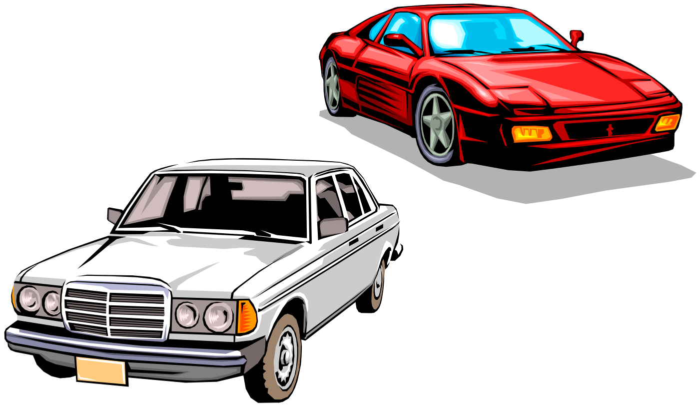
การวิเคราะห์ความแปรปรวน

(Analysis of Variance)

เปรียบเทียบผลต่างของยอดขายเฉลี่ยของรถยนต์ 2 ยี่ห้อ ว่ามียอดขายเฉลี่ยแตกต่างกันหรือไม่



$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

การทดสอบสมมติฐาน

ของผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ย 2 ประชากร

ยอดขายเฉลี่ย

เปรียบเทียบคุณภาพของวิธีการสอนของอาจารย์ 2 ท่าน ว่าทำให้<u>คะแนนเฉลี่ย</u>ของนักเรียนแตกต่างกันหรือไม่

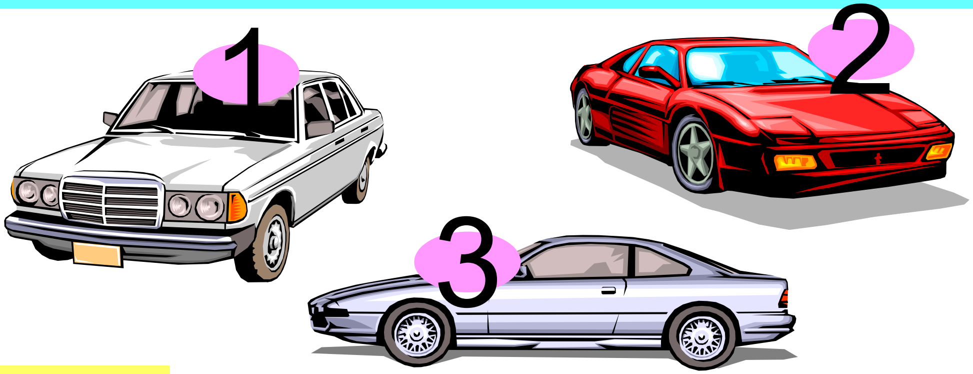
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

การทดสอบสมมติฐาน

ของผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ย 2 ประชากร

คะแนนเฉลี่ย

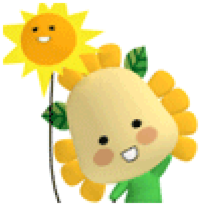
เปรียบเทียบยอดขายเฉลี่ยของรถยนต์ 3 ยี่ห้อ ว่าแตกต่างกันหรือไม่



$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_3$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_3$$

$$H_0 : \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1 : \mu_2 \neq \mu_3$$



Sir R.A.Fisher จึงคิดค้นวิธีการที่สามารถนำมาใช้ในกรณีนี้ได้ เรียกว่า "<u>การวิเคราะห์ความแปรปรวน</u>" (Analysis of variance) หรือ ANOVA

เป็นเทคนิคการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างประชากรมากกว่า 2 กลุ่ม (k กลุ่ม) โดยทำการทดสอบเพียงครั้งเดียว

การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way Analysis of Variance)

การวิเคราะห์ความแปรปรวนสองทาง (Two-way Analysis of Variance)

การเปรียบเทียบคุณภาพของวิธีการสอน 4 วิธี

จะต้องเปรียบเทียบ*คะแนนสอบเฉลี่ยของนักเรียน* ที่ได้รับการสอนแต่ละวิธีว่าแตกต่างกันหรือไม่

นักเรียนคนที่	วิธีสอน			
	วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4
1	x11	x21	x31	x41
2	x12	x22	x32	x42
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	x43
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	x44
5	x15	x25	x35	x45
6	x16	x26	x36	x46
7	x17	x27	x37	x47

วิธีสอน → **factor**

วิธีที่ 1–4 → **treatment**

คะแนนสอบ → **ค่าสังเกต**

นักเรียน → **หน่วยทดลอง**

ตัวอย่าง บริษัทผลิตถุงกระดาษที่ใช้ในร้านขายของชำพบว่าความเหนียวของถุงกระดาษข้นอยู่กับความเข้มข้นของเยื่อไม้ที่ใช้ทำเยื่อกระดาษ จึงทำการทดลองผลิตถุงกระดาษโดยใช้ความเข้มข้นของเยื่อไม้ต่างกัน คือ 5% , 10% , 15% และ 20% แล้วทำการวัดความเหนียวของถุงกระดาษที่เลือกจากแต่ละกลุ่ม ๆ ละ 6 ใบ

- ค่าสังเกต = ความเหนียวของถุงกระดาษ
- แฟคเตอร์ = ความเข้มข้นของเยื่อไม้
- ทรีทเมนต์ = ความเข้มข้นของเยื่อไม้ต่างกันคือ 5% , 10% , 15% และ 20%
- หน่วยทดลอง = ถุงกระดาษ

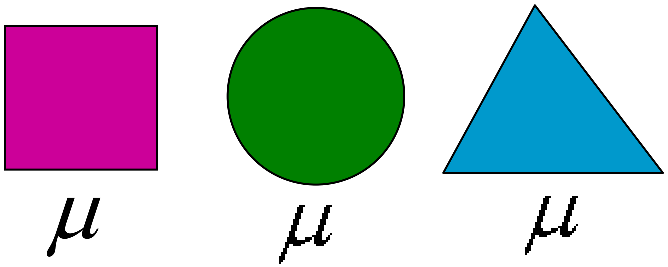
ข้อตกลงเบื้องต้นในการวิเคราะห์ความแปรปรวน

1. ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์(ค่าสังเกต)ต้องมีระดับการวัดตั้งแต่ระดับอันตรภาค (Interval scale) ขึ้นไป
2. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ
3. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มต้องเป็นอิสระจากกัน
4. กลุ่มตัวอย่างแต่ละกลุ่มมาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One-way Analysis of Variance)

เป็นเทคนิคการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ยระหว่างประชากรมากกว่า 2 กลุ่ม (k กลุ่ม) โดยทำการทดสอบเพียงครั้งเดียว

population



สมมติฐานเชิงสถิติ

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_k$ อย่างน้อย 1 คู่

H_0 : ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในประชากร k กลุ่มไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในประชากร k กลุ่มแตกต่างกันอย่างน้อย 1 คู่

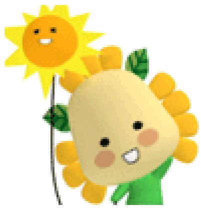
Multiple Comparisons
การเปรียบเทียบเชิงซ้อน
การทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่

- ถ้าความแปรปรวนของทุกกลุ่มไม่แตกต่างกัน
  - LSD
  - Bonferroni
  - Scheffe
  - Tukey
  - Duncan

- ถ้าความแปรปรวนของทุกกลุ่มแตกต่างกัน
  - Tamhane’s T2
  - Dunnett’s T3

ลักษณะของข้อมูล

ประชากรที่	1	2	3	…	k
	⇩	⇩	⇩		⇩
กลุ่มตัวอย่างที่	1	2	3	…	k
	X_{11}	X_{21}	X_{31}		X_{k1}
	X_{12}	X_{22}	X_{32}		X_{k2}
	X_{13}	X_{23}	X_{33}		X_{k3}
ข้อมูลดิบ	X_{14}	X_{24}	X_{34}		X_{k4}
	X_{15}	X_{25}	X_{35}		X_{k5}
	X_{16}	X_{26}	X_{36}		X_{k6}
		X_{27}	X_{37}		



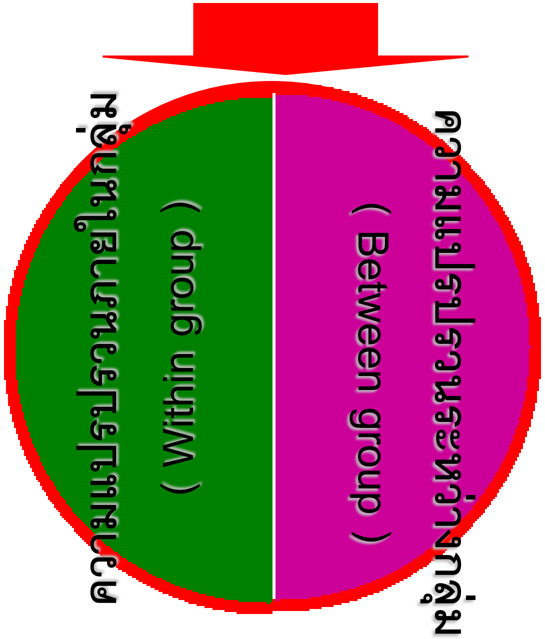
หลักการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ปริมาณของวิตามินซี

วิธีที่ 1	วิธีที่ 2	วิธีที่ 3	วิธีที่ 4
88	123	72	89
83	115	78	88
80	122	75	87
87	118	79	89
90	120	80	90
89	119	82	89
92	117	78	88
90	116	74	90
86	119	76	85
90	122	80	91

ความแปรปรวนทั้งหมด

(Total Variance)



เปรียบเทียบกัน

ตัวสถิติทดสอบ

$$F = \frac{MSB}{MSE}$$

ซึ่งคำนวณจากตารางที่เรียกว่า ANOVA ดังนี้

แหล่งความแปรปรวน (Source of variation)	องศาอิสระ (df)	ผลรวมกำลังสอง (Sum of Square) (SS)	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย (Mean of Square) $(MS = \frac{ss}{df})$	ค่าตัวสถิติ (F)
ระหว่างกลุ่ม	k-1	SSB	$MSB = \frac{SSB}{k-1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
ภายในกลุ่ม	n-k	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-k}$	
รวม	n-1	SST		

เมื่อ k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

n คือ จำนวนตัวอย่างทั้งหมด

CM = (ผลรวมข้อมูลทั้งหมด)^2 / จำนวนตัวอย่าง

SST = ผลบวก(ข้อมูลแต่ละตัว)^2 – CM

SSB = ผลบวก((ผลรวมข้อมูลแต่ละกลุ่ม)^2 / จำนวนตัวอย่างแต่ละกลุ่ม) - CM

SSE = SST - SSB

$$CM(\text{corrected of Mean}) = \frac{(\sum\sum x_{ij})^2}{n}$$

$$SST = \sum\sum(x_{ij} - \bar{x})^2$$

$$= \sum\sum x_{ij}^2 - CM$$

$$SSB = \sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum\left(\frac{(\sum x_i)^2}{n_i}\right) - CM$$

$$SSE = SST - SSB$$

$$CM(\text{corrected of Mean}) = \frac{(\sum\sum x_{ij})^2}{n}$$

$$SST = \sum\sum(x_{ij} - \bar{x})^2$$

$$= \sum\sum x_{ij}^2 - CM$$

$$SSB = \sum n_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum\left(\frac{(\sum x_i)^2}{n_i}\right) - CM$$

$$SSE = SST - SSB$$

		x_{21}	x_{31}	x_{41}
		x_{22}	x_{32}	x_{42}
		x_{23}	x_{33}	x_{43}
		x_{24}	x_{34}	x_{44}
		x_{25}	x_{35}	x_{45}
		x_{26}	x_{36}	x_{46}
		x_{27}	x_{37}	
จำนวนตัวอย่าง	n_1	n_2	n_3	n_4
ผลรวมข้อมูลแต่ละกลุ่ม	$\sum x_1$	$\sum x_2$	$\sum x_3$	$\sum x_4$

ผลรวมข้อมูลทั้งหมด เท่ากับ $\sum\sum x_{ij}$

ตาราง ANOVA

แหล่งความแปรปรวน (Source of variation)	องศาอิสระ (df)	ผลรวมกำลังสอง (Sum of Square) (SS)	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย (Mean of Square) $(MS=\frac{SS}{df})$	ค่าตัวสถิติ (F)
ระหว่างกลุ่ม	k-1	SSB	$MSB=\frac{SSB}{k-1}$	$F=\frac{MSB}{MSE}$
ภายในกลุ่ม	n-k	SSE	$MSE=\frac{SSE}{n-k}$	
รวม	n-1	SST		

ตัวสถิติทดสอบ

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_k$ อย่างน้อย 1 คู่

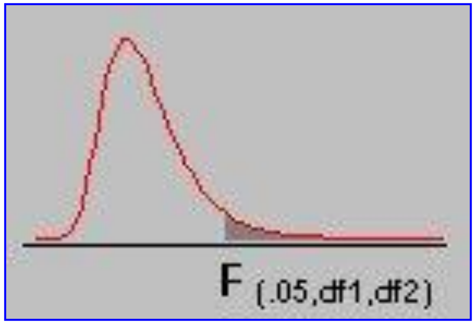
ค่าวิกฤต $f_{\alpha,k-1,n-k}$ และปฏิเสธ H_0 เมื่อค่าสถิติทดสอบ F มากกว่า ค่าวิกฤต

F Table for α =.05

สัญญลักษณ์

$f_{\alpha,v1,v2}$

เมื่อ $v_1 = k - 1$ และ $v_2 = n - k$



df ตัวแรก

df ตัวที่สอง

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759

$f_{\alpha,v1,v2}$

กำหนด $\alpha = 0.05$, $k = 4$, $n = 8$

$$f_{\alpha,v1,v2} = f_{0.05,3,4}$$

ตัวอย่าง ในการหาปริมาณฟอสฟอรัสจากฟางข้าวที่ใช้เทคนิคการสกัดที่แตกต่างกัน 4 เทคนิค ในการทดสอบจึงนำฟางข้าวที่มีอายุเท่ากันและมาจากแหล่งเดียวกันมาทำการสกัดฟอสฟอรัสด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ได้ผลดังนี้

ปริมาณฟอสฟอรัส			
เทคนิคที่ 1	เทคนิคที่ 2	เทคนิคที่ 3	เทคนิคที่ 4
34	37	39	36
31	41	37	35
34	38	38	37
30	43	37	38
34	37	36	36
32	42	42	38
34	40	40	36
32	44	41	35
261	322	310	291

อยากทราบว่าปริมาณฟอสฟอรัสจากฟางข้าวที่ได้จากเทคนิคการสกัดทั้ง 4 เทคนิค แตกต่างกันหรือไม่ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

$$CM = \frac{(\sum\sum x_{ij})^2}{n} = \frac{1184^2}{32} = 43808$$

$$SST = \sum\sum x_{ij}^2 - CM$$
$$= (34^2 + 31^2 + 34^2 + \ldots + 35^2) - 43808$$
$$= 44184 - 43808$$
$$= 376$$

ปริมาณฟอสฟอรัส			
เทคนิคที่ 1	เทคนิคที่ 2	เทคนิคที่ 3	เทคนิคที่ 4
34	37	39	36
31	41	37	35
34	38	38	37
30	43	37	38
34	37	36	36
32	42	42	38
34	40	40	36
32	44	41	35
261	322	310	291

$$SSB = \sum\left(\frac{(\sum x_i)^2}{n_i}\right) - CM$$

$$= \left(\frac{261^2}{8} + \frac{322^2}{8} + \frac{310^2}{8} + \frac{291^2}{8}\right) - 43808$$

$$= 44073.25 - 43808$$

$$= 265.25$$

$$SSE = SST - SSB$$

$$= 376 - 265.25$$

$$= 110.75$$

Source of variation	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	3	SSB=265.25	MSB=88.41	F=22.38
ภายในกลุ่ม	28	SSE=110.75	MSE=3.95	
ผลรวม	31	SST=376.00		

ANOVA

Source of variation	df	SS	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	3	SSB=265.25	MSB=88.41	F=22.38
ภายในกลุ่ม	28	SSE=110.75	MSE=3.95	
ผลรวม	31	SST=376.00		

สมมติฐานในการทดสอบ

H_0 : ปริมาณฟอสฟอรัสจากเทคนิคการสกัดทั้ง 4 เทคนิคไม่แตกต่างกัน

H_1 : ปริมาณฟอสฟอรัสจากเทคนิคการสกัดทั้ง 4 เทคนิคแตกต่างกันอย่างน้อย 2 เทคนิค

สมมติฐานเชิงสถิติ

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \ ; i \neq j$ อย่างน้อย 1 คู่

ตัวสถิติทดสอบ จากตาราง ANOVA ตัวสถิติทดสอบ $F = \frac{MSB}{MSE}$ =22.38

ค่าวิกฤต $f_{1-\alpha,k-1,n-k} = f_{0.95,3,28} = 2.95$

เนื่องจาก F=22.38 อยู่ในบริเวณปฏิเสธ H_0 หมายความว่าปริมาณฟอสฟอรัสจากเทคนิคการสกัดทั้ง 4 เทคนิคแตกต่างกันอย่างน้อย 2 เทคนิค ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ด้วย SPSS

คำสั่ง

Analyze→ Compare Means →One-Way ANOVA…

ตัวอย่าง file example19.sav

สมมติฐานเชิงวิจัย

การดูดความชื้นของคอนกรีต 5 ชนิดแตกต่างกัน

ชนิดของคอนกรีตมีอิทธิพลต่อการดูดความชื้น

ชนิดของคอนกรีตมีผลทำให้การดูดความชื้นแตกต่างกัน

Tests of Normality

	TYPE	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
		Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
WEIGTH	1.00	.189	6	.200*	.906	6	.408
	2.00	.255	6	.200*	.913	6	.457
	3.00	.197	6	.200*	.939	6	.653
	4.00	.277	6	.166	.854	6	.170
	5.00	.182	6	.200*	.958	6	.803

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

H_0: การดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดมีการแจกแจงแบบปกติ

H_1: การดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดไม่มีการแจกจแงแบบปกติ

จากตารางการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับการแจกแจงแบบปกติด้วยตัวสถิติ Kolmogorov-Smirnov Test พบว่าค่า Sig > 0.05 ทุกชนิด หมายความว่าการดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดมีการแจกแจงแบบปกติที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

Descriptives

WEIGTH

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
1.00	6	553.3333	110.15383	44.97011	437.7340	668.9327	450.00	731.00
2.00	6	569.3333	47.98611	19.59025	518.9750	619.6917	508.00	633.00
3.00	6	610.5000	59.94581	24.47277	547.5907	673.4093	511.00	677.00
4.00	6	465.1667	57.60700	23.51796	404.7118	525.6215	415.00	555.00
5.00	6	610.6667	58.78322	23.99815	548.9775	672.3559	522.00	679.00
Total	30	561.8000	84.96993	15.51332	530.0717	593.5283	415.00	731.00

Test of Homogeneity of Variances

WEIGTH

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1.602	4	25	.205

H_0: ความแปรปรวนของการดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดไม่แตกต่างกัน

H_1:ความแปรปรวนของการดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดแตกต่างกัน

จากตารางการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแปรปรวนด้วยตัวสถิติ Levene's Test เท่ากับ 1.602 และ ค่า Sig > 0.05 หมายความว่าความแปรปรวนของการดูดความชื้นในคอนครีตแต่ละชนิดไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ANOVA

WEIGTH

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	85356.47	4	21339.117	4.302	.009
Within Groups	124020.3	25	4960.813		
Total	209376.8	29			

H_0: การดูดความชื้นของคอนครีตแต่ละชนิดไม่แตกต่างกัน

H_1:การดูดความชื้นของคอนครีตแต่ละชนิดแตกต่างกันอย่างน้อย 1 คู่

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \neq \mu_k$ อย่างน้อย 1 คู่

จากตารางการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของการดูดความชื้นของคอนครีตแต่ละชนิด ด้วยตัวสถิติ F-Test เท่ากับ 4.302 และ ค่า Sig < 0.05 หมายความว่าการดูดความชื้นของคอนครีต 5 ชนิดแตกต่างกันอย่างน้อย 1 คู่ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

Multiple Comparisons

Dependent Variable: WEIGTH
Scheffe

(I) TYPE	(J) TYPE	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	-16.0000	40.66454	.997	-151.0824	119.0824
	3.00	-57.1667	40.66454	.740	-192.2491	77.9158
	4.00	88.1667	40.66454	.346	-46.9158	223.2491
	5.00	-57.3333	40.66454	.738	-192.4158	77.7491
2.00	1.00	16.0000	40.66454	.997	-119.0824	151.0824
	3.00	-41.1667	40.66454	.903	-176.2491	93.9158
	4.00	104.1667	40.66454	.195	-30.9158	239.2491
	5.00	-41.3333	40.66454	.902	-176.4158	93.7491
3.00	1.00	57.1667	40.66454	.740	-77.9158	192.2491
	2.00	41.1667	40.66454	.903	-93.9158	176.2491
	4.00	145.3333*	40.66454	.030	10.2509	280.4158
	5.00	-.1667	40.66454	1.000	-135.2491	134.9158
4.00	1.00	-88.1667	40.66454	.346	-223.2491	46.9158
	2.00	-104.1667	40.66454	.195	-239.2491	30.9158
	3.00	-145.3333*	40.66454	.030	-280.4158	-10.2509
	5.00	-145.5000*	40.66454	.030	-280.5824	-10.4176
5.00	1.00	57.3333	40.66454	.738	-77.7491	192.4158
	2.00	41.3333	40.66454	.902	-93.7491	176.4158
	3.00	.1667	40.66454	1.000	-134.9158	135.2491
	4.00	145.5000*	40.66454	.030	10.4176	280.5824

*. The mean difference is significant at the .05 level.

จากการเปรียบเทียบเชิงซ้อนด้วยวิธี Scheffe พบว่าการดูดความชื้นของคอนครีตชนิดที่ 3 กับ 4 และชนิดที่ 4 กับ 5 แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ($P<0.05$)

Try its Yourself

1. ทดสอบสมมติฐานที่ว่าระดับของปัญหาและอุปสรรคในการปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายในภาพรวมของนักศึกษาที่ทำงานที่ได้รับมอบหมายเสร็จในแต่ละกลุ่มแตกต่างกัน
2. ทดสอบสมมติฐานที่ว่าระดับของปัญหาและอุปสรรคในการทำงานที่ได้รับมอบหมายด้านนักศึกษาของนักศึกษาแต่ละชั้นปีแตกต่างกัน
3. ทดสอบสมมติฐานที่ว่าระดับปัญหาและอุปสรรคในการทำงานที่ได้รับมอบหมายด้านอาจารย์ของนักศึกษาแต่ละคณะแตกต่างกัน

ก่อนการทดสอบสมมติฐานในแต่ละข้อในตรวจสอบว่า

1. ข้อมูลแต่ละกลุ่มมีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่
2. ความแปรปรวนของข้อมูลแต่ละกลุ่มเท่ากันหรือไม่

หลังการทดสอบสมมติฐาน หากพบความแตกต่างระหว่างกลุ่มให้ทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยแต่ละคู่ด้วย

การทำงานของนักศึกษา	ระดับของปัญหาและอุปสรรคในการปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายในภาพรวม					
	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	Kolmogorov-Smirnov Test	p-value	Levene's Test	p-value
กลุ่ม 1 ทำงานเสร็จทุกครั้ง						
กลุ่ม 2 ทำงานเสร็จเป็นส่วนใหญ่						
กลุ่ม 3 ทำงานเสร็จเป็นส่วนน้อย						
กลุ่ม 4 ทำงานไม่เสร็จเลย						

แหล่งความแปรผัน	ผลรวมกำลังสอง	องศาอิสระ	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย	F-Test	p-value
กลุ่มการทำงานของนักศึกษา					
ความคลาดเคลื่อน					
รวม					

แหล่งความแปรผัน	ผลรวมกำลังสอง	องศาอิสระ	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย	F-Test	p-value
กลุ่มการทำงานของนักศึกษา					
ความคลาดเคลื่อน					
รวม					

กลุ่มของนักศึกษา		ระดับของปัญหาและอุปสรรคในการปฏิบัติงานที่ได้รับมอบหมายในภาพรวม	
		ผลต่างของค่าเฉลี่ย	p-value
กลุ่ม 1	กลุ่ม 2		
	กลุ่ม 3		
	กลุ่ม 4		
กลุ่ม 2	กลุ่ม 3		
	กลุ่ม 4		
กลุ่ม 3	กลุ่ม 4		