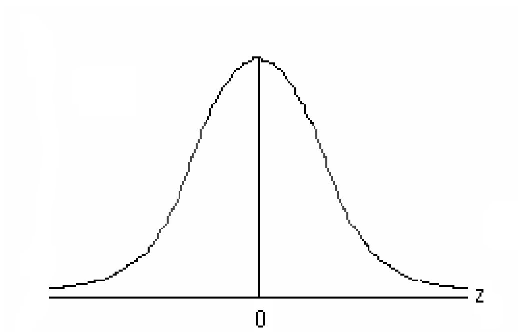
ดังนั้น จาก $z_{0.025} = 1.96$ จะได้ว่าค่า $z_{0.9750} = -1.96$

ตัวอย่าง 4.8 ถ้า $X \sim N(3,16)$ จงหาค่าของ x เมื่อ $P(X \leq x) = 0.8944$

จาก $P(X \leq x) = 0.8944$ หมายความว่า $P(Z \leq z) = 0.8944$ ด้วย

จากตาราง พบว่า $P(Z \leq 1.25) = 0.8944$

ดังนั้น $z = 1.25$



จาก $x = z\sigma + \mu$

$x = 1.25(4) + 3$

$= 8$

ตัวอย่าง 4.9 ในการปรับปรุงการให้บริการในระบบการลงทะเบียนของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ผู้บริหารต้องการให้ทางบริษัทที่รับจ้างทำระบบเสนอระยะเวลาในการให้บริการต่อคนให้ชัดเจน ทางบริษัทจึงทำการเก็บรวบรวมข้อมูลระยะเวลาในการให้บริการจากตัวอย่าง 100 คน พบว่า ระยะเวลาเฉลี่ย 3 นาที ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.08 นาที ทางบริษัทต้องการให้ระยะเวลาที่เสนอมีความผิดพลาดเกิดขึ้นเพียง 1 % บริษัทควรเสนอระยะเวลาในการให้บริการกี่นาที

วิธีทำ กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแทนระยะเวลาในการให้บริการ จะได้

$$X \sim N(3,0.0064)$$

ถ้าบริษัทเสนอระยะเวลาในการให้บริการไม่เกิน x นาที จะต้องมีโอกาสเกิดความผิดพลาด 1% นั่นคือ

$$P(X>x) = 0.01$$

และ $P(Z>z) = 0.01$

จะได้ $z = 2.326$

จาก

$$\begin{aligned} x &= z\sigma + \mu \\ &= (2.326)(0.08) + 3 \\ &= 3.186 \end{aligned}$$

ดังนั้นทางบริษัทควรเสนอเวลา 3.186 นาที ซึ่งจะมีโอกาสเกิดความผิดพลาดเพียง 1%

ตัวอย่าง 4.10 ถ้ายอดขายประจำปีของนวนิยายเรื่องหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติแต่ไม่ทราบค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน อย่างไรก็ตามจากข้อมูลที่เก็บมาทราบว่าร้อยละ 40 ของทั้งหมดมียอดขายเกิน 470,000 บาท และร้อยละ 10 ของทั้งหมดมียอดขายเกิน 500,000 บาท แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของยอดขายควรมีค่าเท่าใด

วิธีทำ กำหนด X เป็นตัวแปรสุ่มแทนยอดขายประจำปีของนวนิยายเรื่องหนึ่ง

จาก ร้อยละ 40 ของทั้งหมดมียอดขายเกิน 470,000 บาท นั่นคือ

$$P(X > 470{,}000) = P(z > 0.253) = 0.40$$ และ

$$\frac{470{,}000 - \mu}{\sigma} = 0.253$$ หรือ

$$0.253\sigma + \mu = 470{,}000$$ ....สมการ 1

และ ร้อยละ 10 ของทั้งหมดมียอดขายเกิน 500,000 บาท นั่นคือ

$$P(X > 500{,}000) = P(z > 1.282) = 0.10$$ และ

$$\frac{500{,}000 - \mu}{\sigma} = 1.282$$ หรือ

$$1.282\sigma + \mu = 500{,}000$$ ....สมการ 2

จากสมการ 1 และ 2 แก้สมการเพื่อหาค่า μ และ σ จะได้

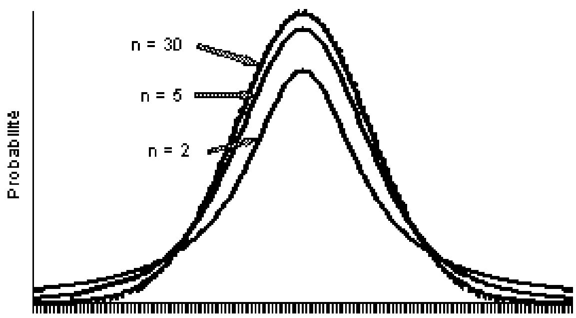
$$\mu = 462623.9064 \text{ และ } \sigma = 29154.52$$

หมายความว่านวนิยายเรื่องนี้มียอดขายประจำปีเฉลี่ย 462,623.9064 บท และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของยอดขายเท่ากับ 29,154.52 บาท

การแจกแจงแบบ t (The t Distribution)

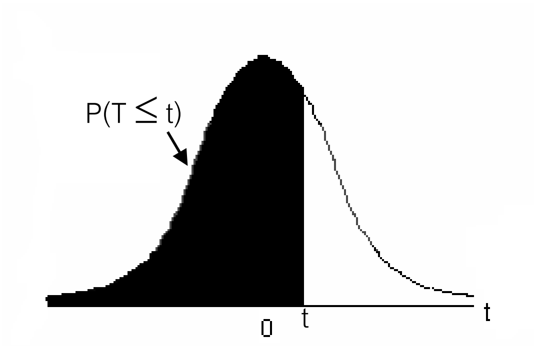
ในบางครั้งนั้นเราไม่ทราบความแปรปรวน σ^2 ของประชากรที่เราสุ่มตัวอย่างมา ถ้าในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) ค่า $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ จะเป็นตัวประมาณที่ดีสำหรับค่า σ^2 ดังนั้น เราจึงใช้ s^2 แทน σ^2 ได้ และ $Z = \frac{x-\mu}{s}$ ยังคงมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน แต่ถ้าตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) s^2 จะไม่ใช่ตัวประมาณที่ดีของ σ^2 อีกต่อไป และ $Z = \frac{x-\mu}{s}$ ก็จะไม่ใช่ตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานอีกต่อไป แต่ $\frac{x-\mu}{s}$ จะเป็นตัวแปรสุ่ม T ที่มีการแจกแจงแบบ t หรือ Student's t Distribution

การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม T มีลักษณะคล้ายการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม Z โดยที่เส้นโค้งของการแจกแจงแบบ t จะมีลักษณะเป็นแบบระฆังคว่ำ และมีสมมาตรที่จุด 0 แต่การแจกแจงแบบ t จะมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่า เนื่องจากค่าของตัวแปรสุ่ม T ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{x}$ และ s^2 ในขณะที่การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม Z ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{x}$ การแจกแจงของ T แตกต่างจาก Z ตรงที่ความแปรปรวนขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่าง n ซึ่งมักจะมีค่ามากกว่า 1 เสมอ แต่เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \to \infty$) การแจกแจงทั้งสองแบบมีลักษณะเหมือนกัน ดังนี้



ดังนั้นถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ s^2 เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างสุ่มขนาด n ซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ซึ่งไม่ทราบค่า จะได้ว่า $T = \frac{x-\bar{x}}{s}$ จะมีการแจกแจงแบบ t ด้วยองศาแห่งความมีอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ n-1 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $T \sim t_{df=n-1}$

สำหรับการคำนวณหาค่า $P(T \leq t)$ สามารถหาได้จากตารางการแจกแจงแบบที ซึ่งให้ค่า t และ $P(T \leq t)$ ดังนี้



เช่น ถ้า $T \sim t_{df=6-1}$ แล้ว จากตารางการแจกแจงแบบที่จะพบว่า $P(T\leq 1.476) = 0.9$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 4.11 ให้ตัวแปรสุ่ม T มีการแจกแจงแบบ t โดยที่ df เท่ากับ 16 จงหา

1. $P(T < 2.12)$
2. $P(T \leq -2.21)$
3. $P(-2.120 \leq T \leq 2.583)$

1. $P(T < 2.12) = P(T \leq 2.12) = 0.975$

2. เนื่องการโค้งการแจกแจงแบบ t มีสมมาตรที่จุด 0 ดังนั้น
   $P(T \leq -2.12) = P(T > 2.12) = 0.025$

3. $P(-2.120 \leq T \leq 2.583) = P(T \leq 2.583) - P(T \leq -2.120)$
   $= 0.99 - 0.025$
   $= 0.965$

ตัวอย่าง 4.12 ถ้า $T \sim t_{df=35}$ จงหา

1. $P(T \leq 1.96)$
2. $P(T \leq 1.645)$

1. $P(T \leq 1.96)$

   จาก $P(T \leq 1.96) = 0.9750$

   ข้อสังเกต $P(Z \leq 1.96) = 0.9750$

2. $P(T \leq 1.645)$

   จาก $P(T \leq 1.645) = 0.950$

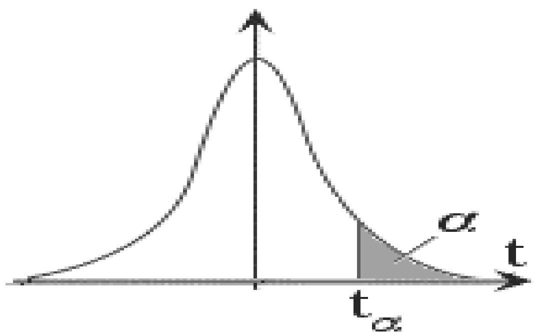
   ข้อสังเกต $P(Z \leq 1.645) = 0.950$

หมายเหตุ จะเห็นว่าเมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่ขึ้น นั่นคือ $n > 30$ ค่าความน่าจะเป็นจากโค้งการแจกแจงแบบที จะมีค่าเข้าใกล้ค่าความน่าจะเป็นจากโค้งการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ดังนั้น

ถ้า $n \leq 30$ การหา $P(T \leq t)$ หาจากตารางการแจกแจงแบบที

ถ้า $n > 30$ การหา $P(T \leq t) = P(Z \leq z)$ สามารถหาจากตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานแทนได้

การหาค่า t จะมีลักษณะคล้ายกับการหาค่า z และมักแทนค่า t ด้วยสัญลักษณ์ $t_{\alpha,df}$ เมื่อ α คือพื้นที่ทางขวาของ t ดังนี้



ตัวอย่าง 4.13 จากตารางการแจกแจงแบบ t จงหา

1. $t_{0.975,17}$
2. $t_{0.01,10}$
3. $t_{0.025,49}$
4. $t_{0.05,82}$
5. $t_{0.01,79}$

1. ที่ df = 17 จะได้ $P(T \geq t) = 0.975$

$P(T \leq 2.11) = 0.975$

$\therefore \quad t_{0.975,17} = -2.11$

2. ที่ df = 10 จะได้ $P(T \leq t) = 0.90$

$P(T \leq 2.764) = 0.90$

$\therefore \quad t_{0.01,10} = 2.764$

3. $t_{0.025,49} = 1.96$

4. $t_{0.05,82} = 1.645$

5. $t_{0.01,79} = 2.326$

จากตัวอย่าง 4.13 จะเห็นว่า $t_{0.025,49} = z_{0.025} = 1.96$

$t_{0.05,82} = z_{0.05} = 1.645$

$t_{0.01,79} = z_{0.01} = 2.326$

หมายเหตุ เมื่อ n > 30 เราสามารถหาค่า $t_{\alpha,df}$ จากค่า z_{α} ได้

ตัวอย่าง 4.14 สุ่มลำไยกระป๋องยี่ห้อหนึ่งจากลำไยกระป๋องที่มีน้ำหนักเป็นการแจกแจงแบบปกติมา 12 กระป๋อง แล้วชั่งน้ำหนักแต่ละกระป๋อง ปรากฏว่าได้น้ำหนักเฉลี่ย 135 กรัม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 กรัม ถ้าเลือกลำไยมา 1 กระป๋อง ความน่าจะเป็นที่ลำไยกระป๋องจะมีน้ำหนักมากกว่า 149 กรัม

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนน้ำหนักลำไยกระป๋อง

จะได้ $P(X > 149) = P(T > \frac{149-135}{10})$

$= P(T > 1.4)$

$= 1 - P(T \leq 1.4)$

$= 1 - 0.90$

$= 0.10$

โอกาสที่ลำไยกระป๋องนั้นจะมีน้ำหนักมากกว่า 149 กรัม เท่ากับ 10%

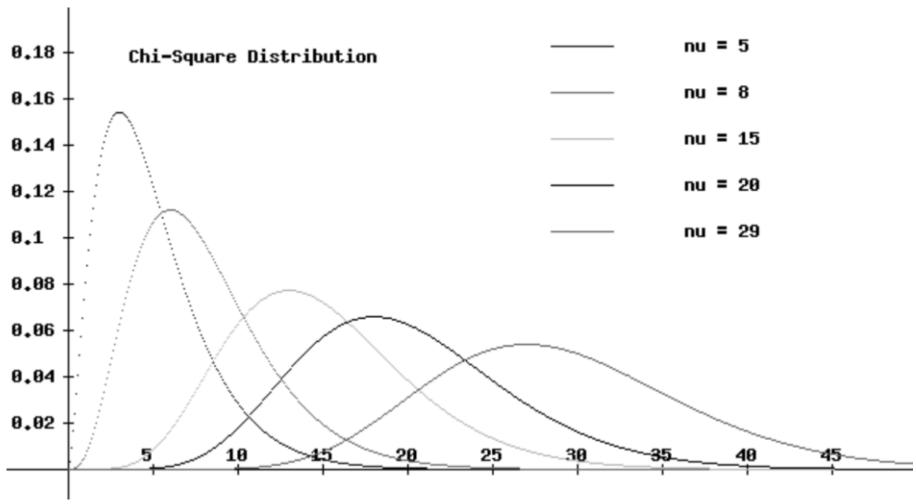
การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi – Square Probability Distribution)

ถ้า $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ จะได้ $Z^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$ (ไคสแควร์องศาแห่งความเป็นอิสระ 1) ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด n จะได้ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$

ดังนั้น $\sum Z^2 = \sum\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$ ถ้า $X \sim \chi_n^2$ แล้วฟังก์ชันความหนาแน่นของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}(n/2-1)} e^{-x^2} x^{\frac{n}{2}-1} \qquad ; x > 0 \ , \ e = 2.71828$$

รูปกราฟของตัวแปรสุ่ม X ขึ้นอยู่กับค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ ดังนี้



ลักษณะของเส้นโค้ง χ^2 คือ

1. ค่า χ^2 มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง ∞
2. เส้นโค้งมีลักษณะเบ้ขวาซึ่งขึ้นอยู่กับองศาแห่งความเป็นอิสระ n
3. ถ้าองศาแห่งความเป็นอิสระมาก โค้ง χ^2 จะคล้ายกบโค้งปกติ
4. พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมดเท่ากับ 1

การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไคสแควร์จาก ฟังก์ชัน f(x) นั้นจะยุ่งยาก ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงหาค่า ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไคสแควร์จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์

ตัวอย่าง 15 1. จงหาค่า $P(\chi^2 \le 18.3)$ ถ้า $\chi^2 \sim \chi^2_{10}$

2. ถ้า $\chi^2 \sim \chi^2_{20}$ จงหาค่า a ที่ทำให้ $P(\chi^2 \le a) = 0.975$

1. จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ ที่ df = 10 จะได้ $P(\chi^2 \le 18.3) = 0.95$

2. จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ ที่ df = 20 จาก $P(\chi^2 \le a) = 0.975$

จะได้ $P(\chi^2 \le 34.2) = 0.975$

$\therefore a = 34.2$

การแจกแจงแบบเอฟ (F Probability Distribution)

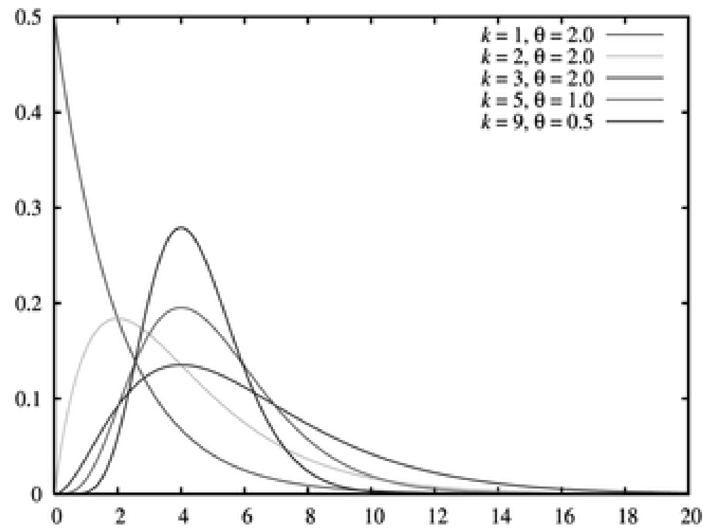
ถ้าสุ่มตัวอย่าง 2 ชุด ขนาด m และ n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีความแปรปรวน σ_1^2 และ σ_2^2 และให้ s_1^2 และ s_2^2 เป็นความแปรปรวนจากตัวอย่าง จะได้ว่า

$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{u,v}$ (เอฟที่องศาแห่งความเป็นอิสระ u , v) เมื่อ $u = m-1$ และ $v = n-1$

ถ้า F เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ $F_{u,v}$ จะมีฟังก์ชันความหนาแน่น ดังนี้

$$g(f) = \frac{\left(\frac{u+v}{2}-1\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} f^{u/2-1}}{\left(\frac{u}{2}-1\right)\left(\frac{v}{2}-1\right)\left(1+\frac{uf}{v}\right)^{u+v/2}} \qquad ; \quad f > 0$$

รูปกราฟของตัวแปรสุ่ม X ขึ้นอยู่กับค่าองศาแห่งความเป็นอิสระ ดังนี้



ลักษณะของเส้นโค้ง F

1. f มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง ∞

2. เส้นโค้งจะเบ้ขวา ขึ้นอยู่กับองศาแห่งความเป็นอิสระ u และ v

การหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม F จากฟังก์ชันความน่าแน่นนั้นยุ่งยาก เพื่อความสะดวกจึงหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม F จากตารางการแจกแจงแบบเอฟ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.16 จงหาค่า $f_{0.99,15,20}$

จาก $P(F \geq f_{0.99,15,20}) = 0.01$

จากตาราง F ที่ $\alpha = 0.01$

จะได้ $f_{0.99,15,20} = 3.09$

หมายเหตุ ถ้า $1-\alpha = 0.05$ ค่า $f_{1-\alpha,v_1,v_2}$ หาจากตารางไม่ได้โดยตรง เช่น $f_{0.05,10,12}$ จะต้องเปิดจากตารางที่ $\alpha = 0.95$ ซึ่งไม่มี ดังนั้นการหาค่า f ในลักษณะเช่นนี้จะต้องหาจากความคุณสมบัติ

$$f_{1-\alpha,v_1,v_2} = \frac{1}{f_{\alpha,v_2,v_1}}$$

ดังนั้น $$f_{0.05,10,12} = \frac{1}{f_{0.95,12,10}} = \frac{1}{2.91} = 0.344$$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาค่า $f_{0.01,20,24}$

จากคุณสมบัติจะได้ $f_{0.01,20,24} = \dfrac{1}{f_{0.99,24,20}} = \dfrac{1}{2.86} = 0.35$

ตัวอย่าง 4.18 จงหาค่า f_1 , f_2 ที่ทำให้ $P(f_1 < F < f_2) = 0.90$ และ $P(F \le f_1) = 0.05$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ 9 และ 15 ตามลำดับ

เนื่องจาก $P(F \le f_1) = 0.05$

ดังนั้น $P(F \le f_2) = 0.05 + 0.90 = 0.95$

$\therefore f_{0.95,9,15} = 2.59$

จะได้ $f_{0.05,9,15} = \dfrac{1}{f_{0.95,15,9}} = \dfrac{1}{3.01} = 0.332$

ดังนั้น $P(f_1 < F < f_2) = 0.90$ เมื่อ $f_1 = 0.332$ $f_2 = 2.59$

การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป

การใช้ไมโครซอฟต์เอ็กเซลในการหาค่าจากตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานนั้น ใช้ฟังก์ชันในกลุ่มของสถิติ แบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

1. การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z หรือ X

ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Z ในรูป $P(Z \le z)$ ได้แก่

NORM.S.DIST(z,cumulative)

เมื่อ z แทนค่าตัวแปรสุ่ม z

cumulative แทนการระบุค่า TRUE เมื่อต้องการค่าความน่าจะเป็น และระบุค่า FALSE เมื่อต้องการค่าฟังก์ชัน z

ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ในรูป $P(X \le x)$ ได้แก่

NORM.DIST(x,mean,standard_dev,cumulative)

เมื่อ x แทนค่าของตัวแปรสุ่ม x

mean แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X

standard_dev แทนค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X

cumulative แทนการระบุค่า TRUE เมื่อต้องการค่าความน่าจะเป็น และระบุค่า FALSE เมื่อต้องการค่าฟังก์ชัน x

2. การหาค่า z หรือ x

ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่า z เมื่อกำหนดความน่าจะเป็นในรูป $P(Z \leq z)$ ได้แก่

NORM.S.INV(probability)

เมื่อ probability แทนค่าความน่าจะเป็นในรูป $P(Z \leq z)$

ฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่า x เมื่อกำหนดความน่าจะเป็นในรูป $P(X \leq x)$ ได้แก่

NORM.INV(probability,mean,standard_dev)

เมื่อ probability แทนค่าความน่าจะเป็นในรูป $P(X \leq x)$

mean แทนค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X

standard_dev แทนค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X

ถ้าทราบรูปแบบของฟังก์ชันก็สามารถพิมพ์ฟังก์ชันหาค่าความน่าจะเป็นที่ต้องการได้ดังนี้

	A	B
1	การใช้ Microsoft Excel ในการหาค่าจากตาราง Standard Normal	
2	การหาค่าความน่าจะเป็น	
3	P(Z ≤1.85) =	=NORM.S.DIST(1.85,TRUE)
4	P(Z > 1.25) =	=1-NORM.S.DIST(1.25,TRUE)
5	P(Z ≤ - 1.25) =	=NORM.S.DIST(-1.25,TRUE)
6	P(0.84 ≤ Z ≤ 1.25) =	=NORM.S.DIST(1.25,TRUE)-NORM.S.DIST(0.84,TRUE)
7		
8	ถ้า X ~ N(50,100)	
9	P(X ≤ 62.68) =	=NORM.DIST(62.68,50,10,TRUE)
10	P(20 ≤ X ≤ 80) =	=NORM.DIST(80,50,10,TRUE)-NORM.DIST(20,50,10,TRUE)
11		
12	การหาค่าตัวแปรสุ่ม	
13	P(Z ≤ z) = 0.9750	=NORM.S.INV(0.975)
14	P(Z > z) = 0.9750	=NORM.S.INV(1-0.975)
15		
16	ถ้า X ~ N(3,0.0064)	
17	P(X ≤ x) = 0.95	=NORM.INV(0.95,3,0.08)
18	P(X > x) = 0.01	=NORM.INV(1-0.01,3,0.08)
19		

จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

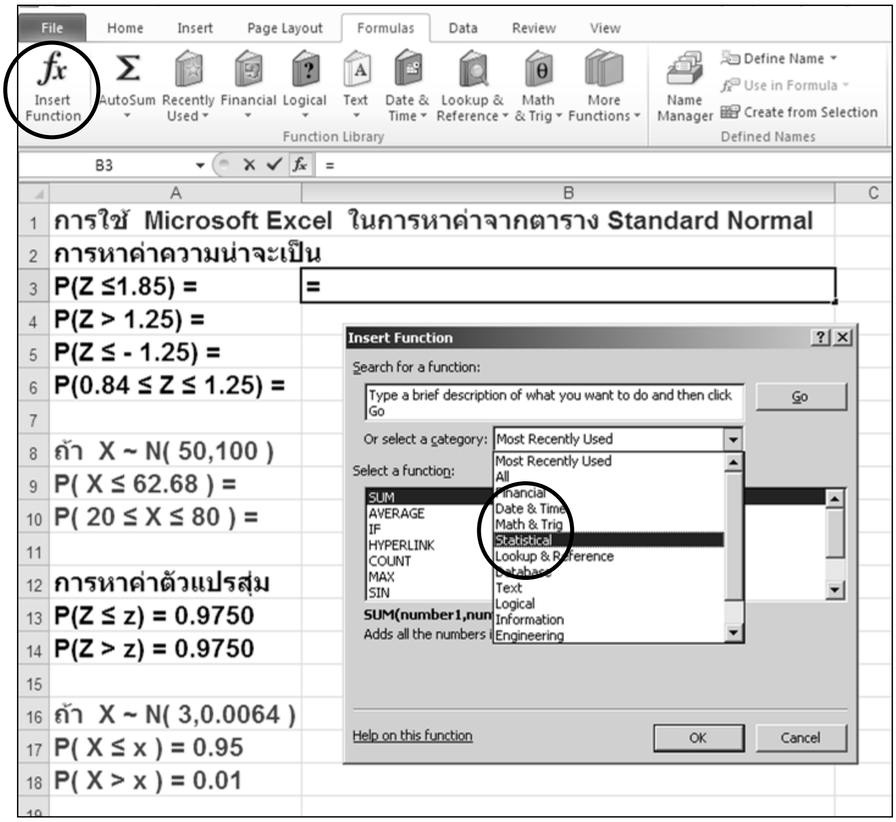
	A	B	C	D	E	F	G
1	การใช้ Microsoft Excel ในการหาค่าจากตาราง Standard Normal						
2	การหาค่าความน่าจะเป็น						
3	P(Z ≤1.85) =	0.9678					
4	P(Z > 1.25) =	0.1056					
5	P(Z ≤ - 1.25) =	0.1056					
6	P(0.84 ≤ Z ≤ 1.25) =	0.0948					
7							
8	ถ้า X ~ N(50,100)						
9	P(X ≤ 62.68) =	0.8976					
10	P(20 ≤ X ≤ 80) =	0.9973					
11							
12	การหาค่าตัวแปรสุ่ม						
13	P(Z ≤ z) = 0.9750	1.96					
14	P(Z > z) = 0.9750	-1.96					
15							
16	ถ้า X ~ N(3,0.0064)						
17	P(X ≤ x) = 0.95	3.132					
18	P(X > x) = 0.01	3.186					
19							

หรืออาจใช้ฟังก์ชันทางสถิติจาก เมนู Formulas เช่นการหาค่า P(Z≤1.85) ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเมนู Formulas เลือก Insert Function

ในส่วน select a category เลือก Statistical

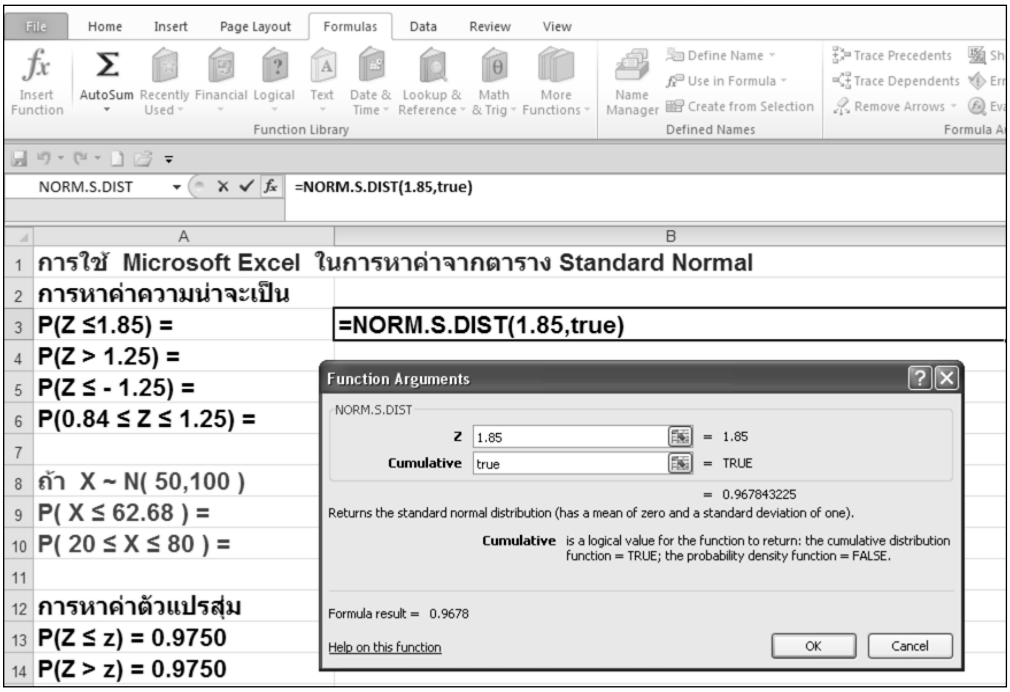
ในส่วน Select a function เลือก NORM.S.DIST



ขั้นตอนที่ 2 ใส่ค่าของ Arguments ในส่วน z ระบุค่า z ในที่นี้คือ 1.85

ในส่วน cumulative ระบุค่า true

เลือก OK



สรุปท้ายบท

การกำหนดข้อมูลที่สนใจในรูปของตัวแปรสุ่มเพื่อคำนวณค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจหรือความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนั้นขึ้นอยู่กับว่าตัวแปรสุ่มนั้นเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง หรือตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ในเอกสารฉบับนี้อธิบายเฉพาะการวิธีหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งเป็นการหาค่าพื้นที่ใต้โค้งการแจกแจงแบบต่อเนื่องแบบต่าง ๆ โดยใช้ตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ตารางการแจกแจงแบบที เป็นต้น นอกจากนี้ในการแจกแจงแบบต่าง ๆ ถ้ากำหนดค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มยังสามารถหาค่าของตัวแปรสุ่มที่สอดคล้องกับค่าความน่าจะเป็นที่กำหนดได้ด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ตัวแปรสุ่ม Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน จงหา

   1.1 $P(Z \leq 1.37)$

   1.2 $P(Z \leq -1.17)$

1.3 $P(Z \geq -1.75)$

1.4 $P(Z \geq 1.5)$

1.5 $P(0 \leq Z \leq 1)$

1.6 $P(-2.50 \leq Z \leq 0)$

1.7 $P(-2 \leq Z \leq 2)$

1.8 $P(Z = 1.4)$

2. ให้ $X \sim N(80,100)$ จงหา

2.1 $P(X \leq 100)$

2.2 $P(65 \leq X \leq 100)$

2.3 $P(X \geq 70)$

2.4 $P(85 \leq X \leq 95)$

3. ให้ $Z \sim N(0,1)$ จงหาค่าของ z ที่ทำให้ความน่าจะเป็นในแต่ละข้อเป็นจริง

3.1 $P(Z \leq z) = 0.9838$

3.2 $P(0 \leq Z \leq z) = 0.291$

3.3 $P(Z \geq z) = 0.121$

3.4 $P(Z \geq z) = 0.95$

3.5 $P(Z > z) = 0.975$

4. ให้ $X \sim N(20,4)$ จงหาค่าคงที่ x ที่ทำให้ความน่าจะเป็นในแต่ละข้อเป็นจริง

4.1 $P(X \leq x) = 0.90$

4.2 $P(X \leq x) = 0.05$

5. คะแนนสอบวิชาสถิติของนักศึกษากลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีคะแนนเฉลี่ย 500 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 100 คะแนน จงหา

5.1 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งได้คะแนนต่ำกว่า 375 คะแนน

5.2 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งได้คะแนนไม่ต่ำกว่า 400 คะแนน

6. ในประชากรหญิงกลุ่มหนึ่ง พบว่าพลังงานที่ร่างกายต้องการซึ่งได้รับจากการบริโภคอาหารใน 1 วัน มีค่าเฉลี่ย2100 แคลอรี่ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 200 แคลอรี่ และมีการแจกแจงแบบปกติ จงหา

6.1 ความน่าจะเป็นที่ผู้หญิงคนหนึ่งจะได้รับพลังงาน 2200 ถึง 2400 แคลอรี่ใน 1 วัน

6.2 ความน่าจะเป็นที่ผู้หญิงคนหนึ่งจะได้รับพลังงานน้อยกว่า 2200 แคลอรี่ใน 1 วัน

7. สมมุติว่าความกว้างของศีรษะของผู้ขับขี่มอเตอร์ไซต์รับจ้างมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 22.8 นิ้วและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.1 นิ้ว ในการทำหมวกกันน็อคต้องทำคราวละมากๆ ให้ทุกคนใส่ได้ยกเว้นผู้ที่มีความกว้างของศีรษะเล็กเกินไป หรือใหญ่เกินไป กลุ่มละ 5% ซึ่งจะต้องสั่งเป็นพิเศษ อยากทราบว่าผู้ที่มีขนาดศีรษะเท่าใดที่จะต้องสั่งหมวกกันน็อคเป็นพิเศษ
8. เครื่องกดน้ำอัดลมเครื่องหนึ่งได้ถูกตั้งไว้ให้จ่ายน้ำอัดลมโดยเฉลี่ย 7.00 ออนซ์ ต่อถ้วยสมมุติว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำอัดลมที่จ่ายคือ 0.10 ออนซ์ และปริมาณน้ำอัดลมที่จ่ายมีการแจกแจงแบบปกติจงหา

   8.1 เปอร์เซ็นต์ที่เครื่องกดน้ำอัดลมนี้จะจ่ายน้ำอัดลมระหว่าง 7.10 ถึง 7.25 ออนซ์

   8.2 เปอร์เซ็นต์ที่เครื่องกดน้ำอัดลมนี้จะจ่ายน้ำอัดลมอย่างน้อย 7.25 ออนซ์

   8.3 เปอร์เซ็นต์ที่เครื่องกดน้ำอัดลมนี้จะจ่ายน้ำอัดลมระหว่าง 6.80 ถึง 7.25 ออนซ์
9. ถ้าฉลากข้างกระป๋องของแฮมที่นำเข้ามาจากต่างประเทศระบุว่ามีน้ำหนัก 9.00 ปอนด์แต่ในการตรวจสอบพบว่าน้ำหนักที่ซึ่งได้มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 9.20 ปอนด์และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.25 ปอนด์ จงหาว่า

   9.1 จะมีแฮมบรรจุกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่าน้ำหนักที่ระบุไว้บนฉลากในสัดส่วนเท่าใด

   9.2 ถ้าบริษัทที่นำเข้าต้องการลดสัดส่วนของแฮมบรรจุกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่าที่ระบุไว้บนฉลากโดยมีทางเลือกสองทางได้แก่

   วิธีที่ 1 เพิ่มน้ำหนักโดยเฉลี่ยให้เป็น 9.25 ปอนด์โดยให้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าคงเดิม

   วิธีที่ 2 ลดส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.15 ปอนด์โดยให้น้ำหนักเฉลี่ยมีค่าคงเดิม

   ท่านจะแนะนำให้ใช้ทางเลือกใด

10. บริษัทผลิตผงซักฟอกแห่งหนึ่ง ใช้เครื่องจักรในการบรรจุผงซักฟอกโดยใช้หลักการควบคุมคุณภาพเชิงสถิติ เพื่อไม่ให้ผงซักฟอกในแต่ละกล่องมากกว่าหรือน้อยกว่าน้ำหนักที่กำหนดไว้มากเกินไป จากประสบการณ์การผลิตทราบว่า น้ำหนักผงซักฟอกมีการแจกแจงปกติด้วยน้ำหนักเฉลี่ยเท่ากับ 7 กก. และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.4 กก.

10.1 จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มผงซักฟอกมากล่องหนึ่งจะหนักเกิน 6.5 กก.

10.2 ถ้ามีผงซักฟอกจำนวน 25% ของจำนวนทั้งหมดหนักกว่าน้ำหนักที่กำหนดไว้ค่าหนึ่ง จงหาน้ำหนักที่กำหนดนั้น

10.3 ถ้าท่านซื้อผงซักฟอกจากบริษัทดังกล่าว จำนวน 10 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผงซักฟอกน้ำหนักเกิน 7 กก. จำนวน 5 กล่อง

10.4 ถ้าผลิตผงซักฟอกจำนวน 200 กล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผงซักฟอกที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 7.93 กก. จำนวน 15 กล่อง

11. จากตารางการแจกแจงแบบที จงหา

    11.1 $t_{0.975,17}$

    11.2 $t_{0.01,10}$

    11.3 $t_{0.05,49}$

    11.4 $t_{0.025,18}$

    11.5 ค่า t ที่ทำให้ $P(-t < T < t) = 0.9$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ 23

12. จากตารางการแจกแจงแบบไคสแควร์ จงหา

    12.1 $\chi^2_{0.975,28}$

    12.2 $\chi^2_{0.005,15}$

    12.4 ค่า a ที่ทำให้ $P(\chi^2 < a) = 0.05$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ 16

13. จากตารางการแจกแจงแบบเอฟ จงหา

    13.1 $f_{0.01,20,24}$

    13.3 $f_{0.99,18,20}$