

วงจรอันดับสอง

Second Order Circuit

Arnon Isaramongkolrak

Department of Electrical Engineering

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อการเรียนรู้การสอน

- การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย
- ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน
- รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน
 - ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน
 - ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต
 - ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต
- ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม
- ผลตอบสนองของวงจร RLC ที่มีอินพุตแบบขั้นบันได

การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย

- ขั้นตอนการหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย
- ขั้นตอนที่ 1 : เขียนวงจรที่เวลา $t < 0$ (เป็นเวลานาน)

หาค่า $v_c(0^-)$ } ลัดวงจร ตัวเหนี่ยวนำ
หาค่า $i_L(0^-)$ } เปิดวงจร ตัวเก็บประจุ

- ขั้นตอนที่ 2 : เขียนวงจรที่เวลา $t > 0$ แบ่งออกเป็น 2 ช่วงคือ

ช่วงที่ 1 วงจรที่ $t = 0^+$ $\Rightarrow i_c(0^+) \Rightarrow \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$
 $\Rightarrow v_L(0^+) \Rightarrow \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L}$

การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย (ต่อ)

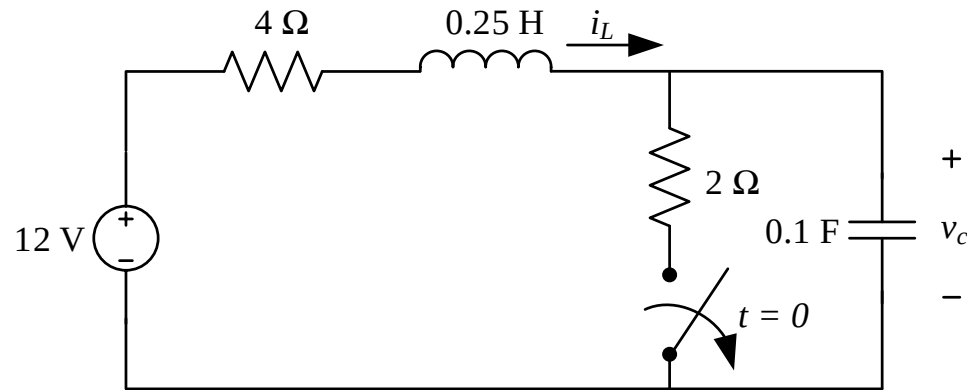
- ขั้นตอนที่ 2 : เขียนวงจรที่เวลา $t > 0$

└─> ช่วงที่ 2 วงจรที่ $t \rightarrow \infty$ หาค่าสุดท้าย

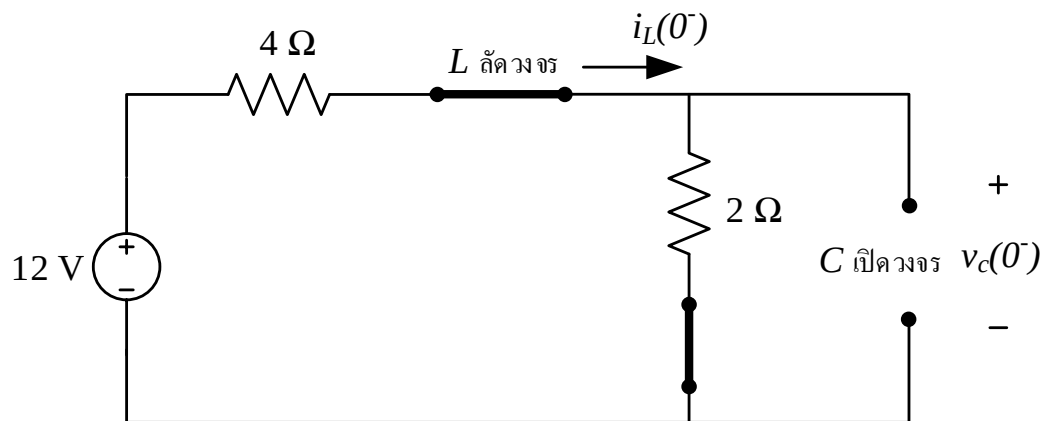
└─> $v_c(\infty)$ } ลัดวงจร ตัวเหนี่ยวนำ
└─> $i_L(\infty)$ } เปิดวงจร ตัวเก็บประจุ

ตัวอย่างที่ 1

จงคำนวณหาค่า $i_L(0^-)$, $v_c(0^-)$, $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$, $\frac{di_L(0^+)}{dt}$, $v_c(\infty)$ และ $i_L(\infty)$



วิธีทำ **ขั้นตอนที่ 1** : วงจรที่เวลา $t < 0$ (เป็นเวลานาน)



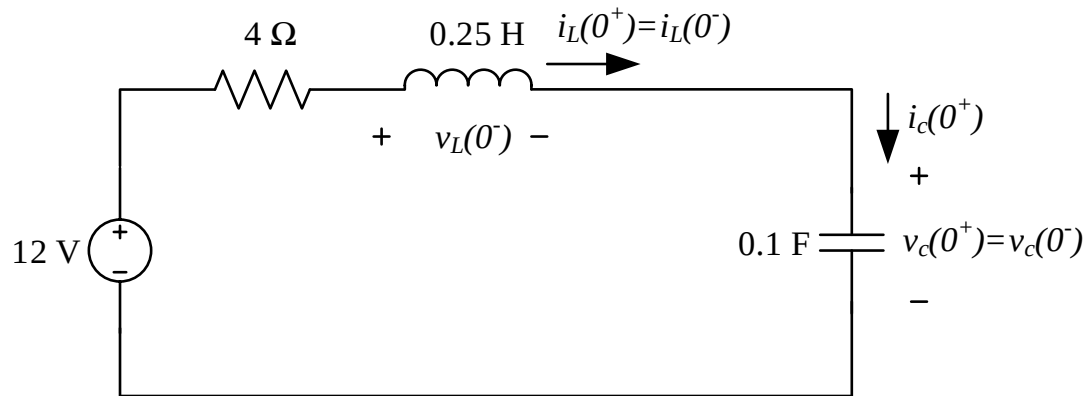
$$i_L(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2A$$

$$v_c(0^-) = 2(2) = 4V$$

ตัวอย่างที่ 1 (ต่อ)

จงคำนวณหาค่า $i_L(0^-)$, $v_c(0^-)$, $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$, $\frac{di_L(0^+)}{dt}$, $v_c(\infty)$ และ $i_L(\infty)$

ขั้นตอนที่ 2 : วงจรที่เวลา $t > 0$ พิจารณาช่วงที่ 1 $\rightarrow t = 0^+$



$$i_c(0^+) = i_L(0^+) = 2 \text{ A}$$

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{2}{0.1} = 20 \text{ V/s}$$

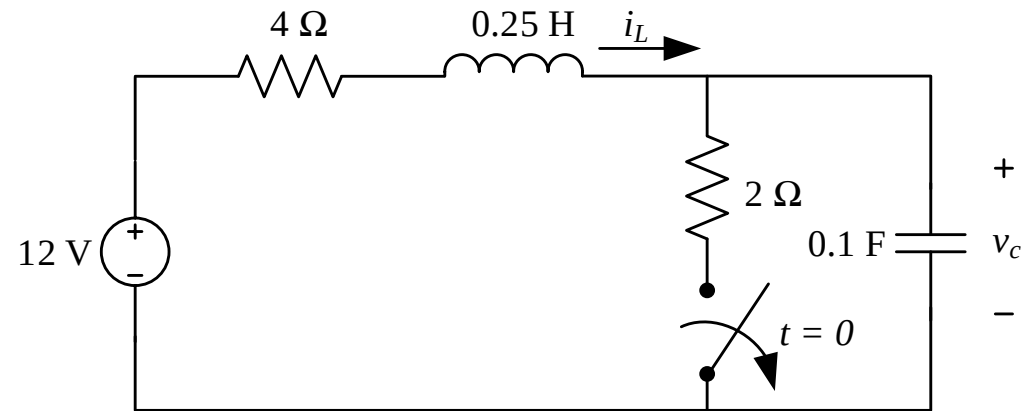
จาก KVL; $v_{4\Omega} + v_L(0^+) + v_c(0^+) - 12 = 0 \rightarrow v_L(0^+) = 12 - 4 - 8 = 0 \text{ V}$

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{0}{0.25} = 0 \text{ A/s}$$

ตัวอย่างที่ 1 (ต่อ)

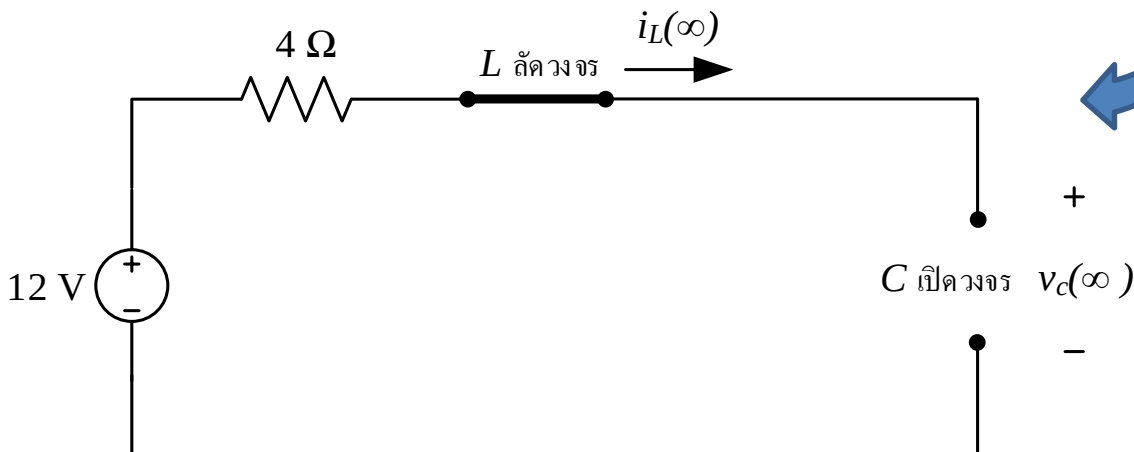
จงคำนวณหาค่า $i_L(0^-)$, $v_c(0^-)$, $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$, $\frac{di_L(0^+)}{dt}$, $v_c(\infty)$ และ $i_L(\infty)$

ขั้นตอนที่ 2 : วงจรที่เวลา $t > 0$ พิจารณาช่วงที่ 2 $\rightarrow t \rightarrow \infty$

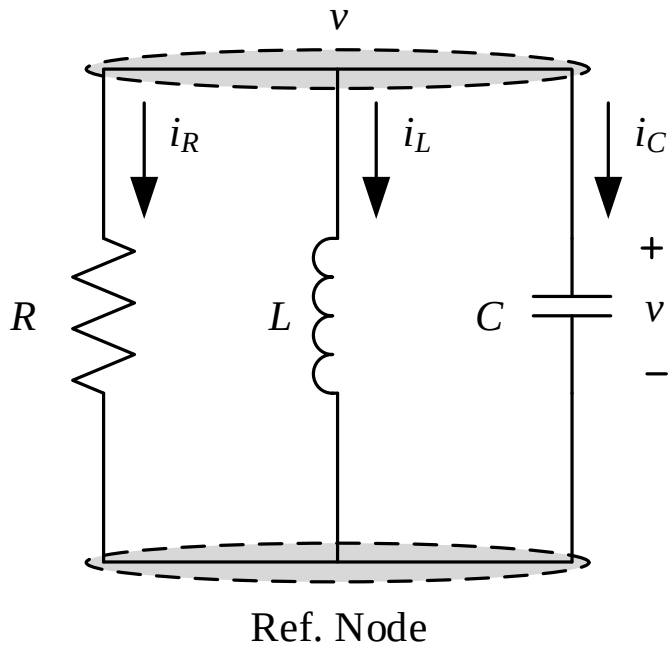


$$i_L(\infty) = 0 A$$

$$v_c(\infty) = 12 V$$



ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน



พิจารณาโนด v อาศัย KCL;

$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0$$

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0$$

สมมุติคำตอบอยู่ในรูป

$$v = Ae^{st} \quad \rightarrow \quad CAs^2 e^{st} + \frac{1}{R} Ase^{st} + \frac{1}{L} Ae^{st} = 0$$

$$Ae^{st} \left(Cs^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

พิจารณาสมการ $Ae^{st} \left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} \right) = 0$

สมการจะเป็นจริงได้เมื่อ $A=0$ หรือ $\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} \right) = 0$

พิจารณาเมื่อ $A=0$;  แรงดันจะมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกๆ ช่วงเวลา

เป็นไปได้ เพราะ ตัวเหนี่ยวนำหรือตัวเก็บประจุมีการสะสมพลังงานอยู่ตลอดเวลา

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

พิจารณาเมื่อ $\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L} \right) = 0 \Rightarrow$ เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation)

คำตอบของสมการคือ

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

$$v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

จากสมการ $C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0$ แทนค่า $v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

จะได้

$$A_1 e^{s_1 t} \left(s_1^2 + \frac{1}{RC} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left(s_2^2 + \frac{1}{RC} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0$$

จะเป็นศูนย์ได้ ขึ้นกับค่าของ s_1 และ s_2 หาได้จาก R-L-C

หาได้จากค่าเริ่มต้น

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} && \text{Resonance} \\ \alpha &= \frac{1}{2RC} && \text{Neper} \end{aligned}$$

ความถี่เชิงซ้อน

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรขนาน RLC คือ $v(t)$ ขึ้นอยู่กับ ω_0 และ α

1). ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน (Overdamped)

เงื่อนไข : $\alpha > \omega_0$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

ผลตอบสนอง : s_1 และ s_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากัน

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

2). ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต (Critically Damped)

เงื่อนไข : $\alpha = \omega_0$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

ผลตอบสนอง : s_1 และ s_2 มีค่าเท่ากัน โดย $s_1 = s_2 = -\alpha$

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \longrightarrow \quad v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

3). ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต (Under Damped)

เงื่อนไข : $\alpha < \omega_0$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

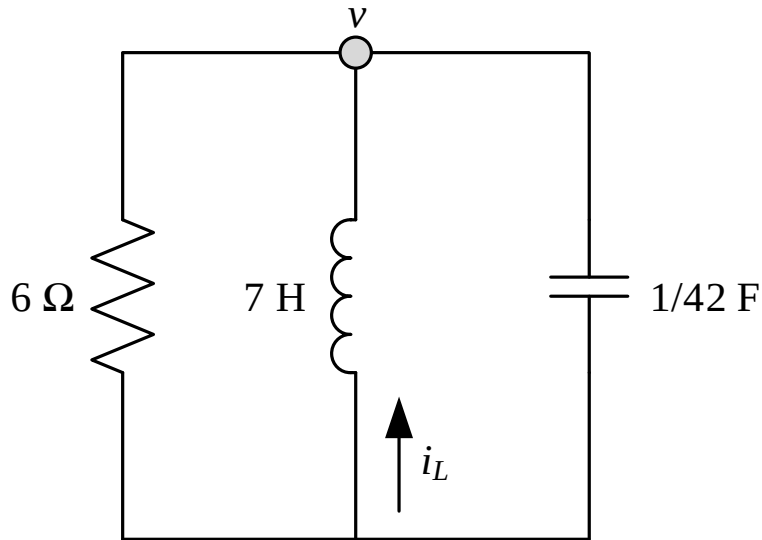
ผลตอบสนอง : s_1 และ s_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหา $v(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v(0) = 0 \text{ V}$ และ $i_L(0) = 10 \text{ A}$



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 : โจทย์กำหนดค่าเริ่มต้นมาให้แล้ว

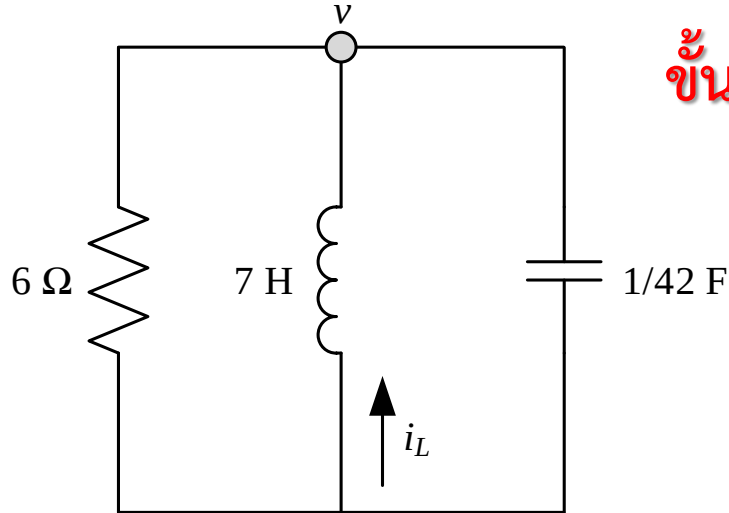
$$v(0) = 0 \text{ V} \quad i_L(0) = 10 \text{ A}$$

จากค่าเริ่มต้น พบว่า $i_c(0) = 10 \text{ A}$

$$\frac{dv(0)}{dt} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{10}{1/42} = 420 \text{ V/s}$$

ตัวอย่างที่ 2 (ต่อ)

จงหา $v(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v(0) = 0 \text{ V}$ และ $i_L(0) = 10 \text{ A}$



ขั้นตอนที่ 2 : คำนวณค่า ω_0 และ α

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(6)(1/42)} = 3.5 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{7(1/42)}} = \sqrt{6} \text{ rad/s}$$

ขั้นตอนที่ 3 : ตรวจสอบชนิดของผลตอบสนอง

จะเห็นว่า $\alpha > \omega_0$ $\Rightarrow$ เป็นแบบหน่วงเกิน $v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

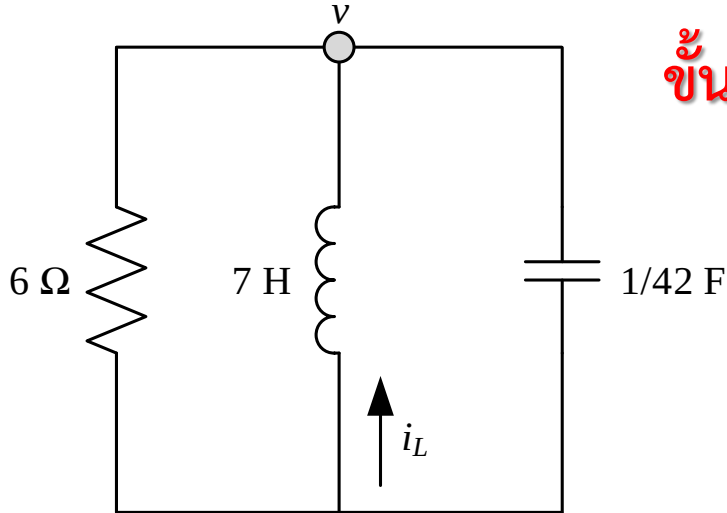
$$s_1 = -3.5 + \sqrt{3.5^2 - 6} = -1 \text{ s}^{-1}$$

$$s_2 = -3.5 - \sqrt{3.5^2 - 6} = -6 \text{ s}^{-1}$$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \text{ V}$$

ตัวอย่างที่ 2 (ต่อ)

จงหา $v(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v(0) = 0 \text{ V}$ และ $i_L(0) = 10 \text{ A}$



ขั้นตอนที่ 2 : คำนวณค่า ω_0 และ α

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(6)(1/42)} = 3.5 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{7(1/42)}} = \sqrt{6} \text{ rad/s}$$

ขั้นตอนที่ 3 : ตรวจสอบชนิดของผลตอบสนอง

จะเห็นว่า $\alpha > \omega_0$ $\Rightarrow$ เป็นแบบหน่วงเกิน $v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

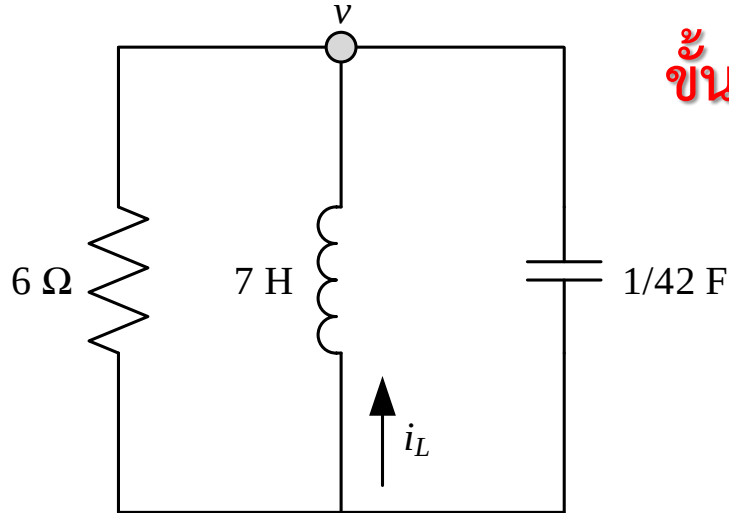
$$s_1 = -3.5 + \sqrt{3.5^2 - 6} = -1 \text{ s}^{-1}$$

$$s_2 = -3.5 - \sqrt{3.5^2 - 6} = -6 \text{ s}^{-1}$$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \text{ V}$$

ตัวอย่างที่ 2 (ต่อ)

จงหา $v(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v(0) = 0 \text{ V}$ และ $i_L(0) = 10 \text{ A}$



ขั้นตอนที่ 4 : หาค่าคงที่ A_1 A_2

จากค่าเริ่มต้น $v(0) = 0 \text{ V}$ และ $\frac{dv(0)}{dt} = 420 \text{ V/s}$

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \text{ V}$$

$$v(0) = A_1 + A_2 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{และ } \frac{dv(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(0)}{dt} = -A_1 - 6A_2 = 420 \quad \text{--- (2)}$$

$$A_1 = 84$$

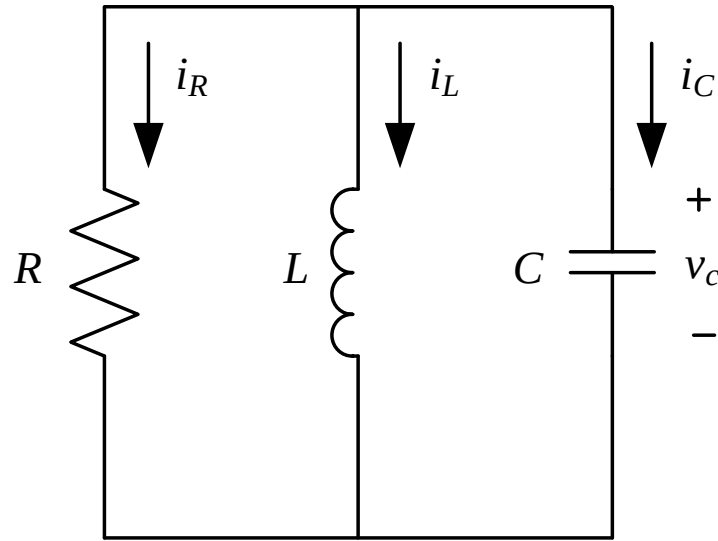
$$A_2 = -84$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = 84 \\ A_2 = -84 \end{array} \right\} v(t) = 84e^{-t} - 84e^{-6t} \text{ V} \quad \text{ที่เวลา } t > 0$$

โจทย์ปัญหา 1

จงหา $v_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v_c(0) = 40V$ และ $i_L(0) = 40A$

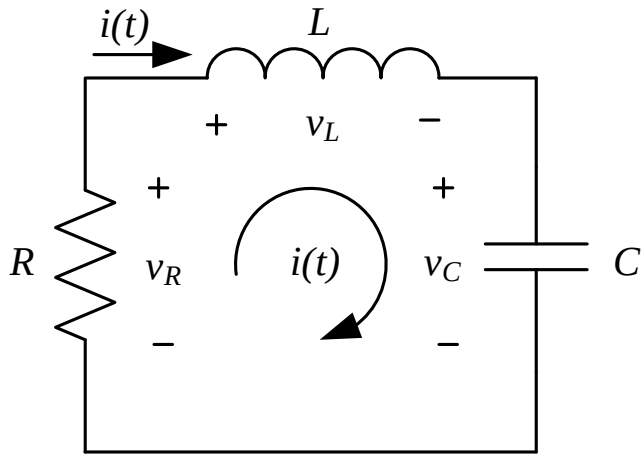
$$L = 12.5mH \quad R = 0.1\Omega \quad C = 0.2F$$



คำตอบ: $v_c(t) = -20e^{-10t} + 60e^{-40t} \text{ V}$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม

อาศัย KVL;



$$v_R + v_L + v_C = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

สมมติคำตอบอยู่ในรูป $i = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม

ถ้ากำหนดให้ความถี่เนเปอร์ของวงจร RLC แบบอนุกรมเป็น $\alpha = \frac{R}{2L}$

ถ้ากำหนดให้ความถี่เรโซแนนซ์ RLC แบบอนุกรมเป็น $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

สามารถหาค่า s_1 และ s_2 ได้ดังนี้ $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรมมีลักษณะการพิจารณาเช่นเดียวกันกับวงจร RLC แบบขนาน ต่างกันแค่การคำนวณความถี่เรโซแนนซ์เท่านั้น

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรอนุกรม RLC คือ $i(t)$ ขึ้นอยู่กับ ω_0 และ α

1). ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน (Overdamped)

เงื่อนไข : $\alpha > \omega_0$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ผลตอบสนอง : $i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม

2). ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต (Critically Damped)

เงื่อนไข : $\alpha = \omega_0$

ผลตอบสนอง : $i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 + A_2 t)$

3). ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต (Under Damped)

เงื่อนไข : $\alpha < \omega_0$

ผลตอบสนอง : $i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติ

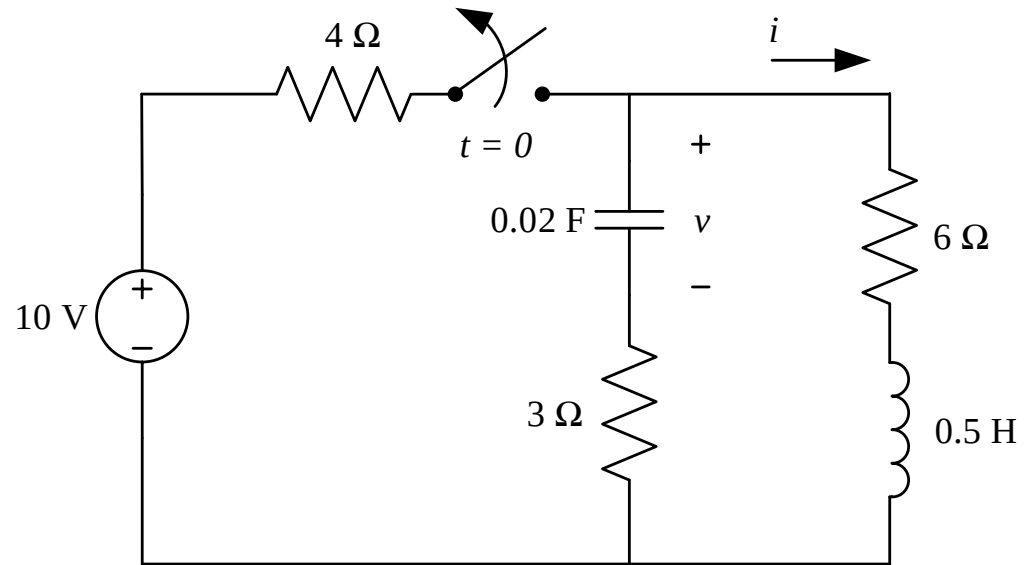
วงจร RLC แบบอนุกรม จะมีการวิเคราะห์คล้ายกับวงจร RLC แบบขนาน
ต่างกันที่การคำนวณหาค่าความถี่เนเปอร์

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \longrightarrow \quad \text{วงจร RLC แบบขนาน}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \longrightarrow \quad \text{วงจร RLC แบบอนุกรม}$$

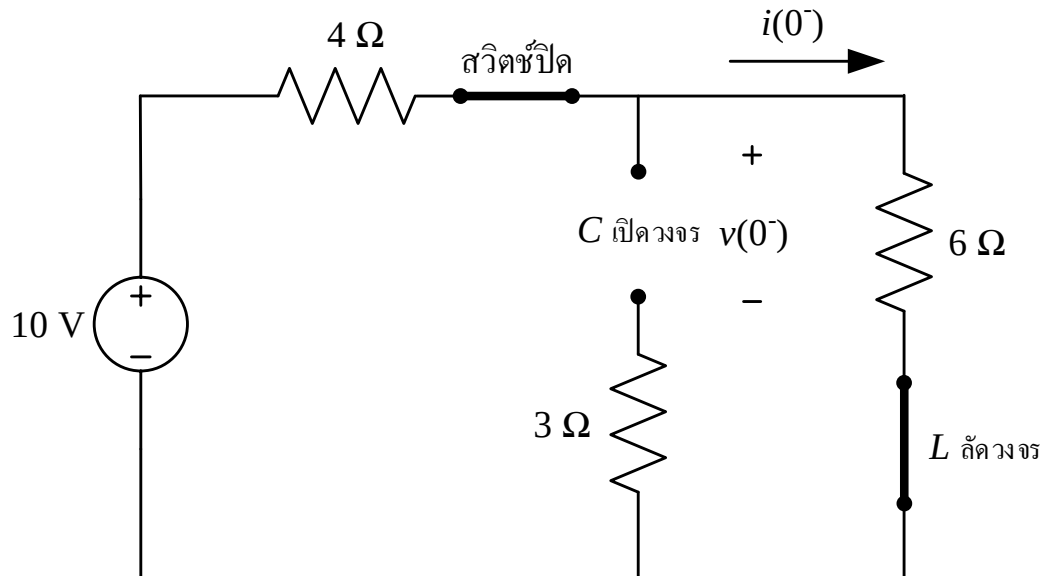
ตัวอย่างที่ 3

จงหา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 : เขียนวงจรที่เวลา $t < 0$

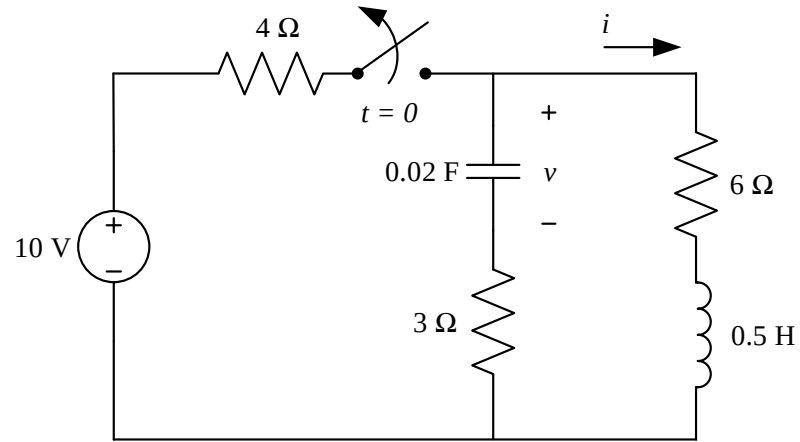


$$i(0^-) = \frac{10}{4+6} = 1 \text{ A}$$

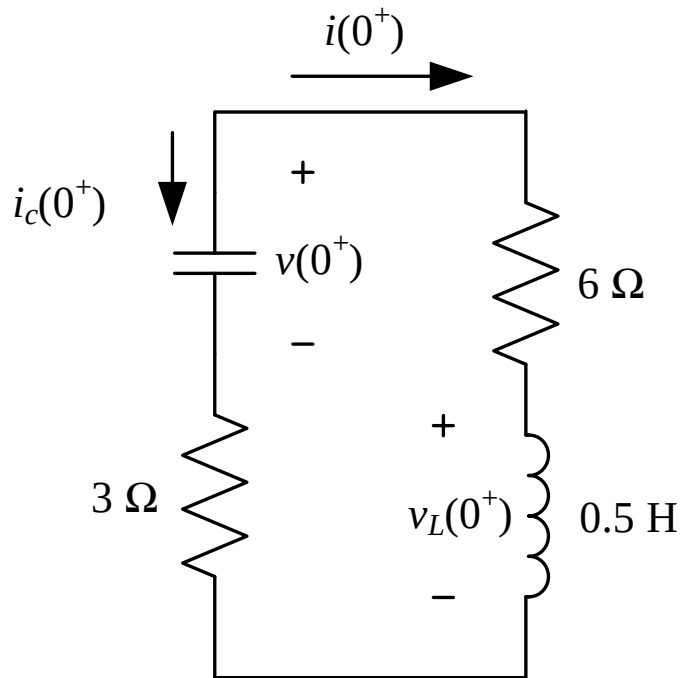
$$v(0^-) = (1)(6) = 6 \text{ V}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$



ขั้นตอนที่ 1 : เขียนวงจรที่เวลา $t > 0 \Rightarrow t = 0^+$ (วงจรอนุกรม RLC)



$$C = 0.02 \text{ F} \quad L = 0.5 \text{ H} \quad R = 3 + 6 = 9 \text{ } \Omega$$

$$v(0^+) = 6 \text{ V} \quad i(0^-) = i(0^+) = 1 \text{ A}$$

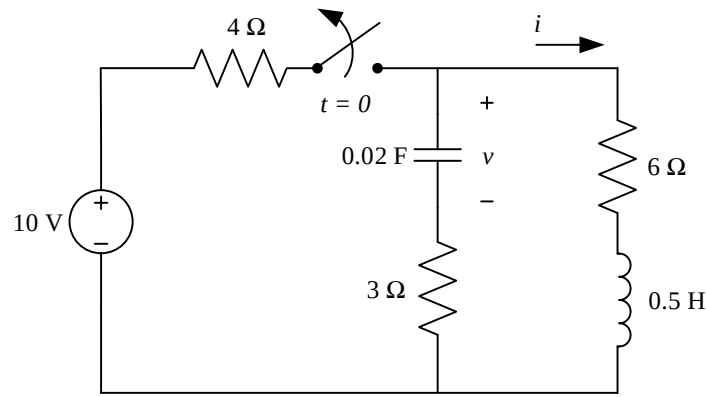
$$-v(0^+) + 6i(0^+) + v_L(0^+) + 3i(0^+) = 0$$

$$v_L(0^+) = 6 - 9 = -3 \text{ V}$$

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{-3}{0.5} = -6 \text{ A/s}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$



ขั้นตอนที่ 2 : คำนวณหา α และ ω_0

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2(0.5)} = 9 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.5)(0.02)}} = 10 \text{ rad/s}$$

ขั้นตอนที่ 3 : ตรวจสอบประเภทของผลตอบสนอง

$\alpha > \omega_0$  ผลตอบสนองประเภทหน่วงต่ำกว่าวิกฤต

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$\alpha = 9 \text{ s}^{-1}$
 $\omega_d = \sqrt{10^2 - 9^2} = 4.359 \text{ rad/s}$

$$i(t) = e^{-9t} (B_1 \cos 4.359t + B_2 \sin 4.359t) \text{ A} \quad \text{ที่เวลา } t > 0$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$

ขั้นตอนที่ 4 : หาค่าคงที่ B_1 และ B_2 เมื่อ $i(0^+) = 1 \text{ A}$ และ $\frac{di(0^+)}{dt} = -6 \text{ A/s}$

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

$$i(0) = B_1 + B_2(0) = 1 \quad \longrightarrow \quad B_1 = 1$$

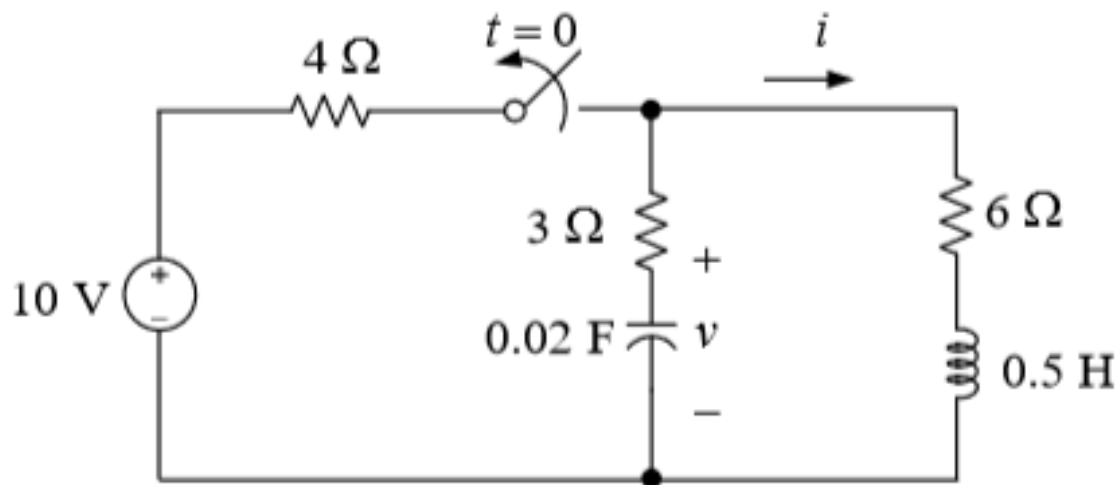
$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= B_1 e^{-9t} (-\sin 4.359t)(4.359) + B_1 (\cos 4.359t)(-9e^{-9t}) \\ &\quad + B_2 e^{-9t} (\cos 4.359t)(4.359) + B_2 (\sin 4.359t)(-9e^{-9t}) \end{aligned}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = -9B_1 + 4.359B_2 = -6 \quad \longrightarrow \quad B_2 = 0.6882$$

$$i(t) = e^{-9t} (\cos 4.359t + 0.6882 \sin 4.359t) \text{ A}, \quad t > 0$$

โจทย์ปัญหา 2

กำหนดให้วงจรในสถานะอยู่ตัวที่เวลา $t = 0^-$ s จงวิเคราะห์หา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$



คำตอบ: $i(t) = e^{-9t} \{ \cos(4.359t) + 0.6882 \sin(4.359t) \}$ A