

บทที่ 3

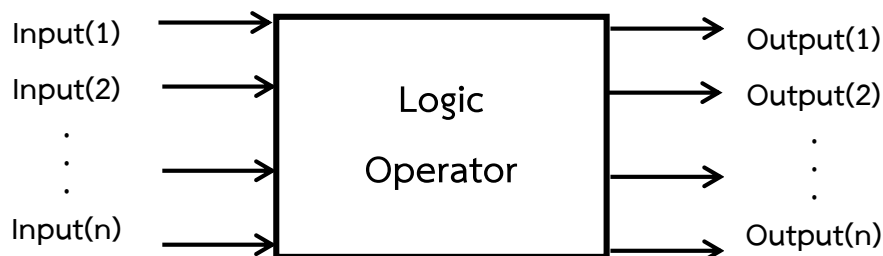
ทฤษฎีลอจิก และวงจรดิจิทัล

~~~~~

การทำงานของระบบดิจิทัล สามารถอธิบายได้โดยใช้สมการพีชคณิตลอจิก (Logic Equation) ซึ่งประกอบด้วย

ตัวแปรลอจิก (Logic Variable) เป็นตัวแปรที่รับค่าเพียงสองค่า หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวแปรสองสถานะ (Bi-State Variable) โดยมีข้อกำหนดคือ สามารถมีสถานะได้เพียงสองสถานะเท่านั้น และจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเท่านั้น จะอยู่พร้อมกันทั้งสองสถานะในเวลาเดียวกันไม่ได้ สถานะดังกล่าวอาจแทนความหมายต่าง ๆ เช่น เปิด-ปิด, สูง-ต่ำ, หนึ่ง-ศูนย์ เป็นต้น

ตัวกระทำทางลอจิก (Logic Operators) เป็นตัวรับเอาตัวแปรลอจิกมาดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ โดยผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกระทำและสถานะของตัวแปรลอจิกที่ถูกกระทำ เขียนแทนด้วยไดอะแกรมได้ดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 ตัวกระทำทางลอจิก

ตัวแปรอินพุต 1 ตัว สามารถทำให้เกิดสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี เช่น ตัวแปร A มีสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี คือ  $A=0$  หรือ  $A=1$  เมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรอินพุตเป็น 2 ตัว เช่น A และ B สถานะที่แตกต่างกันจะเพิ่มเป็น 4 กรณี หรือ  $2^2$  กรณี คือ  $A=0, B=0$  หรือ  $A=0, B=1$  หรือ  $A=1, B=0$  และ  $A=1, B=1$

ดังนั้นถ้ามีตัวแปรอินพุตจำนวน n ตัว จะสถานะที่แตกต่างกันทั้งหมด  $2^n$  กรณี

ตัวกระทำทางลอจิกพื้นฐานได้แก่ AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR และ XNOR

ตารางค่าความจริง (Truth Table) เป็นตารางแสดงความสัมพันธ์ค่าตรรกะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากสมการลอจิก

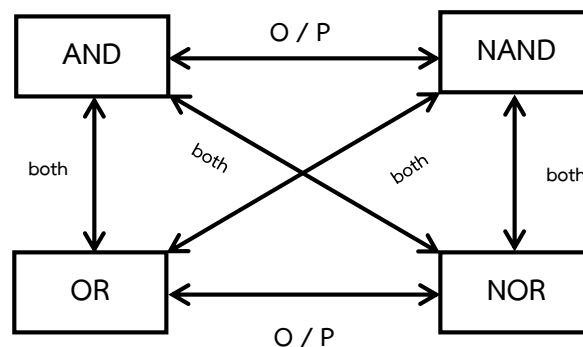
ตารางค่าความจริง ประกอบด้วย ค่าสถานะของตัวแปรอินพุตที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $2^n$  กรณี เมื่อ  $n$  คือ จำนวนตัวแปรลอจิกด้านอินพุต และสถานะของตัวแปรด้านเอาต์พุตที่เกิดจากการกระทำทางลอจิกระหว่างตัวแปรด้านอินพุตค่าต่าง ๆ

ลอจิกเกต (Logic Gate) คือ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (Switch) นั่นคือ มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก โดยแรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) และแรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) แทนระดับลอจิก 0 และ 1 ตามลำดับ

### 3.1 วงจรลอจิกเกต

วงจรเกตเป็นวงจรขนาดเล็กที่สุดของวงจรดิจิทัลและคอมพิวเตอร์ วงจรเกตพื้นฐานมีอยู่ 3 ชนิด คือ AND Gate, OR Gate และ NOT Gate

เกตประเภท AND, OR และ NOT นั้นจะเป็นเกตพื้นฐานสำหรับการพัฒนาเกตตัวอื่นๆ และเกตต่าง ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ NAND เกตได้ดังภาพที่ 3.2 จะเป็นการแสดงความสัมพันธ์การเปลี่ยนรูปร่างระหว่างเกตชนิดต่าง ๆ



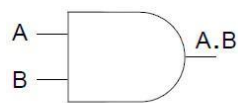
ภาพที่ 3.2 การเปลี่ยนแปลงรูปแบบระหว่างเกตชนิดต่าง ๆ

จากภาพที่ 3.2 O/P หมายความว่า เอาต์พุตจะได้รับการเปลี่ยนแปลง เช่น จะเปลี่ยน AND เกตไปเป็น NAND เกตก็ให้ใส่ NOT ที่เอาต์พุตของ AND เกต ทำนองเดียวกันหากจะเปลี่ยน NAND เกตมาเป็น AND เกต ก็ให้ใส่ NOT ที่เอาต์พุตของ NAND เกตเช่นกัน นอกจากนั้น I/P จะหมายถึงมีการเปลี่ยนแปลงที่อินพุต และอักษรกำกับลูกศรที่เขียนว่า “both” ก็คือการเปลี่ยนแปลงที่ใส่ NOT ทั้งอินพุตและเอาต์พุตของลอจิกนั้น ๆ

จากการประยุกต์ใช้วงจรเกตพื้นฐาน ทำให้สามารถสร้างเป็นเกตใหม่ขึ้นได้หลายชนิดและใช้ในงานที่ซับซ้อนได้ เช่น NAND Gate, NOR Gate, Exclusive OR Gate, Exclusive NOR Gate และ buffer Gate เป็นต้น

## 1) AND Gate

สัญลักษณ์



AND Gate

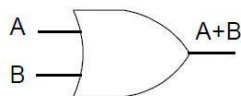
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A, B) = A \cdot B$ 

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output                |
|-------|---|-----------------------|
| A     | B | $f(A, B) = A \cdot B$ |
| 0     | 0 | 0                     |
| 0     | 1 | 0                     |
| 1     | 0 | 0                     |
| 1     | 1 | 1                     |

## 2) OR Gate

สัญลักษณ์



OR Gate

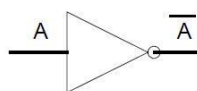
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A, B) = A + B$ 

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output            |
|-------|---|-------------------|
| A     | B | $f(A, B) = A + B$ |
| 0     | 0 | 0                 |
| 0     | 1 | 1                 |
| 1     | 0 | 1                 |
| 1     | 1 | 1                 |

## 3) NOT Gate

สัญลักษณ์



NOT Gate

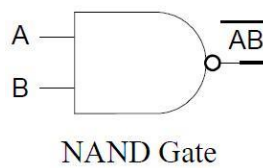
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A) = \bar{A}$

ตารางค่าความจริง

| Input | Output             |
|-------|--------------------|
| A     | $f(A,B) = \bar{A}$ |
| 0     | 1                  |
| 1     | 0                  |

#### 4) NAND Gate

สัญลักษณ์



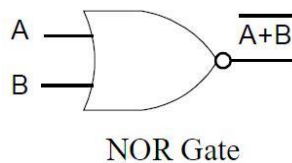
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A,B) = \overline{A \cdot B}$

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output                          |
|-------|---|---------------------------------|
| A     | B | $f(A,B) = \overline{A \cdot B}$ |
| 0     | 0 | 1                               |
| 0     | 1 | 1                               |
| 1     | 0 | 1                               |
| 1     | 1 | 0                               |

#### 5) NOR Gate

สัญลักษณ์



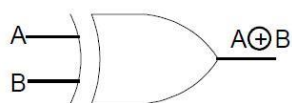
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A,B) = \overline{A + B}$

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output                      |
|-------|---|-----------------------------|
| A     | B | $f(A,B) = \overline{A + B}$ |
| 0     | 0 | 1                           |
| 0     | 1 | 0                           |
| 1     | 0 | 0                           |
| 1     | 1 | 0                           |

## 6) Exclusive OR Gate

สัญลักษณ์



Exclusive OR Gate

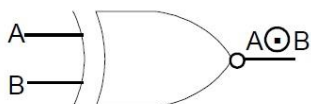
สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A,B) = A \oplus B$

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output                |
|-------|---|-----------------------|
| A     | B | $f(A,B) = A \oplus B$ |
| 0     | 0 | 0                     |
| 0     | 1 | 1                     |
| 1     | 0 | 1                     |
| 1     | 1 | 0                     |

## 7) Exclusive NOR Gate

สัญลักษณ์



Exclusive NOR Gate

สมการพีชคณิตลอจิก  $Y = f(A,B) = \overline{A \oplus B}$

ตารางค่าความจริง

| Input |   | Output                                      |
|-------|---|---------------------------------------------|
| A     | B | $f(A,B) = \overline{A} \oplus \overline{B}$ |
| 0     | 0 | 1                                           |
| 0     | 1 | 0                                           |
| 1     | 0 | 0                                           |
| 1     | 1 | 1                                           |

### 3.2 พีชคณิตบูลีน

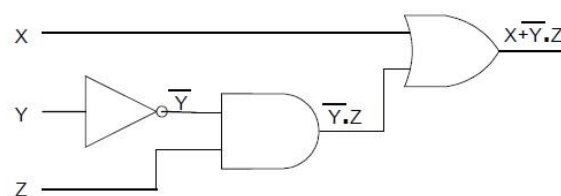
พีชคณิตแบบบูลีน เป็นเทคนิคแบบหนึ่งที่ใช้ในการลดรูป Switching Function ในพีชคณิตบูลีนเราใช้ตัวอักษร A, B, C,... แทนตัวแปรค่า 2 สภาวะ คือ 0 หรือ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวเราใช้เครื่องหมายทางเลขคณิตแทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรค่านั้น เครื่องหมายทางเลขคณิตดังกล่าวได้แก่

- เครื่องหมาย  $\cdot$  (จุด) แทนความหมาย AND
- เครื่องหมาย  $+$  (บวก) แทนความหมาย OR
- เครื่องหมาย  $\overline{\phantom{x}}$  (Bar) แทนความหมาย NOT

พีชคณิตแบบบูลีน ใช้แสดงค่าของเลขฐานสองและการคำนวณทางตรรกศาสตร์ สัญลักษณ์ตัวแปรที่ใช้จะแทนด้วยตัวอักษรเช่น A, B, x และ y เป็นต้น ค่าทางตรรกศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณได้แก่ AND, OR และ Complement ตัวอย่างเช่น บูลีนฟังก์ชัน  $F = x + y'z$  นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน F มีค่าเท่ากับ 1 ต่อเมื่อ x มีค่าเท่ากับ 1 หรือค่าของ  $y'$  และ z เท่ากับ 1 ค่า x, y และ z ถ้ามีค่านอกเหนือจากนี้จะทำให้ฟังก์ชัน F เป็น 0 ตารางค่าความจริง (Truth table) และวงจรดิจิทัลของฟังก์ชัน F จะแสดงในภาพที่ 3.3

| x | y | z | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

a) Truth table



b) Logic Diagram

ภาพที่ 3.3 a) แสดง Truth Table และ b) Logic Diagram

จุดประสงค์ของพีชคณิตแบบบูลีน คือ ช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์และออกแบบวงจรดิจิทัล โดยวิธีดังต่อไปนี้

- 1) แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิตและตารางค่าความจริง (Truth Table) ระหว่างตัวแปรแต่ละตัว
- 2) แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิต บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต-เอาต์พุต ของวงจรดิจิทัล (Digital Logic Circuit)
- 3) แสดงในรูปแบบของวงจรลดรูป (Simpler Circuit) สำหรับฟังก์ชันนั้น ๆ

### 3.2.1 ทฤษฎีพีชคณิตบูลีน

- 1) ทฤษฎีบทที่ 1 : Commutative Law (กฎการสลับที่)

- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$

- 2) ทฤษฎีบทที่ 2 : Associative Law (กฎการจัดหมู่)

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

- 3) ทฤษฎีบทที่ 3 : Distributive Law (กฎการกระจาย)

- $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$

- 4) ทฤษฎีบทที่ 4 : Identity Law (กฎของเอกลักษณ์)

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$

- 5) ทฤษฎีบทที่ 5 : Negation Law (กฎการลบข้าง)

- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $\overline{\overline{A}} = A$

- 6) ทฤษฎีบทที่ 6 : Redundance Law (กฎการลดทอน)

- $A + (A \cdot B) = A$
- $A \cdot (A + B) = A$

- 7) ทฤษฎีบทที่ 7

- $0 + A = A$
- $1 \cdot A = A$
- $1 + A = 1$
- $0 \cdot A = 0$

8) ทฤษฎีบทที่ 8

$$\begin{aligned} - \bar{A} + A &= 1 \\ - \bar{A} \cdot A &= 0 \end{aligned}$$

9) ทฤษฎีบทที่ 9

$$\begin{aligned} - A + (\bar{A} \cdot B) &= A + B \\ - A \cdot (\bar{A} + B) &= A \cdot B \end{aligned}$$

10) De Morgan's Theorem

$$\begin{aligned} - \overline{A + B} &= \bar{A} \cdot \bar{B} \\ - \overline{A \cdot B} &= \bar{A} + \bar{B} \end{aligned}$$

### 3.2.2 การใช้ทฤษฎีพีชคณิตบูลีนในการลดรูปสวิตชิงฟังก์ชัน

การออกแบบวงจรลอจิก จาก Switching function ใด ๆ ก็ตาม เราจำเป็นที่จะต้องทำการลดรูป Switching function นั้น ๆ ให้เหลือตัวแปรน้อยที่สุดเสียก่อน ทั้งนี้ก็เพื่อวัตถุประสงค์ในความประหยัด และ ข้อสำคัญอีกประการหนึ่งก็คือลดเวลาหน่วง (Delay Time) ให้น้อยที่สุด ดังนั้น Switching function ที่ยืดยาว เราก็ต้องทำให้สั้นลง โดยใช้ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

ตัวอย่างที่ 3.1 จงลดรูป Switching Function :  $A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\begin{aligned} A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} &= B \cdot (A + \bar{A}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B \cdot 1 + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B + \bar{A} \end{aligned}$$

$$\therefore A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = B + \bar{A}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงลดรูป Switching Function :  $A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

$$\begin{aligned} A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B &= A \cdot (1 + \bar{B}) + \bar{A} \cdot B \\ &= A \cdot 1 + \bar{A} \cdot B \\ &= A + \bar{A} \cdot B \\ &= A + B \end{aligned}$$

$$\therefore A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A + B$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงลดรูป Switching Function :  $\overline{(\bar{A} + A \cdot \bar{B}) + B}$

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{A} + A \cdot \bar{B}) + B} &= \overline{\bar{A} + \bar{B} + B} \\ &= \overline{\bar{A} + 1} \\ &= \bar{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{(\bar{A} + A \cdot \bar{B}) + B} = 0$$

### 3.3 วงจรคำนวณทางลอจิก

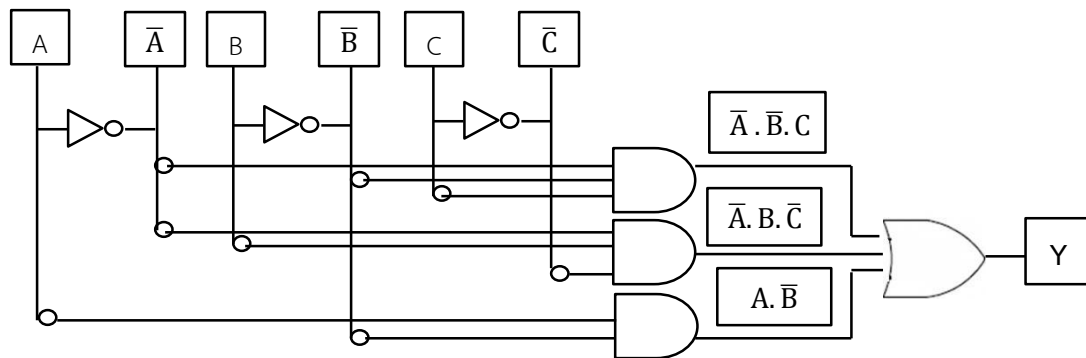
#### 3.3.1 การเขียนวงจรลอจิก

การเขียนวงจรลอจิก มีขั้นตอนดังนี้

- 1) รวมเทอมที่อยู่ในวงเล็บเข้ากับชนิดของเกต (Gate) นั้น ๆ
- 2) เทอมที่ คูณ กัน ใช้ AND Gate
- 3) เทอมที่ บวก กัน ใช้ OR Gate

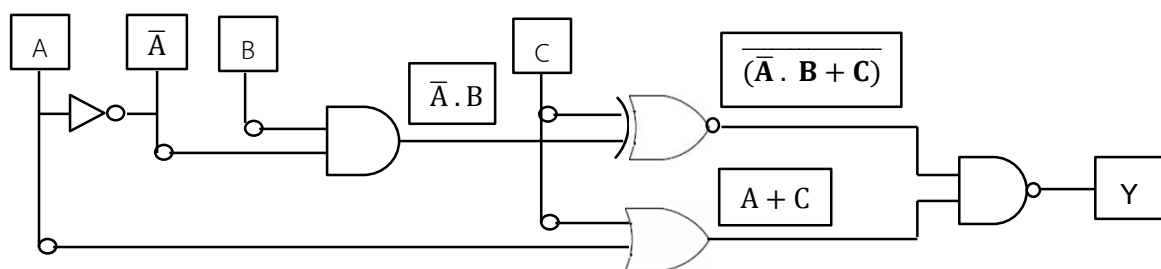
ตัวอย่างที่ 3.4 จงเขียนวงจรลอจิก จาก Boolean Expression :

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B}$$



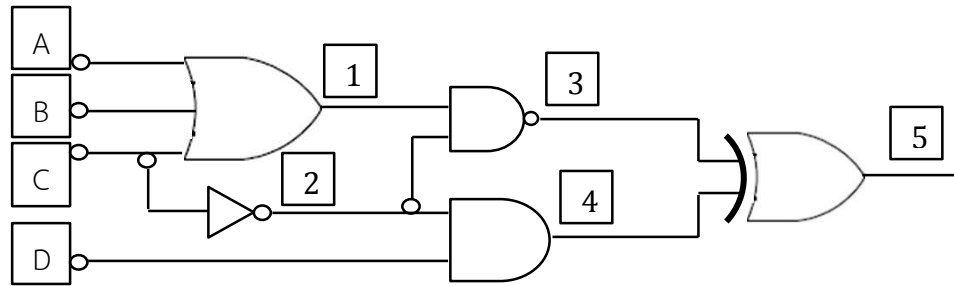
ตัวอย่างที่ 3.5 จงเขียนวงจรลอจิก จาก Boolean Expression :

$$Y = \overline{(\bar{A} \cdot B + C)} \cdot (A + C)$$



#### 3.3.2 การเขียนสวิตซ์ฟังก์ชันจากวงจรลอจิก

ตัวอย่างที่ 3.6 จงหา Function Output ของเกตทุกตัว จากวงจรลอจิก ที่กำหนดให้



ตอบ

$$1 = A + B + C$$

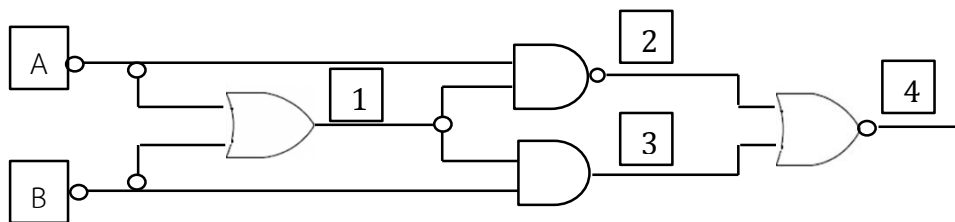
$$2 = \bar{C}$$

$$3 = \overline{(A + B + C) \cdot \bar{C}}$$

$$4 = \bar{C} \cdot D$$

$$5 = \overline{(A + B + C) \cdot \bar{C}} \oplus \bar{C} \cdot D$$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหา Function Output ของเกตทุกตัว จากวงจรลอจิก ที่กำหนดให้



ตอบ

$$1 = A + B$$

$$2 = A \cdot (A + B)$$

$$3 = B \cdot (A + B)$$

$$4 = \overline{A \cdot (A + B) + B \cdot (A + B)}$$

### 3.3.3 แบบมาตรฐานของสวิตซ์ฟังก์ชัน

1) หลักการเขียนสวิตซ์ฟังก์ชัน (สมการลอจิก)

- แบบที่ 1 Minterm เขียนในรูปของ ผลบวกของผลคูณ (Sum of Product) ดังนี้

$$F(A, B, C, D) = A \cdot B + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D$$

- แบบที่ 2 Maxterm เขียนในรูปของ ผลคูณของผลบวก (Product of Sum) ดังนี้

$$F(A, B, C, D) = (A+B) \cdot (A+B+C) \cdot (A+B+C+D) \cdot (A+B+C+D)$$

## 2) Canonical Form

- Minterm หมายถึง เทอมใดเทอมหนึ่งของเทอมผลคูณของฟังก์ชัน ที่มีตัวแปร  $n$  ตัว ประกอบด้วยตัวแปรทั้ง  $n$  ตัวนั้น โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวเกิดขึ้น 1 ครั้งในรูปแบบปกติ หรือในรูปแบบของคอมพลิเมนต์ก็ได้ เช่น ฟังก์ชันที่มีตัวแปร 3 ตัวได้แก่  $A, B, C$  มี Minterm คือ  $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}, \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C, \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}, \bar{A} \cdot B \cdot C, A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}, A \cdot \bar{B} \cdot C, A \cdot B \cdot \bar{C}, A \cdot B \cdot C$

- Maxterm หมายถึง เทอมใดเทอมหนึ่งของเทอมผลบวกของฟังก์ชัน ที่มีตัวแปร  $n$  ตัว ประกอบด้วยตัวแปรทั้ง  $n$  ตัวนั้น โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวเกิดขึ้น 1 ครั้งในรูปแบบปกติ หรือในรูปแบบของคอมพลิเมนต์ก็ได้ เช่น ฟังก์ชันที่มีตัวแปร 3 ตัวได้แก่  $A, B, C$  มี Maxterm คือ  $A + B + C, A + B + \bar{C}, A + \bar{B} + C, A + \bar{B} + \bar{C}, \bar{A} + B + C, \bar{A} + B + \bar{C}, \bar{A} + \bar{B} + C, \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

## 3) การแทน Minterm และ Maxterm ด้วยเลขฐานสอง

- กรณีที่เป็น Minterm กำหนดว่า ตัวแปรในรูปปกติ เช่น  $A, B, C$  แทนด้วย 1 ส่วนตัวแปรในรูปคอมพลิเมนต์ เช่น  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  แทนด้วย 0

- กรณีที่เป็น Maxterm กำหนดว่า ตัวแปรในรูปปกติ เช่น  $A, B, C$  แทนด้วย 0 ส่วนตัวแปรในรูปคอมพลิเมนต์ เช่น  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  แทนด้วย 1

## 4) การเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 2 ตัว

ตารางที่ 3.1 แสดงการเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 2 ตัว

| เลขฐาน 10 | ตัวแปร |   | Minterm                 | Maxterm             |
|-----------|--------|---|-------------------------|---------------------|
|           | A      | B |                         |                     |
| 0         | 0      | 0 | $\bar{A} \cdot \bar{B}$ | $A + B$             |
| 1         | 0      | 1 | $\bar{A} \cdot B$       | $A + \bar{B}$       |
| 2         | 1      | 0 | $A \cdot \bar{B}$       | $\bar{A} + B$       |
| 3         | 1      | 1 | $A \cdot B$             | $\bar{A} + \bar{B}$ |

## 5) การเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 3 ตัว

ตารางที่ 3.2 แสดงการเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 3 ตัว

| เลขฐาน 10 | ตัวแปร |   |   | Minterm                               | Maxterm                       |
|-----------|--------|---|---|---------------------------------------|-------------------------------|
|           | A      | B | C |                                       |                               |
| 0         | 0      | 0 | 0 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ | $A + B + C$                   |
| 1         | 0      | 0 | 1 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$       | $A + B + \bar{C}$             |
| 2         | 0      | 1 | 0 | $\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$       | $A + \bar{B} + C$             |
| 3         | 0      | 1 | 1 | $\bar{A} \cdot B \cdot C$             | $A + \bar{B} + \bar{C}$       |
| 4         | 1      | 0 | 0 | $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$       | $\bar{A} + B + C$             |
| 5         | 1      | 0 | 1 | $A \cdot \bar{B} \cdot C$             | $\bar{A} + B + \bar{C}$       |
| 6         | 1      | 1 | 0 | $A \cdot B \cdot \bar{C}$             | $\bar{A} + \bar{B} + C$       |
| 7         | 1      | 1 | 1 | $A \cdot B \cdot C$                   | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ |

## 6) การเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 4 ตัว

ตารางที่ 3.3 แสดงการเขียน Minterm และ Maxterm จากตัวแปร 4 ตัว

| เลขฐาน 10 | ตัวแปร |   |   |   | Minterm                                             | Maxterm                     |
|-----------|--------|---|---|---|-----------------------------------------------------|-----------------------------|
|           | A      | B | C | D |                                                     |                             |
| 0         | 0      | 0 | 0 | 0 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$ | $A + B + C + D$             |
| 1         | 0      | 0 | 0 | 1 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D$       | $A + B + C + \bar{D}$       |
| 2         | 0      | 0 | 1 | 0 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D}$       | $A + B + \bar{C} + D$       |
| 3         | 0      | 0 | 1 | 1 | $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$             | $A + B + \bar{C} + \bar{D}$ |

| เลขฐาน 10 | ตัวแปร |   |   |   | Minterm                     | Maxterm                                 |
|-----------|--------|---|---|---|-----------------------------|-----------------------------------------|
|           | A      | B | C | D |                             |                                         |
| 4         | 0      | 1 | 0 | 0 | $\bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D}$ | $A + \bar{B} + C + D$                   |
| 5         | 0      | 1 | 0 | 1 | $\bar{A}.B.\bar{C}.D$       | $A + \bar{B} + C + \bar{D}$             |
| 6         | 0      | 1 | 1 | 0 | $\bar{A}.B.C.\bar{D}$       | $A + \bar{B} + \bar{C} + D$             |
| 7         | 0      | 1 | 1 | 1 | $\bar{A}.B.C.D$             | $A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$       |
| 8         | 1      | 0 | 0 | 0 | $A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$ | $\bar{A} + B + C + D$                   |
| 9         | 1      | 0 | 0 | 1 | $A.\bar{B}.\bar{C}.D$       | $\bar{A} + B + C + \bar{D}$             |
| 10        | 1      | 0 | 1 | 0 | $A.\bar{B}.C.\bar{D}$       | $\bar{A} + B + \bar{C} + D$             |
| 11        | 1      | 0 | 1 | 1 | $A.\bar{B}.C.D$             | $\bar{A} + B + \bar{C} + \bar{D}$       |
| 12        | 1      | 1 | 0 | 0 | $A.B.\bar{C}.\bar{D}$       | $\bar{A} + \bar{B} + C + D$             |
| 13        | 1      | 1 | 0 | 1 | $A.B.\bar{C}.D$             | $\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}$       |
| 14        | 1      | 1 | 1 | 0 | $A.B.C.\bar{D}$             | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D$       |
| 15        | 1      | 1 | 1 | 1 | $A.B.C.D$                   | $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ |

ตัวอย่างที่ 3.8 จงเขียน Canonical sum of product form จาก

ก)  $f(A, B, C) = \sum m(0, 2, 4, 6)$

ข)  $f(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 4, 6)$

วิธีทำ

ก) โจทย์กำหนด  $f(A, B, C)$  แสดงว่า มีตัวแปร 3 ตัว

$\sum m$  หมายถึง ผลบวกของตัว Minterm

$\therefore \sum m(0, 2, 4, 6)$  หมายถึง การนำ Minterm ตัวที่ 0, 2, 4, 6 มาบวกกัน

โดยเขียนอยู่ในรูปของ Canonical sum of product form จะได้

$$\begin{aligned}
 f(A, B, C) &= \sum m(0, 2, 4, 6) \\
 &= \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + A.\bar{B}.\bar{C} + A.B.\bar{C}
 \end{aligned}$$

ข) โจทย์กำหนด  $f(A, B, C, D)$  แสดงว่า มีตัวแปร 4 ตัว

$\sum m$  หมายถึง ผลบวกของตัว Minterm

$\therefore \sum m(0, 2, 4, 6)$  หมายถึง การนำ Minterm ตัวที่ 0, 2, 4, 6 มาบวกกัน โดยเขียนอยู่ในรูปของ Canonical sum of product form จะได้

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \sum m(0, 2, 4, 6) \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.9 จงเขียน Canonical product of sum form จาก

ก)  $f(A, B, C) = \pi m(0, 2, 4, 6)$

ข)  $f(A, B, C, D) = \pi m(0, 2, 4, 6)$

วิธีทำ

ก) โจทย์กำหนด  $f(A, B, C)$  แสดงว่า มีตัวแปร 3 ตัว

$\pi m$  หมายถึง ผลบวกของตัว Maxterm

$\therefore \pi m(0, 2, 4, 6)$  หมายถึง การนำ Maxterm ตัวที่ 0, 2, 4, 6 มาคูณกัน โดยเขียนอยู่ในรูปของ Canonical product of sum form จะได้

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \pi m(0, 2, 4, 6) \\ &= (A + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \end{aligned}$$

ข) โจทย์กำหนด  $f(A, B, C, D)$  แสดงว่า มีตัวแปร 4 ตัว

$\pi m$  หมายถึง ผลบวกของตัว Maxterm

$\therefore \pi m(0, 2, 4, 6)$  หมายถึง การนำ Minterm ตัวที่ 0, 2, 4, 6 มาคูณกัน โดยเขียนอยู่ในรูปของ Canonical product of sum form จะได้

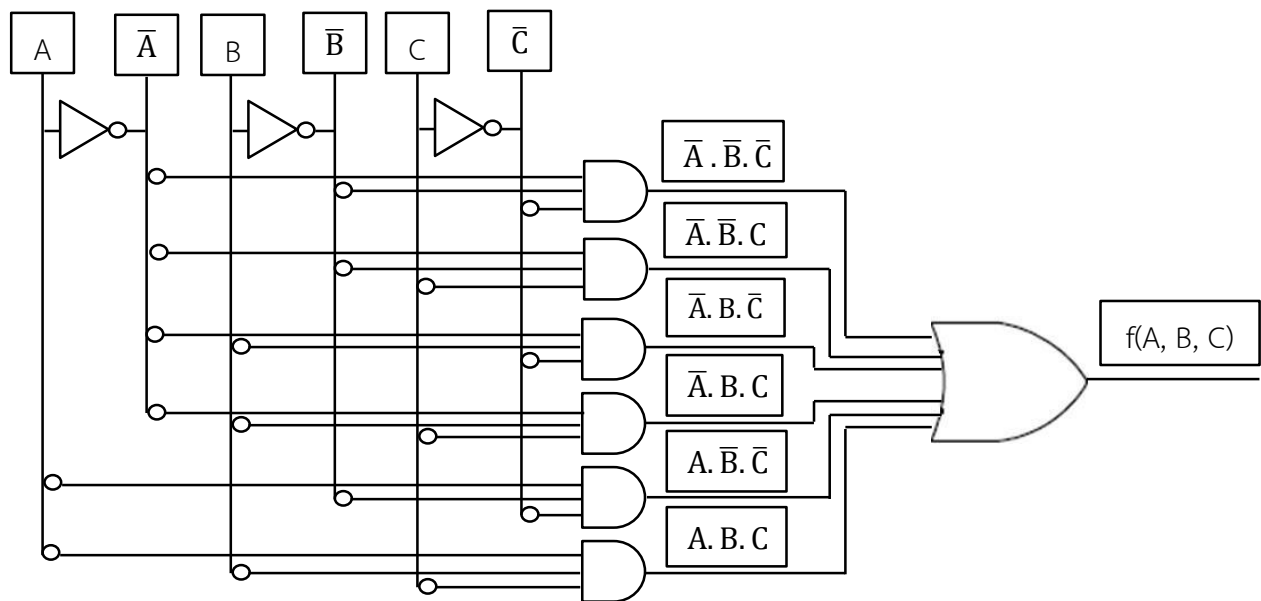
$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \pi m(0, 2, 4, 6) \\ &= (A + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (A + \bar{B} + C + D) \\ &\quad \cdot (A + \bar{B} + \bar{C} + D) \end{aligned}$$

7) การออกแบบวงจรลอจิกจากสวิตช์ฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.10 จงออกแบบวงจรลอจิกจาก  $f(A, B, C) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 7)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 7) \\ &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 3.11 จงออกแบบวงจรลอจิกจาก Truth Table ต่อไปนี้ โดยฟังก์ชันของเอาต์พุต อยู่ในรูป Product of Sum

| เลขฐาน 10 | Input |   |   | Output |
|-----------|-------|---|---|--------|
|           | A     | B | C | Y      |
| 0         | 0     | 0 | 0 | 1      |
| 1         | 0     | 0 | 1 | 1      |
| 2         | 0     | 1 | 0 | 0      |
| 3         | 0     | 1 | 1 | 0      |
| 4         | 1     | 0 | 0 | 1      |
| 5         | 1     | 0 | 1 | 1      |
| 6         | 1     | 1 | 0 | 1      |
| 7         | 1     | 1 | 1 | 0      |

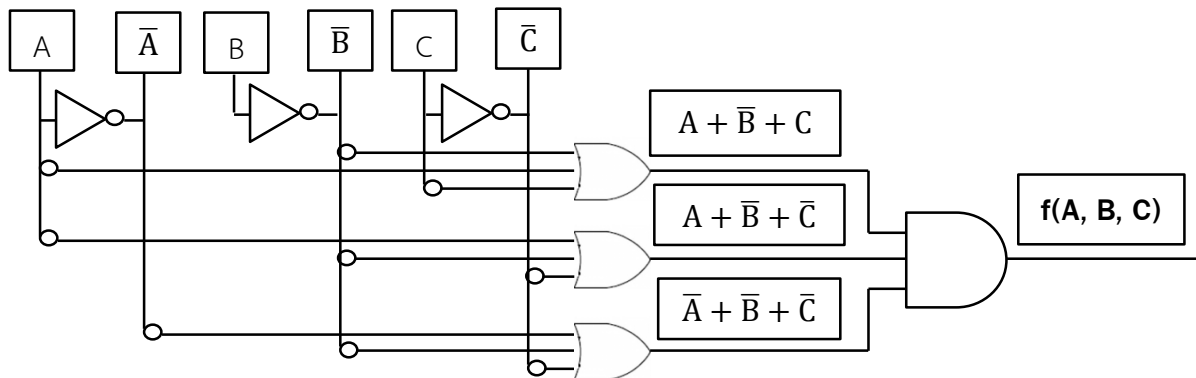
#### วิธีทำ

การเขียนฟังก์ชันของเอาต์พุต ให้อยู่ในรูป Product of sum นั้น จะต้องคิดจากตัว Maxterm

คือ

$$Y = \pi m(2, 3, 7)$$

$$= (A + \bar{B} + C) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$



### 3.4 บทสรุป

ตัวกระทำทางลอจิกพื้นฐานได้แก่ AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR และ XNOR

ตารางค่าความจริง (Truth Table) เป็นตารางแสดงความสัมพันธ์ค่าตรรกะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากสมการลอจิก ประกอบด้วย ค่าสถานะของตัวแปรอินพุตที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $2^n$  กรณี เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรลอจิกด้านอินพุต และสถานะของตัวแปรด้านเอาต์พุตที่เกิดจากการกระทำทางลอจิกระหว่างตัวแปรด้านอินพุตค่าต่าง ๆ

ลอจิกเกต (Logic Gate) คือ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (Switch) นั่นคือ มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก โดยแรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) และแรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) แทนระดับลอจิก 0 และ 1 ตามลำดับ

การประยุกต์ใช้วงจรเกตพื้นฐาน ทำให้สามารถสร้างเป็นเกตใหม่ขึ้นได้หลายชนิดและใช้ในงานที่ซับซ้อนได้ เช่น NAND Gate, NOR Gate, Exclusive OR Gate, Exclusive NOR Gate และ buffer Gate

พีชคณิตแบบบูลีน เป็นเทคนิคแบบหนึ่งที่ใช้ในการลดรูป Switching Function จุดประสงค์ของพีชคณิตแบบบูลีน คือ ช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์และออกแบบวงจรดิจิทัล

การออกแบบวงจรลอจิก จาก Switching function ใด ๆ ก็ตาม เราจำเป็นที่จะต้องทำการลดรูป Switching function นั้น ๆ ให้เหลือตัวแปรน้อยที่สุดเสียก่อน เพื่อวัตถุประสงค์ในความประหยัด และข้อสำคัญอีกประการหนึ่งก็คือลดเวลาหน่วง (Delay Time) ให้น้อยที่สุด ดังนั้น Switching function ที่ยืดเยื้อเราก็ต้องทำให้สั้นลง โดยใช้ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

## คำถามทบทวนประจำบท

~~~~~

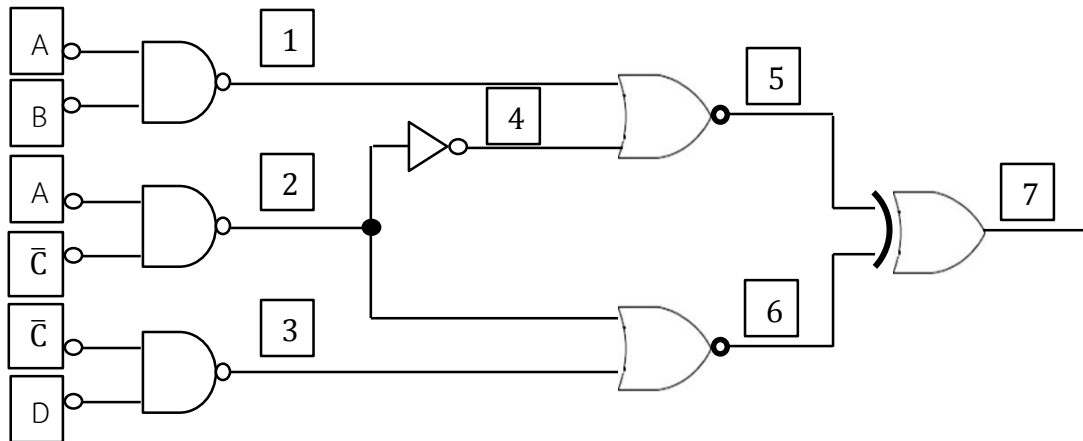
คำสั่ง

ตอนที่ 1 จงเขียน วงจรลอจิก จาก Boolean Expression ต่อไปนี้

1. $Y = \bar{A}.B + A.B.\bar{C} + A.\bar{C}$
2. $Y = \bar{A}.\bar{B}.(A + \bar{C}) + C.(A.\bar{B} + \bar{C})$
3. $Y = (A.\bar{B} + C) \oplus (B.\bar{C} + A.C)$

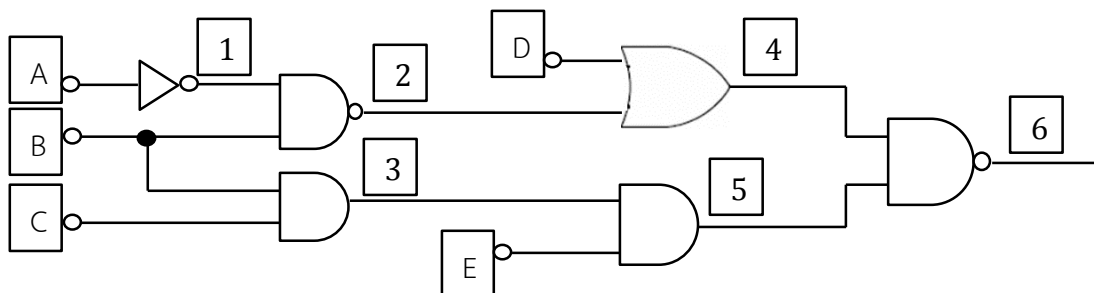
ตอนที่ 2 ตอนที่ 2 จงหา Function Output ของ เกต ทุกตัว จาก วงจรลอจิก ที่กำหนดให้

1.



- 1 = 2 =
 3 = 4 =
 5 = 6 =
 7 =

2.



1 = 2 =
 3 = 4 =
 5 = 6 =

ตอนที่ 3 จงเขียน Canonical Form

- จงเขียน Canonical sum of product form จาก
 - $f(A, B, C) = \sum m(0, 3, 4, 7)$
 - $f(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 5, 9, 11, 13)$
- จงเขียน Canonical product of sum form จาก
 - $f(A, B, C) = \prod m(0, 3, 4, 7)$
 - $f(A, B, C, D) = \prod m(1, 3, 5, 9, 11, 13)$

ตอนที่ 4 จงออกแบบวงจรลอจิกจาก Truth Table ต่อไปนี้ โดย

- ฟังก์ชันของเอาต์พุตอยู่ในรูป Sum of Product
- ฟังก์ชันของเอาต์พุตอยู่ในรูป Product of Sum

เลขฐาน 10	Input			Output
	A	B	C	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1