

วงจรอันดับหนึ่ง

First Order Circuit

Arnon Isaramongkolrak

Department of Electrical Engineering

Nakhon Pathom Rajabhat University

หัวข้อการเรียนรู้การสอน

- ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL
- ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC
- วงจร RL และ RC ในรูปทั่วไป
- ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

วงจรอันดับหนึ่ง

- ความสัมพันธ์ของกระแสและแรงดันเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของตัวเหนี่ยวนำ และ ตัวเก็บประจุเป็นดังนี้

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt + i(0)$$



$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + v(0)$$



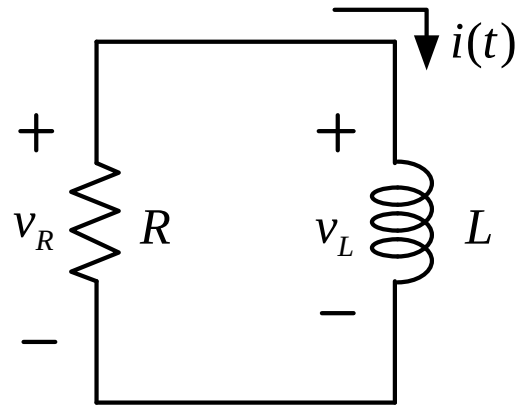
$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

- ทั้ง $v_L(t)$ และ $i_C(t)$ อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

วงจรอันดับหนึ่ง (ต่อ)

- วงจรอันดับหนึ่งคือ วงจรที่สามารถเขียนหรืออธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
- ความสัมพันธ์ของวงจรอันดับหนึ่งคือ กระแสและแรงดันที่สภาวะชั่วครู่ (transient) อาจจะก่อให้เกิดความเสียหายต่อชีวิตและทรัพย์สิน
- การออกแบบวงจรเพื่อให้ลดค่าของกระแสหรือแรงดันในสภาวะชั่วครู่ จึงเป็นสิ่งสำคัญที่วิศวกรไฟฟ้าต้องพึงพิจารณา

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL

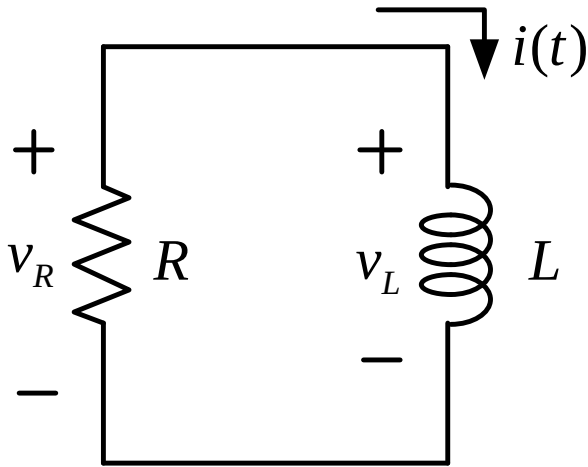


ให้ค่าเริ่มต้นของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ที่เวลา $t = t_0$

$$i(t_0) = I_0$$

เมื่อ I_0 คือ ค่ากระแสเริ่มต้นที่ไหลผ่านตัวต้านทานที่เวลา $t = 0$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL (ต่อ)



อาศัยกฎแรงดันเคอร์ชอฟฟ์ (KVL) จะได้ว่า

$$v_L + v_R = 0$$

เมื่อ $v_L = L \frac{di}{dt}$ และกฎของโอห์ม $v_R = Ri$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL (ต่อ)

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad \longrightarrow \quad \int_{i(0)}^{i(t)} \frac{1}{i} di = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln i \Big|_{i(0)=I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L} t \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L} t$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

เมื่อ $\frac{L}{R} = \tau$ เรียกว่า ค่าคงที่ทางเวลา

ตรวจสอบความถูกต้องของสมการ

1.) แทนค่ากลับไปในสมการ $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ จะได้

$$L \left(-\frac{R}{L} \right) \left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \right) + R I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 0$$

2.) แทนค่า $t = 0$ จะได้

$$i(t = 0) = I_0 e^{-0} = I_0$$

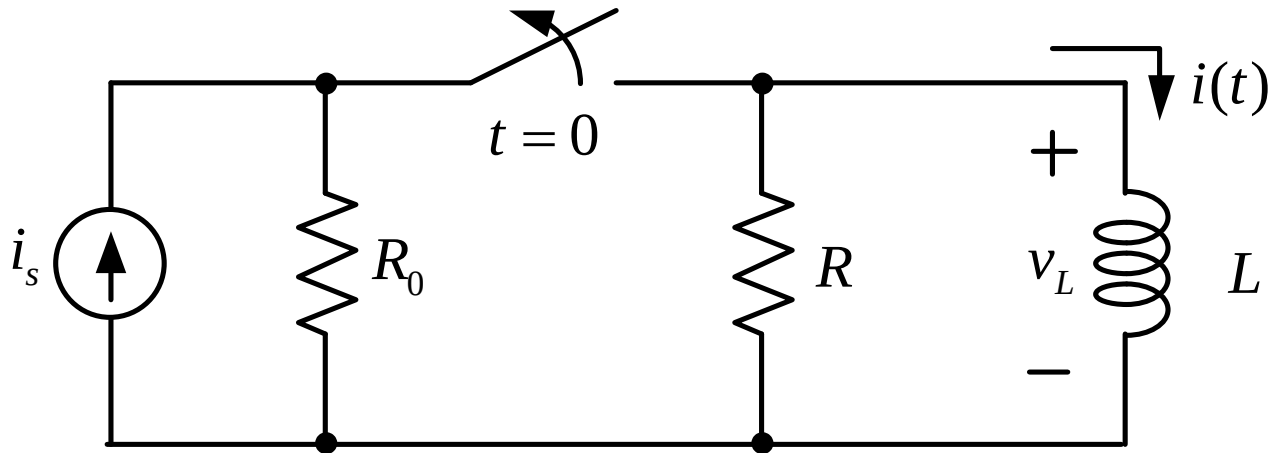
ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL (ต่อ)

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ค่ากระแส $i(t)$ คือผลตอบสนองตามธรรมชาติของวงจร RL เมื่อมีค่าเริ่มต้นเท่ากับ I_0 จะมีค่าลดลงในลักษณะที่เป็นฟังก์ชันเอ็กโพเนนเชียลเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น

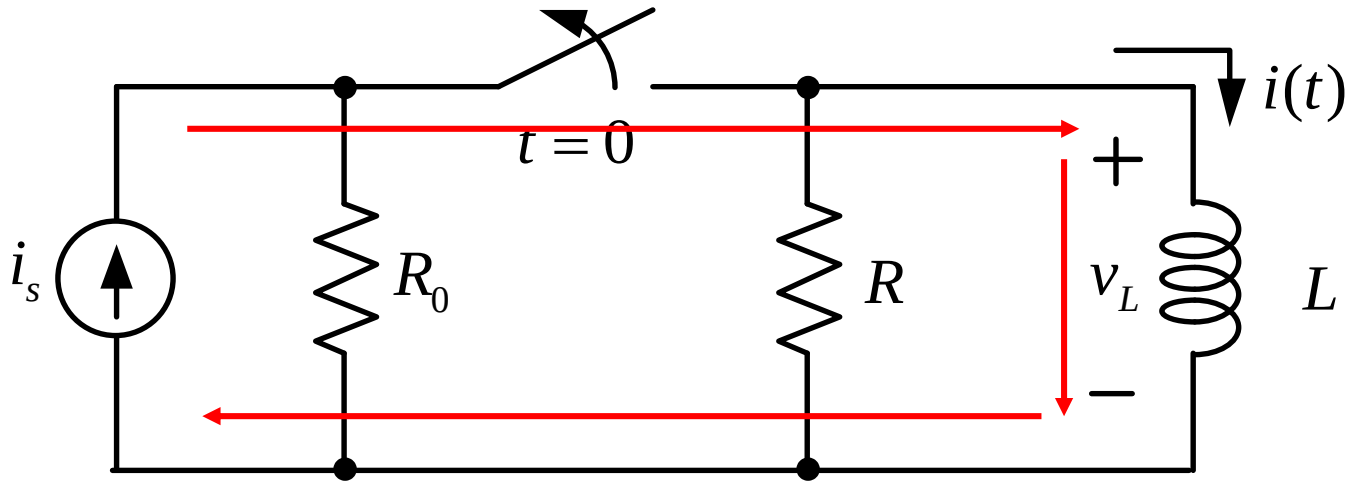
แล้วเราจะหาค่า I_0 ได้อย่างไร??????

การพิจารณาวงจร RL เพื่อหาค่าเริ่มต้น



- กำหนดให้แหล่งจ่ายกระแสอิสระจ่ายกระแสคงที่เท่ากับ i_s A โดยที่สวิตช์ อยู่ในตำแหน่งปิดเป็นระยะเวลานาน ($t < 0$)
- เมื่อกระแสในวงจรมีค่าคงที่ ส่งผลให้แรงดันและกระแสทุกจุดในวงจรมีค่าคงที่ด้วย

การพิจารณาวงจร RL เพื่อหาค่าเริ่มต้น (ต่อ)

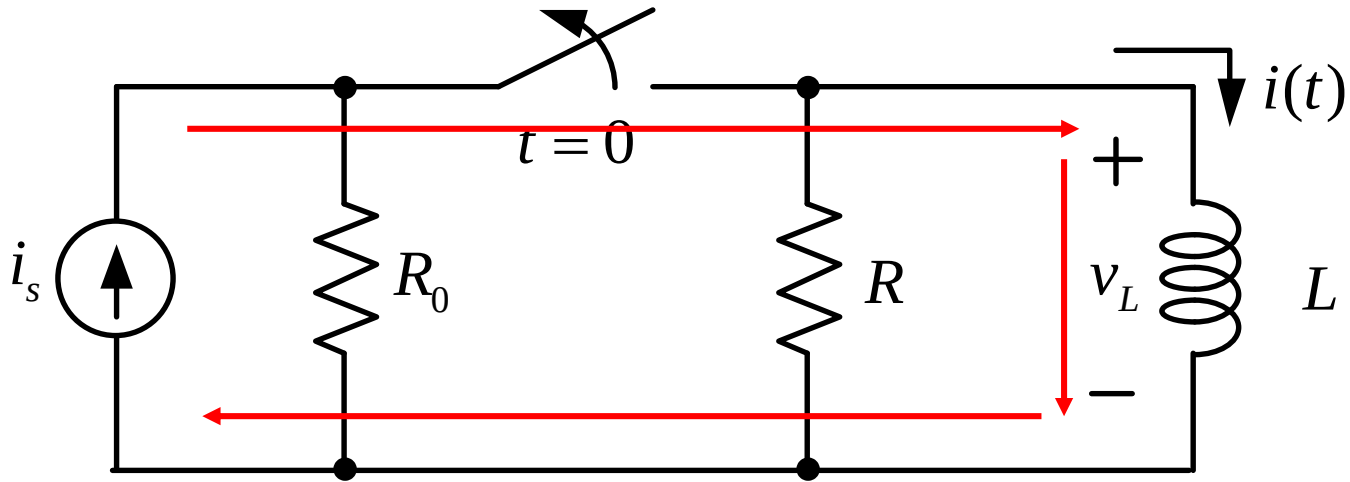


จาก $v_L = L \frac{di}{dt}$ เมื่อกระแสไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำมีค่าคงที่ (เป็นเวลานานมาก)

ทำให้ $v_L = 0 \text{ V}$ นั่นคือ ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจรนั่นเอง

จะได้ $i(t < 0) = i_s$

การพิจารณาวงจร RL เพื่อหาค่าเริ่มต้น (ต่อ)



กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันทีทันใด ดังนั้น
ค่ากระแสช่วงเวลาที่ทันทีทันใดก่อนที่สวิตช์จะถูกเปิดเพียงเล็กน้อย ($t = 0^-$) และ
ค่ากระแสช่วงเวลาที่ทันทีทันใดหลังที่สวิตช์เปิดเพียงเล็กน้อย ($t = 0^+$)

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I_0$$

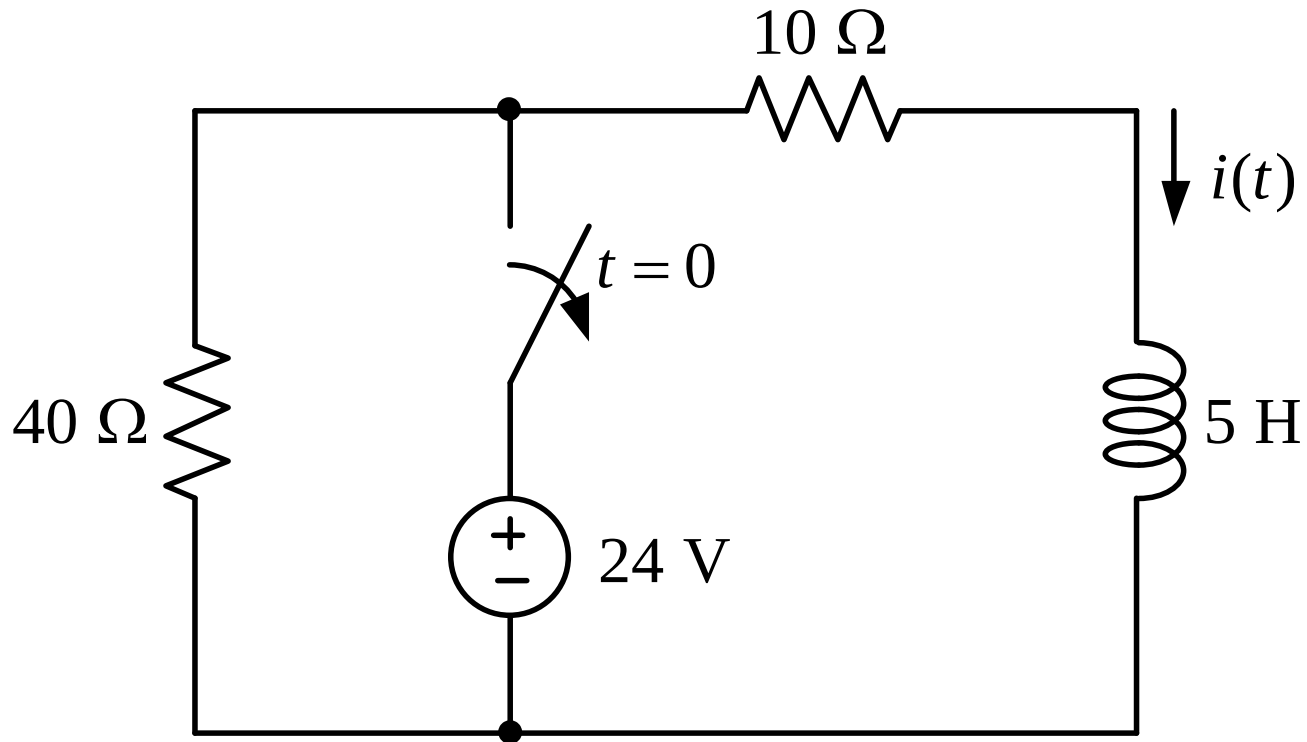
สรุปขั้นตอนการหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าเริ่มต้นของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ($i(0)$)

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า R และ L

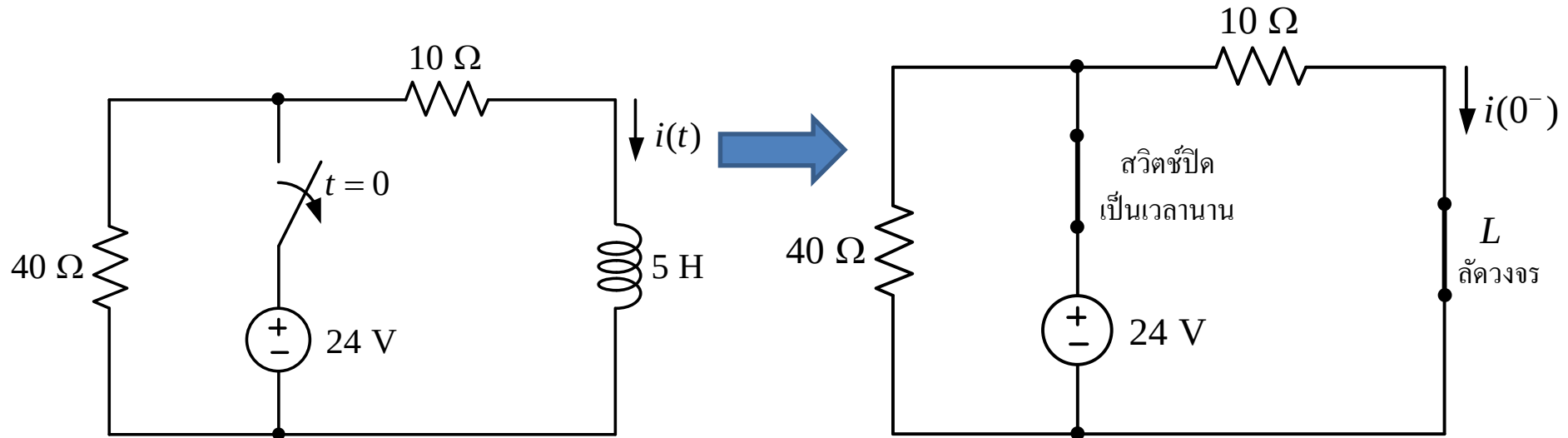
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H ที่เวลา $t=200\text{ms}$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H ที่เวลา $t=200\text{ms}$

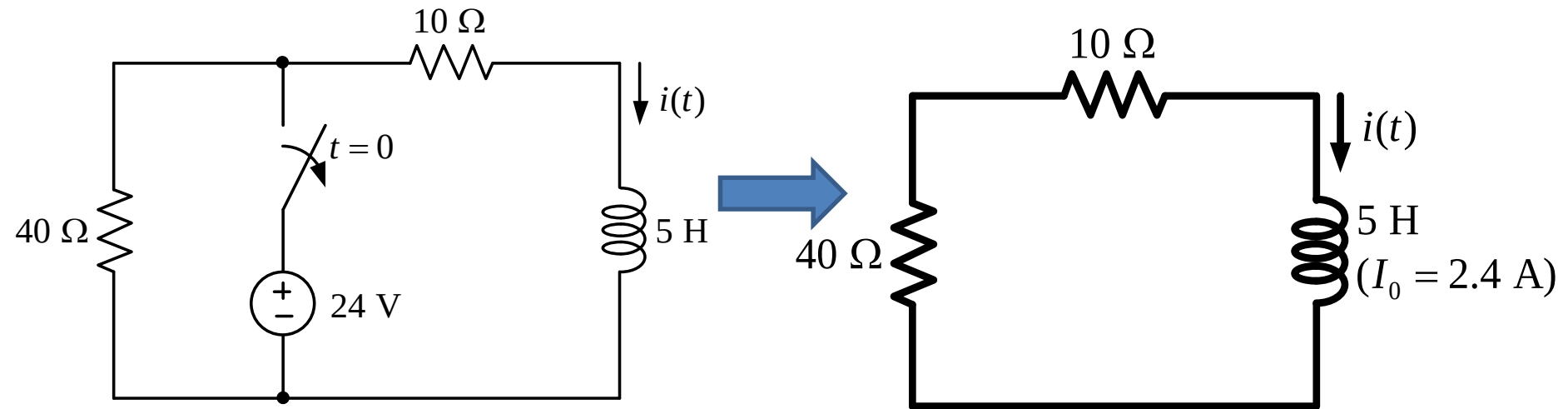
วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 หาค่ากระแสเริ่มต้น I_0 โดยพิจารณาจากวงจรเมื่อเวลา $t < 0$



$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I_0 = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ A}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H ที่เวลา $t=200\text{ms}$

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาวงจรที่เวลา $t > 0$



หาค่า R/L จะได้ว่า

$$R/L = 50/5 = 10 \text{ s}^{-1}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H ที่เวลา $t=200\text{ms}$

วิธีทำ จะได้ผลตอบสนองตามธรรมชาติของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5H
เป็นดังนี้

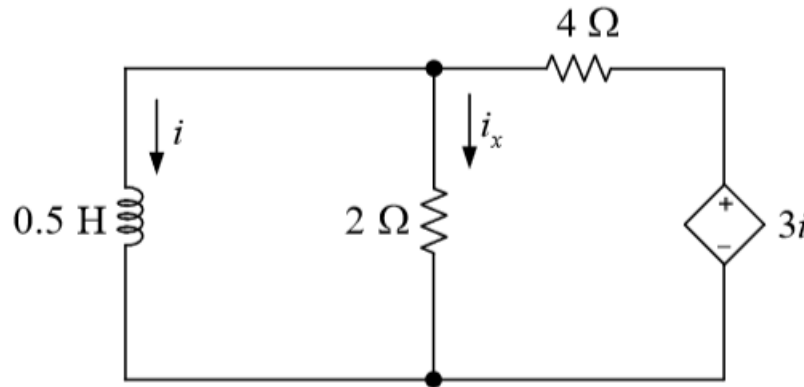
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 2.4e^{-10t} \text{ A}$$

ดังนั้นที่เวลา $t=200\text{ms}$ จะได้

$$i(t = 200 \text{ ms.}) = 2.4e^{-10(200 \times 10^{-3})} = 0.3248 \text{ A} \quad \text{ตอบ}$$

สังเกตว่า ที่เวลา $t > 0$ เรียกว่า ผลตอบสนองทางธรรมชาติ เนื่องจากช่วงเวลา
ดังกล่าวเป็นช่วงเวลาที่ตัวเหนี่ยวนำปล่อยพลังงานสะสมไปยังตัวต้านทานในวงจร

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0) = 10\text{A}$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$



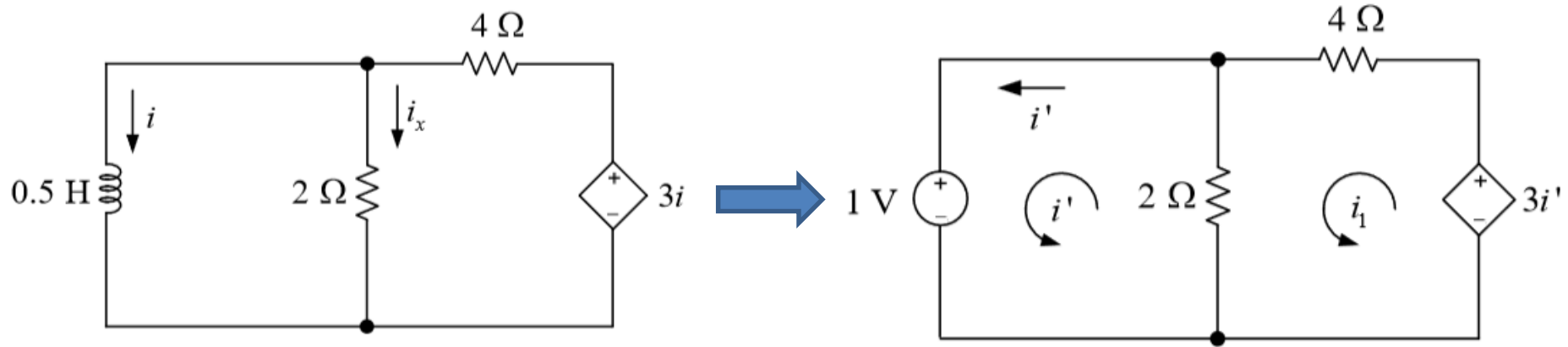
วิธีทำ เนื่องจากวงจรมีแหล่งจ่ายแรงดันไม่อิสระอยู่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์หาความต้านทานสมมูลได้

การแก้ปัญหาก็ทำได้โดย ตัดตัวเหนี่ยวนำออกจากวงจร แล้วแทนที่ด้วยแหล่งจ่ายแรงดันขนาด 1V แล้วคำนวณหาค่าความต้านทานสมมูลได้จาก

$$R_{eq} = \frac{v}{i'} = \frac{1}{i'}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0)=10\text{A}$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ



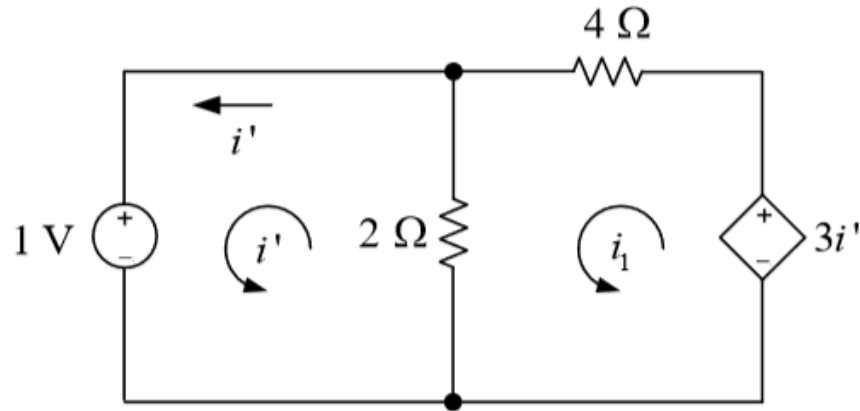
พิจารณา Mesh i'

$$1 + (i' - i_1)2 = 0$$

$$2i' - 2i_1 = -1 \quad \text{————— (1)}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0)=10\text{A}$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ



พิจารณา Mesh i_1

$$(i_1 - i')2 + 4i_1 - 3i' = 0$$

$$-5i' + 6i_1 = 0 \quad \text{————— (2)}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0)=10A$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ นำสมการที่ (1) และ (2) มาสร้างเป็นเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i' \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แก้สมการเมตริกซ์จะได้ $i' = -3A$

ดังนั้นค่าความต้านทานสมมูลจะได้ $R_{eq} = \frac{1}{3}$

ดังนั้นค่าคงตัวทางเวลามีค่าเป็น $\frac{L}{R} = \tau = \frac{0.5}{\frac{1}{3}} = 1.5 \text{ s}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0)=10A$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ จะได้กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำเท่ากับ

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

จะได้ $i(t) = 10e^{-\frac{t}{1.5}} \text{ A}$ **ตอบ**

แรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำเท่ากับ $v_L(t) = R \times i(t) = R \times I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

จะได้ $v_L(t) = \frac{1}{3} \times (10) e^{-\frac{t}{1.5}}$

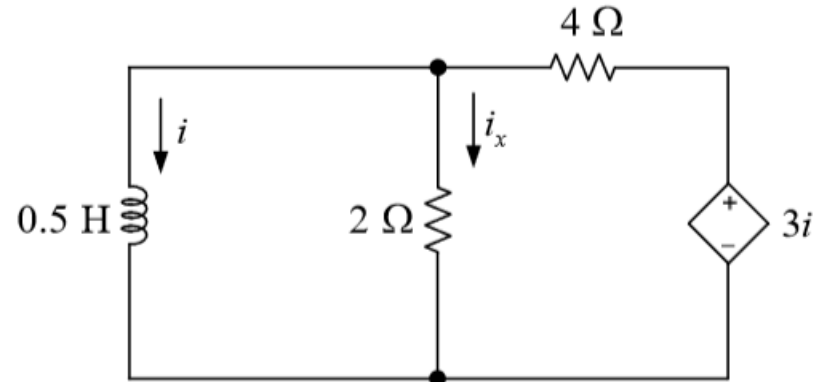
$$v_L(t) = \frac{10}{3} e^{-\frac{t}{1.5}} \text{ V}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $i(0)=10\text{A}$ จงวิเคราะห์หา i และ i_x สำหรับเวลา $t > 0$

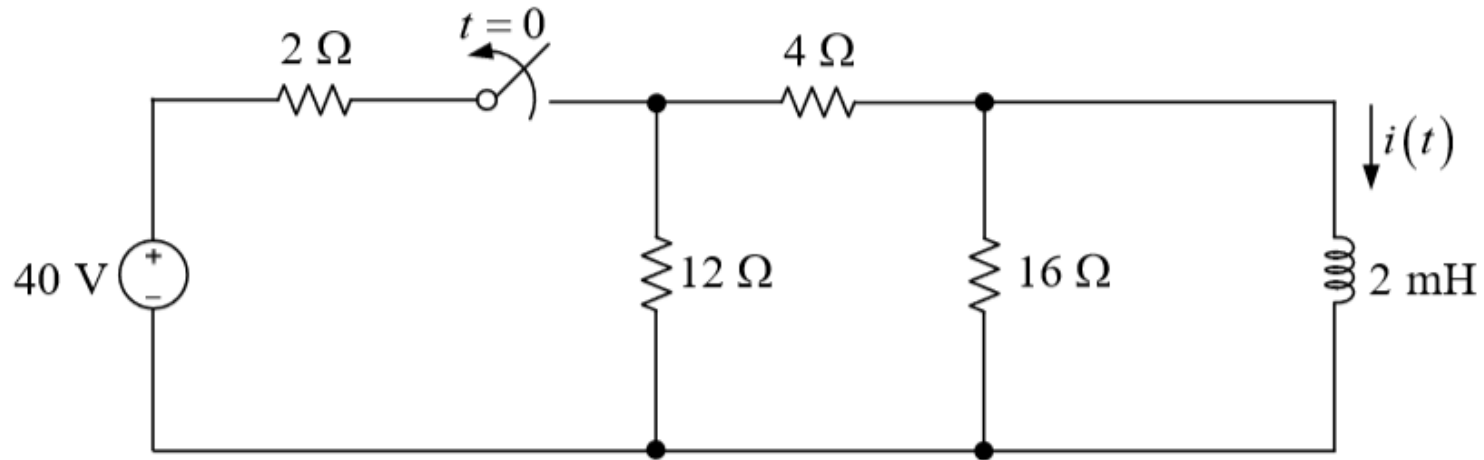
วิธีทำ จากกฎของโอห์ม และข้อของแรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทาน สามารถหาค่ากระแส i_x ได้ดังนี้

$$i_x(t) = \frac{-v_L(t)}{R}$$

จะได้
$$i_x(t) = \frac{-\frac{10}{3}e^{\frac{-t}{1.5}}}{2} = -1.67e^{\frac{-t}{1.5}} \quad \text{A} \quad \text{ตอบ}$$



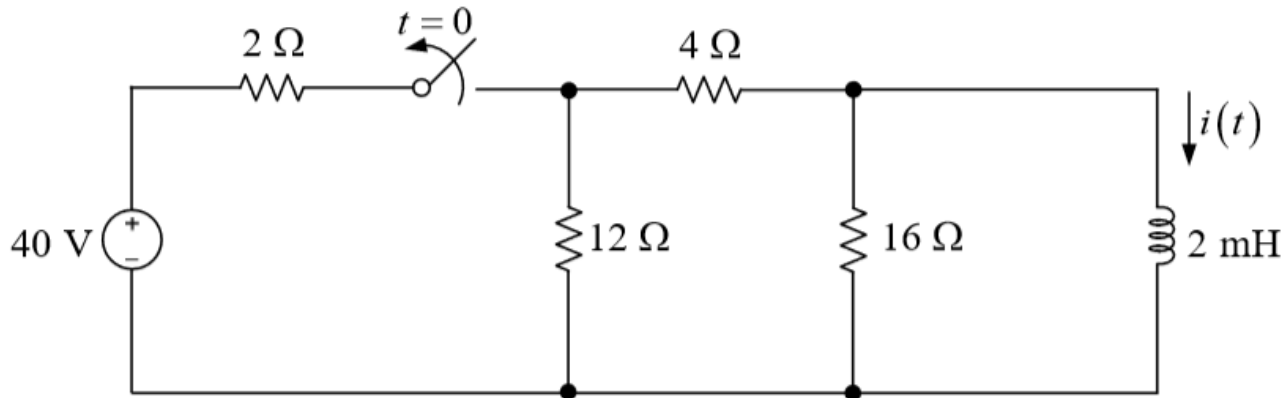
ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$



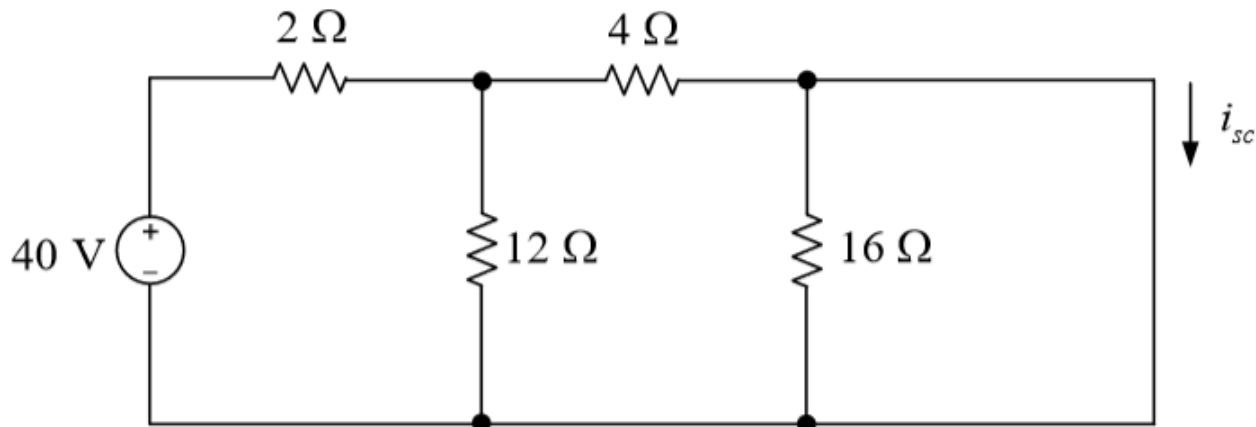
วิธีทำ การวิเคราะห์จะเริ่มต้นด้วยการคำนวณหาค่ากระแสเริ่มต้นของตัวเหนี่ยวนำ ในช่วงเวลา $t < 0$ ซึ่งตัวเหนี่ยวนำจะได้รับพลังงานจากแหล่งจ่ายกระแสตรง 40V และเปลี่ยนสถานะเป็นลัดวงจร

ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ

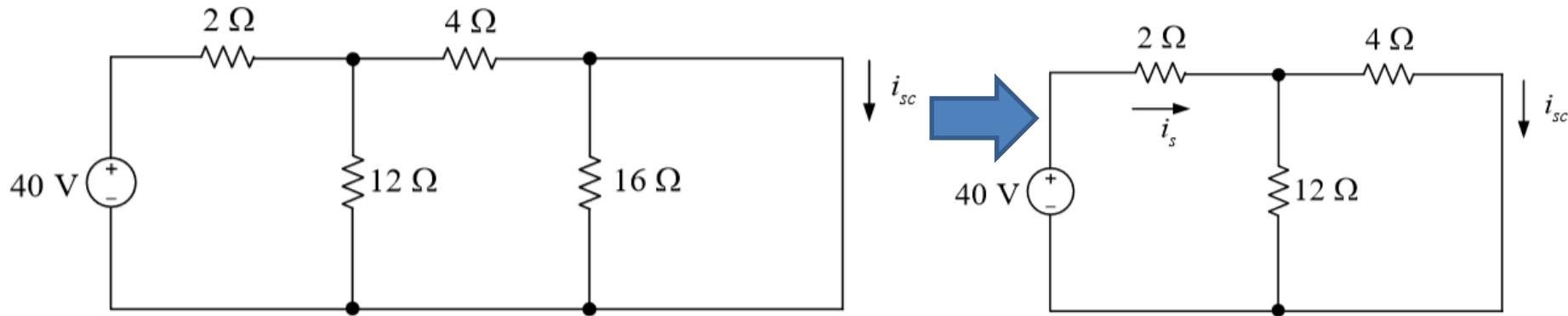


$t < 0$



ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ $t < 0$

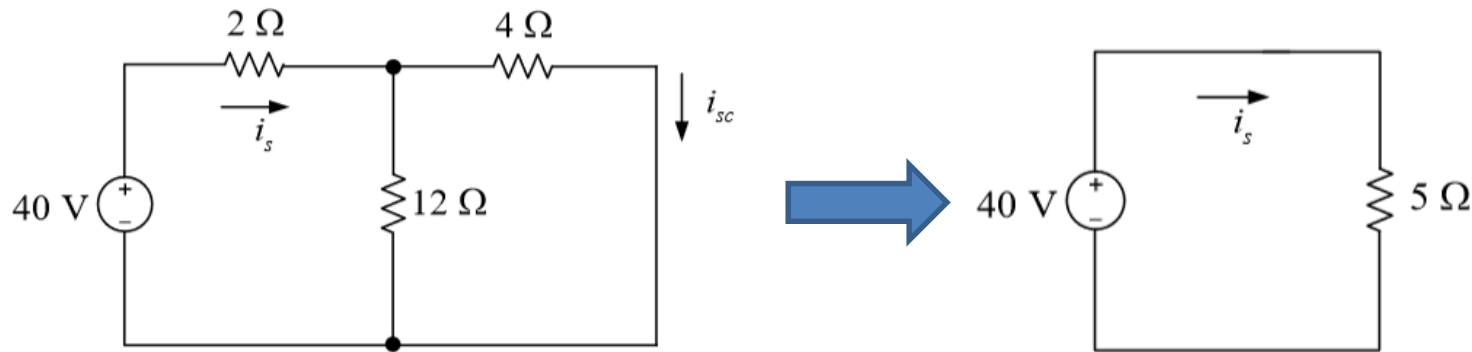


$$R_{eq1} = 2\Omega + (4\Omega // 12\Omega)$$

$$R_{eq1} = 2 + \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 5\Omega$$

ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ $t < 0$



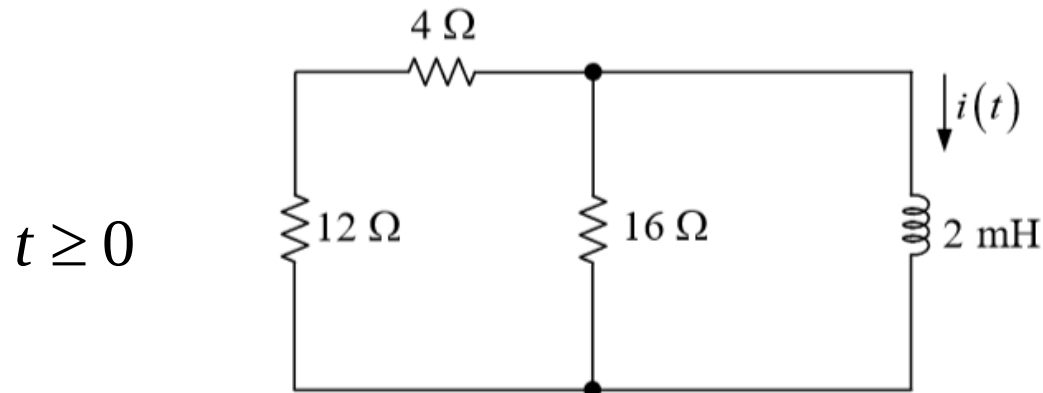
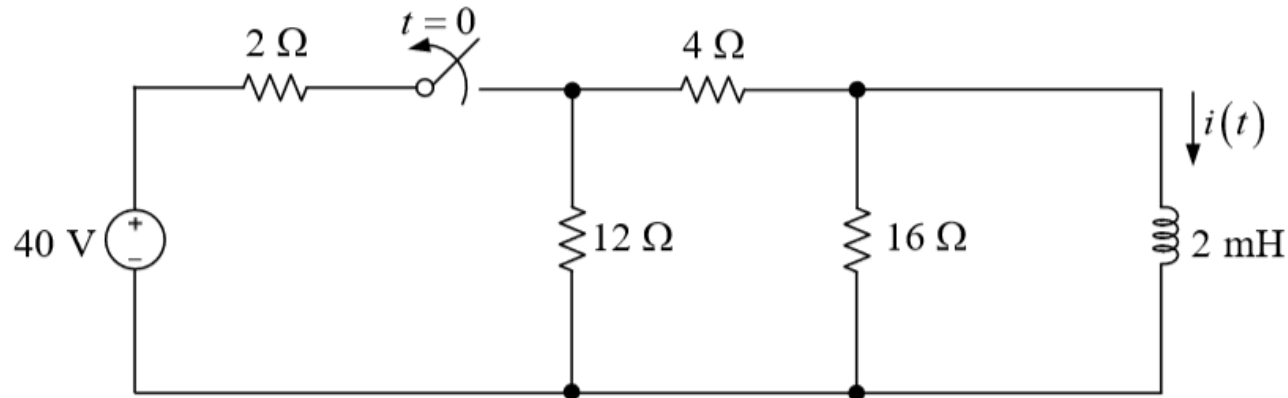
คำนวณหาค่ากระแส $i_s(t)$ จะได้ $i_s(t < 0) = \frac{V}{R_{eq1}} = \frac{40}{5} = 8A$

อาศัยกฎการแบ่งกระแสคำนวณหากระแส $i_{sc}(t < 0)$ จะได้ว่า

$$i_{sc}(t < 0) = \frac{12 \times 8A}{12 + 4} = 6A = I_0$$

ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน
แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์
วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$

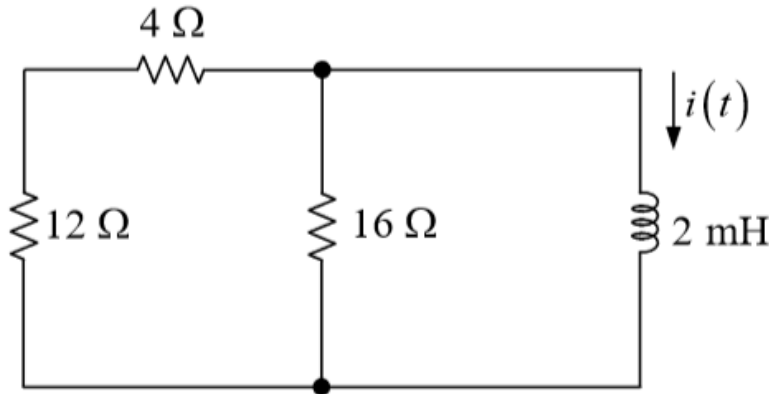
วิธีทำ $t \geq 0$ สวิตช์เปลี่ยนสถานะจาก “ปิด” เป็น “เปิด” จะได้



ตัวอย่างที่ 3 จากวงจรสวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ด้วยระยะเวลาที่ผ่านมานาน แต่เมื่อเวลา $t=0$ s สวิตช์เปลี่ยนอยู่ในสถานะ “เปิด” จงวิเคราะห์วงจรเพื่อหาค่า $i(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$

วิธีทำ

$t \geq 0$ คำนวณหาความต้านทานสมมูลจะได้ว่า



$$R_{eq2} = (4\Omega + 12\Omega) // (16\Omega)$$

$$R_{eq2} = (16\Omega) // (16\Omega) = \frac{16 \times 16}{16 + 16} = 8\Omega$$

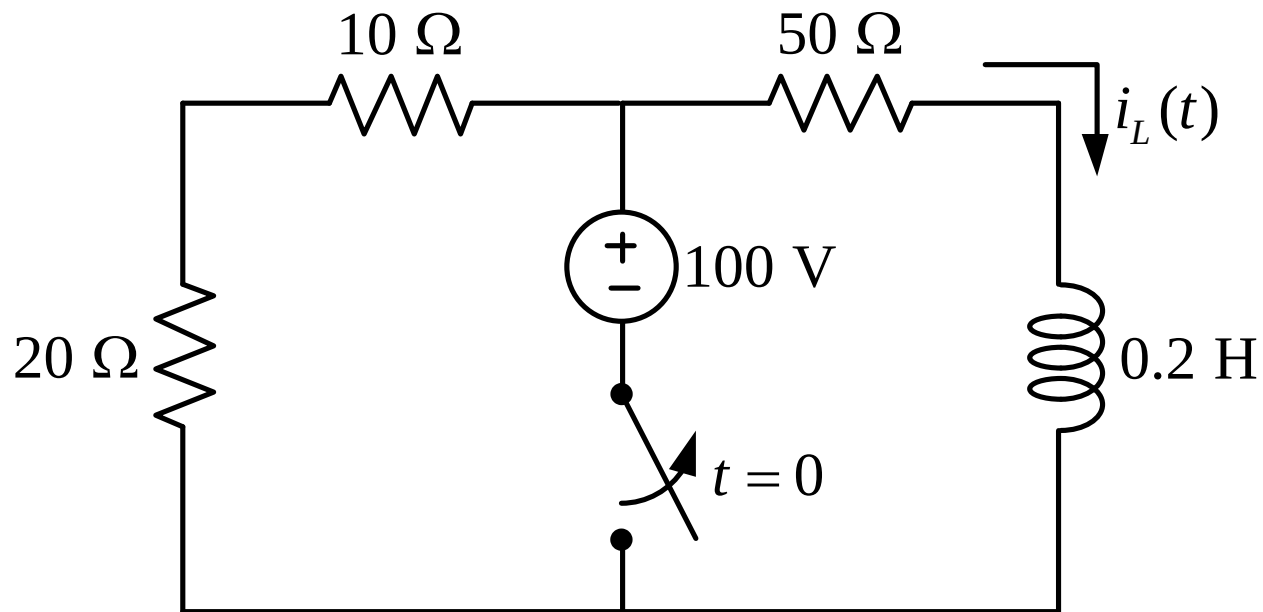
ค่าคงตัวทางเวลาของวงจรมีค่าเท่ากับ $\frac{L}{R_{eq2}} = \tau = \frac{2}{8} = 0.25$ s

จะได้กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา $t > 0$

$$i(t) = I_0 e^{\frac{-t}{\tau}} = 6e^{\frac{-t}{0.25}} \text{ A} \quad \text{ตอบ}$$

โจทย์ปัญหา 1

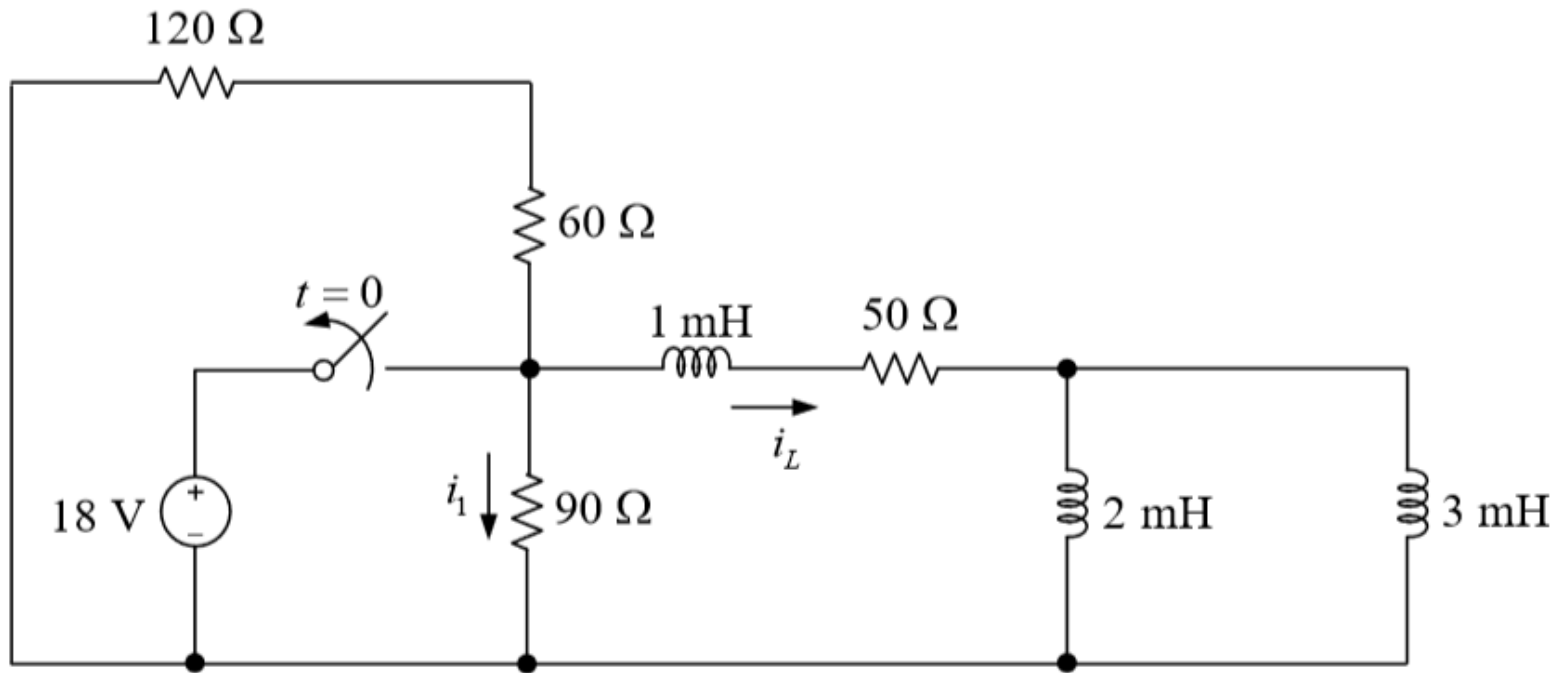
จงหาค่า $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0$



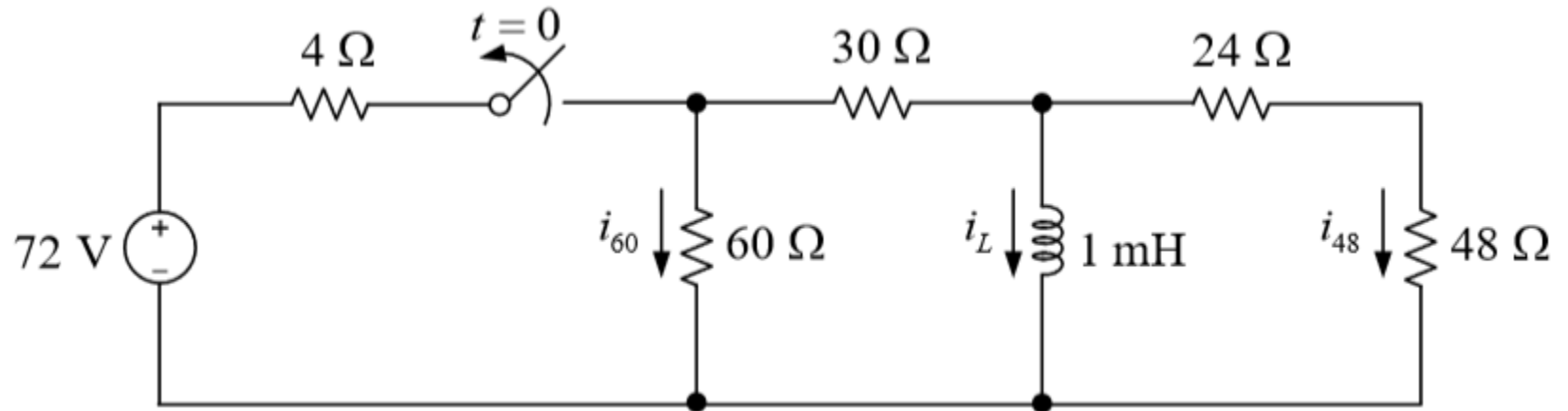
$$i_L(t) = 2e^{-400t} \text{ A}, t > 0 \quad \text{ตอบ}$$

การบ้านครั้งที่ 3

1). จงหาค่า $i_L(t)$ และ $i_1(t)$ ที่เวลา $t > 0$



การบ้านครั้งที่ 3



2). จากวงจร จงวิเคราะห์หา

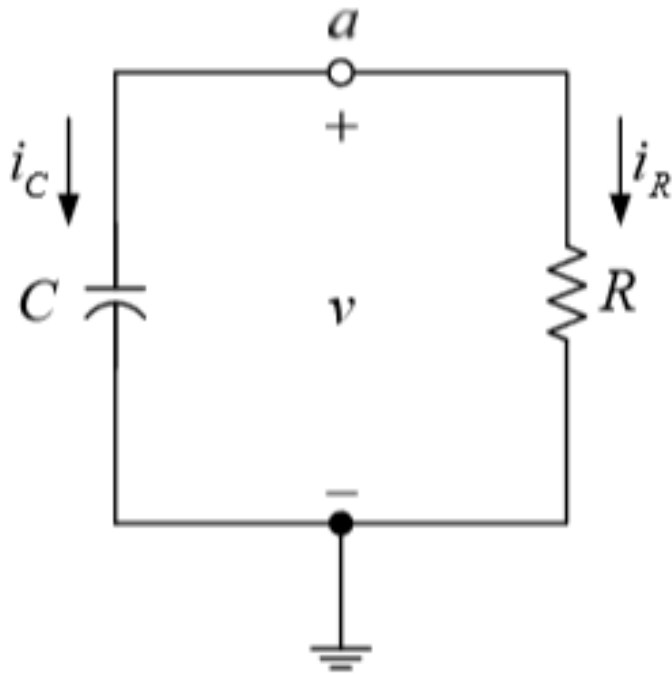
2.1) กระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0$

2.2) กระแส $i_{60}(100\mu s)$

2.3) กระแส $i_{48}(200\mu s)$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC

วงจร RC ที่ไม่มีแหล่งจ่าย กำหนดให้ V_0 คือแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $t = 0$ s สมการเคอร์ชอฟฟ์ของโหนด a จะได้ว่า



$$-i_C - i_R = 0$$

แทนค่า $i_C = C \frac{dv}{dt}$ และ $i_R = \frac{v}{R}$

$$-C \frac{dv}{dt} - \frac{v}{R} = 0$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC

$$-C \frac{dv}{dt} = \frac{v}{R} \quad \longrightarrow \quad -C dv = \frac{v}{R} dt \quad \longrightarrow \quad -dv = \frac{v}{RC} dt$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} dt \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + M \quad \longrightarrow \quad \ln v = \ln e^{-\frac{t}{RC}} + \ln e^M$$

ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC

$$\ln v = \ln e^{-\frac{t}{RC}} + \ln e^M$$

$$\ln v = \ln \left(e^{-\frac{t}{RC}} e^M \right) = \ln \left(K_c e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$v = K_c e^{-\frac{t}{RC}}$$

ที่เวลา $t=0$ s แรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ จะมีค่า V_0

$$V_0 = K_c e^{-\frac{0}{RC}} = K_c$$

จะได้ว่า

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

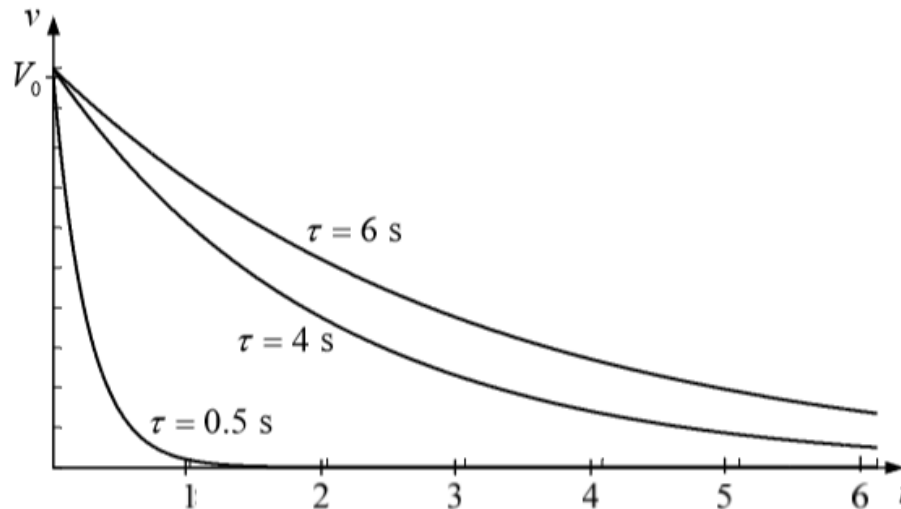
ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC

กระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานและตัวเก็บประจุจะได้ว่า

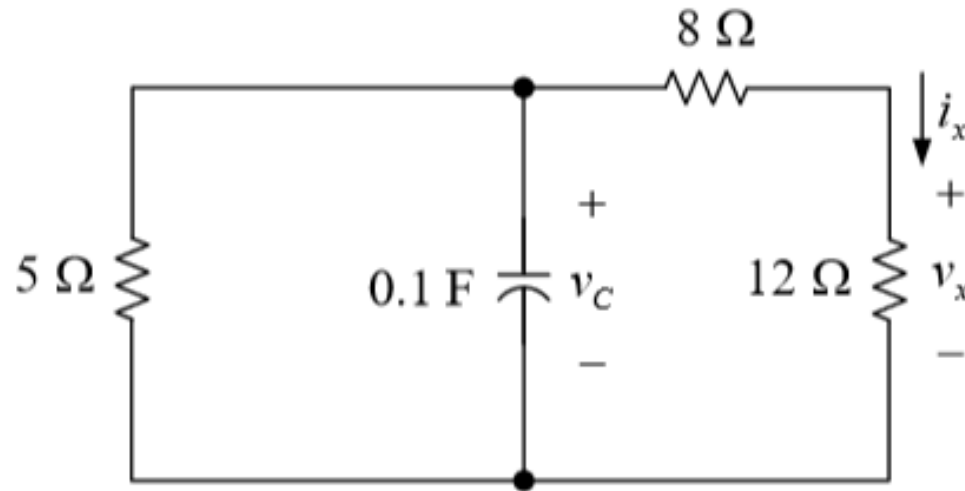
$$i_R = \frac{v}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ค่าคงตัวทางเวลาของวงจร RC จะได้ $\tau = RC$



ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $v_c(0) = 15V$ จงวิเคราะห์หาค่า v_c , v_x , i_x สำหรับเวลา $t > 0$



วิธีทำ คำนวณหาค่าความต้านทานสมมูลจะได้ว่า $5\Omega // (8\Omega + 12\Omega)$

$$R_{eq} = \frac{5(12+8)}{5+12+8} = 4\Omega$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $v_c(0) = 15V$ จงวิเคราะห์หาค่า v_c , v_x , i_x สำหรับ เวลา $t > 0$

วิธีทำ คำนวณค่าคงตัวทางเวลาจะได้ว่า

$$\tau = R_{eq}C = 4 \times 0.1 = 0.4 \text{ s}$$

จะได้ค่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุสำหรับ $t > 0$ คือ

$$v_c(t) = 15e^{-\frac{t}{0.4}} \text{ V} \quad \text{ตอบ}$$

อาศัยกฎการแบ่งแรงดันจะได้ว่า

$$v_x(t) = \frac{12}{12+8} \times v_c(t) \Rightarrow v_x(t) = \frac{12}{12+8} \times 15e^{-\frac{t}{0.4}} = 9e^{-\frac{t}{0.4}} \text{ V} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $v_c(0) = 15V$ จงวิเคราะห์หาค่า v_c , v_x , i_x สำหรับเวลา $t > 0$

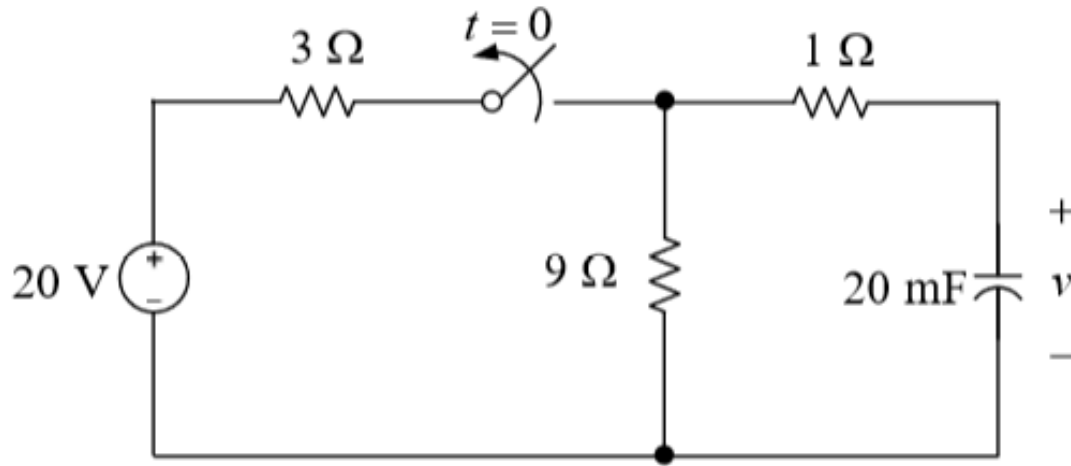
วิธีทำ คำนวณกระแส i_x จะได้ว่า

$$i_x(t) = \frac{v_x(t)}{12} = \frac{9e^{\frac{-t}{0.4}}}{12}$$

$$i_x(t) = 750e^{\frac{-t}{0.4}} \text{ A}$$

ตอบ

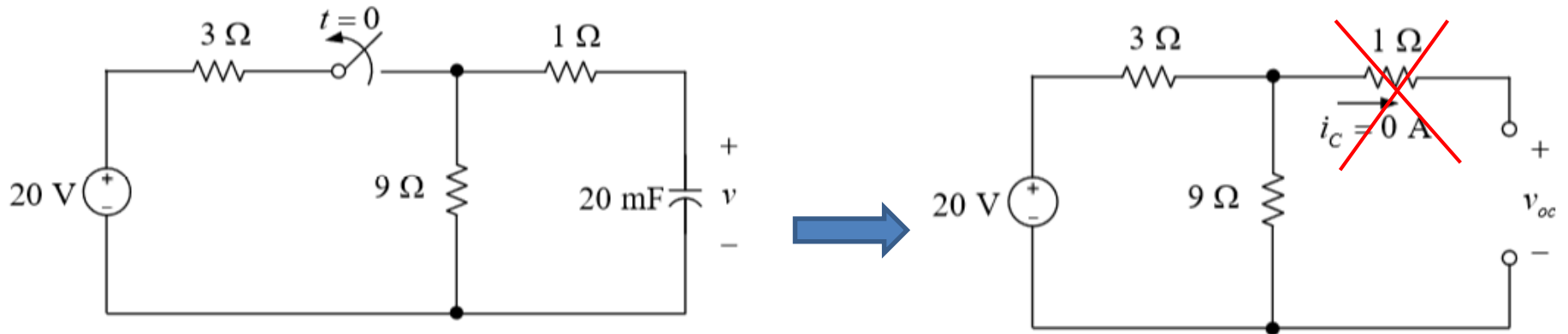
ตัวอย่างที่ 5 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ



วิธีทำ พิจารณาที่เวลา $t < 0$ สวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ทำให้ตัวเก็บประจุ
ได้รับพลังงานจากแหล่งจ่าย 20V ซึ่งอยู่ในสถานะเปิดวงจร จะทำให้ไม่มี
กระแสไหลผ่านตัวต้านทาน 1Ω

ตัวอย่างที่ 5 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

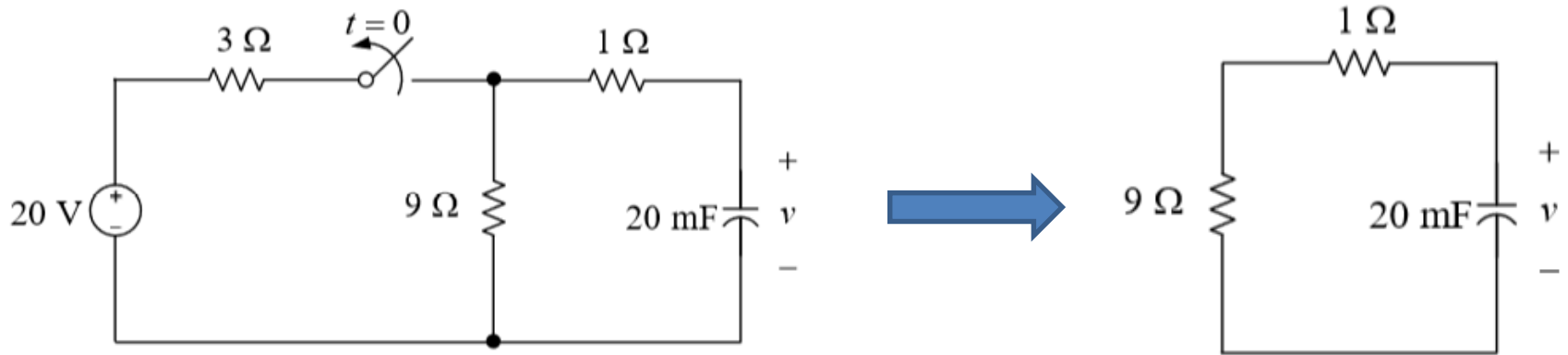
วิธีทำ



$$v_{oc}(t < 0) = \frac{9}{3+9} \times 20V = 15V = V_0$$

ตัวอย่างที่ 5 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

วิธีทำ พิจารณาที่เวลา $t \geq 0$ สวิตช์อยู่ในสถานะ “เปิด”

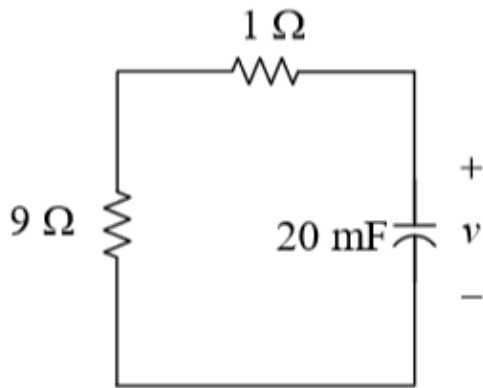


ค่าความต้านทานสมมูลของวงจรสามารถหาได้ดังนี้

$$R_{eq} = 9 + 1 = 10\ \Omega$$

ตัวอย่างที่ 5 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

วิธีทำ คำนวณค่าคงที่ทางเวลาจะได้ว่า



$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2 \text{ s}$$

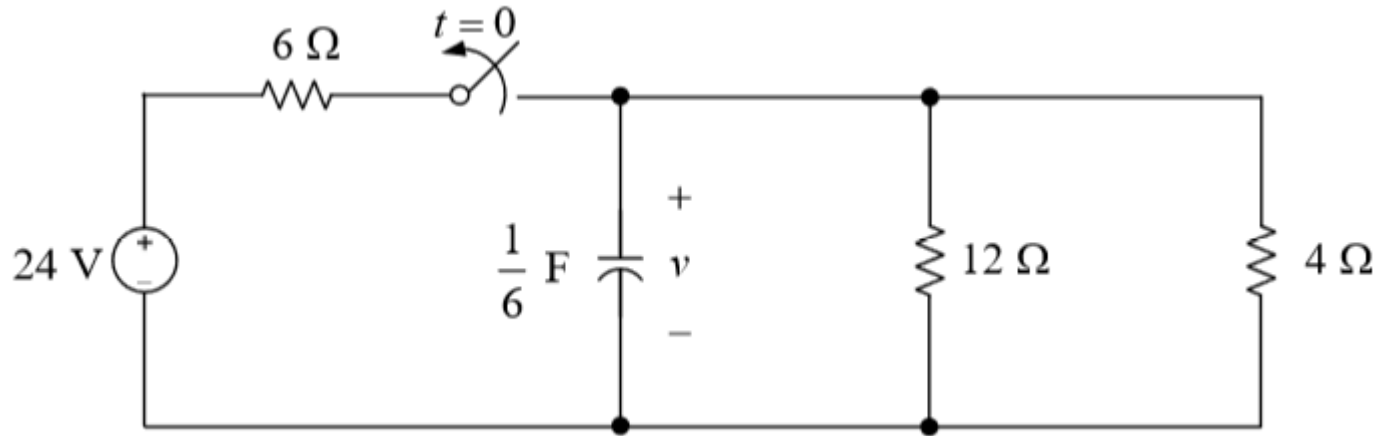
จะได้ค่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ สำหรับเวลา $t > 0$

$$v_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 15e^{-\frac{t}{0.2}} = 15e^{-5t} \text{ V} \quad \text{ตอบ}$$

พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุคือ

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C v_c^2(0) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 15^2 = 2.25 \text{ J} \quad \text{ตอบ}$$

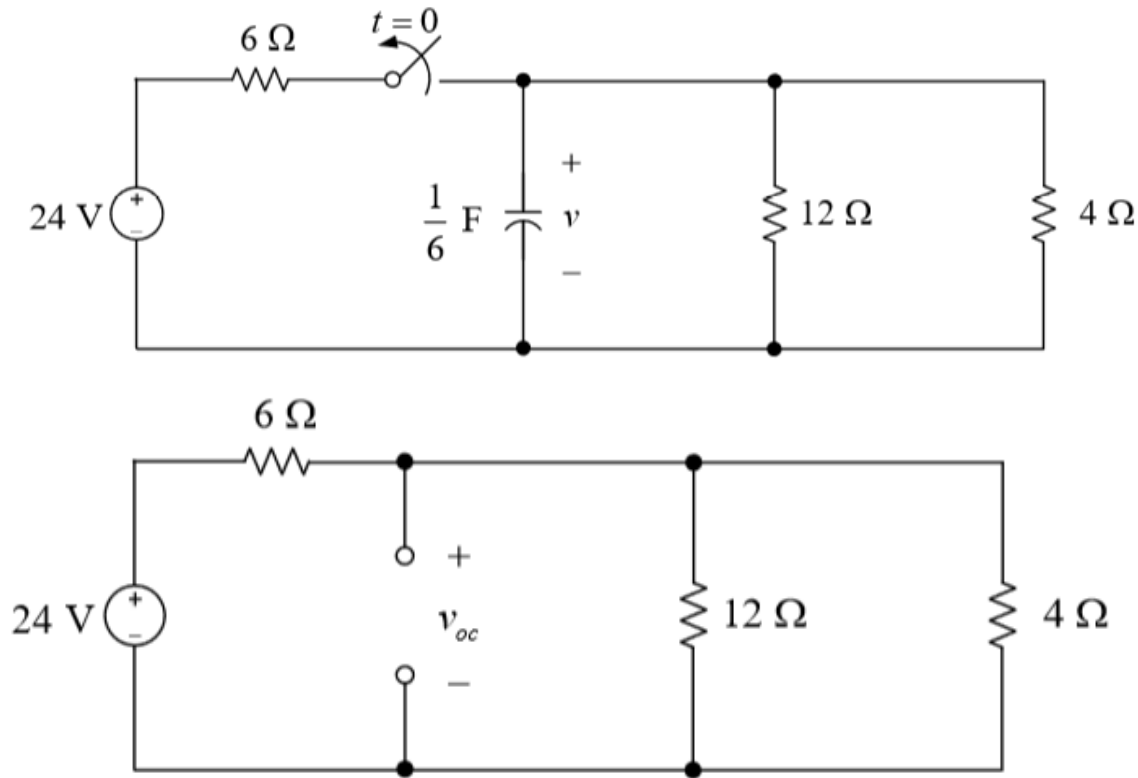
ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ



วิธีทำ พิจารณาที่เวลา $t < 0$ สวิตช์อยู่ในสถานะ “ปิด” ทำให้ตัวเก็บประจุ
ได้รับพลังงานจากแหล่งจ่าย 24V ซึ่งอยู่ในสถานะเปิดวงจร

ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

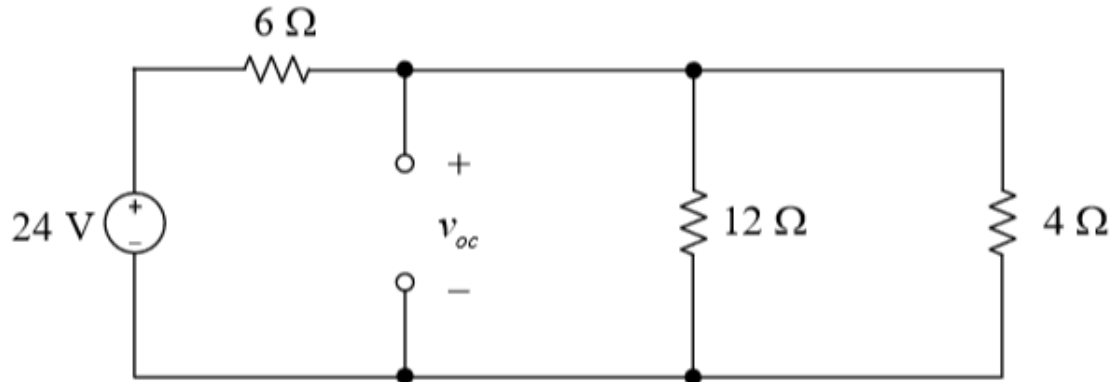
วิธีทำ



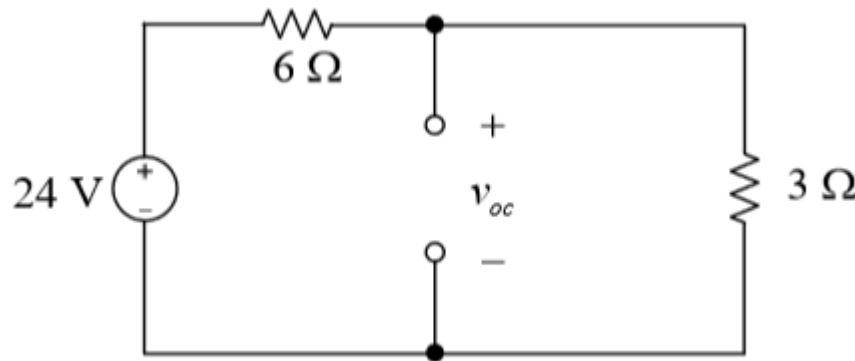
$$R_{eq} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\Omega$$

ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

วิธีทำ



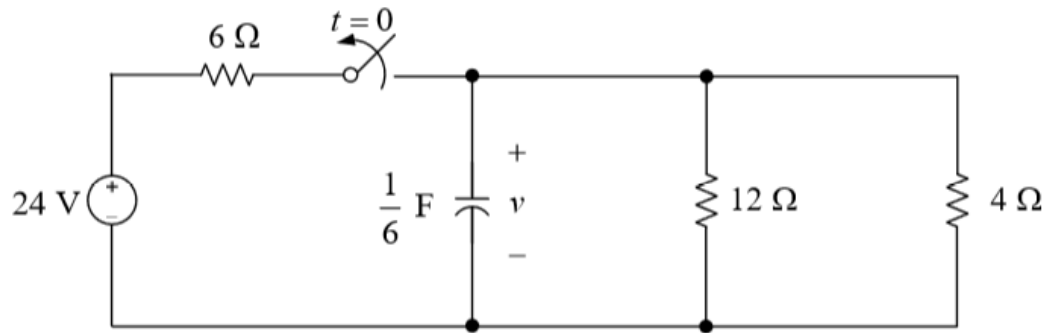
$$R_{eq} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\Omega$$



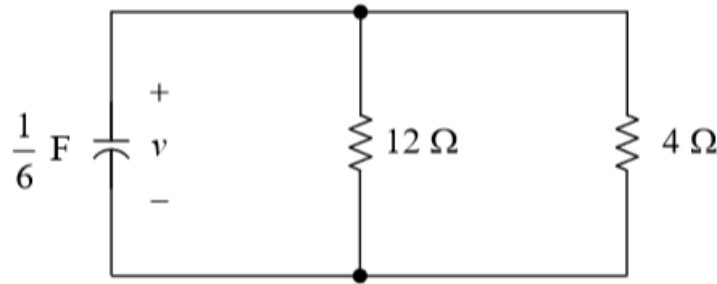
แบ่งแรงดันจะได้
$$v_{oc} = \frac{3}{3+6} \times 24 = 8V = V_0$$

ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

วิธีทำ ที่เวลา $t=0s$ สวิตช์เปลี่ยนสถานะจาก “ปิด” เป็น “เปิด” จะได้วงจร
ดังนี้



$$R_{eq2} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3\Omega$$



ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v_c(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$ และ
พลังงานเริ่มต้นที่เก็บสะสมในตัวเก็บประจุ

วิธีทำ คำนวณค่าคงที่ทางเวลาจะได้ว่า

$$\tau = R_{eq2}C = 3 \times \frac{1}{6} = 0.5 \text{ s}$$

แรงดัน $v_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$ มีค่าเท่ากับ

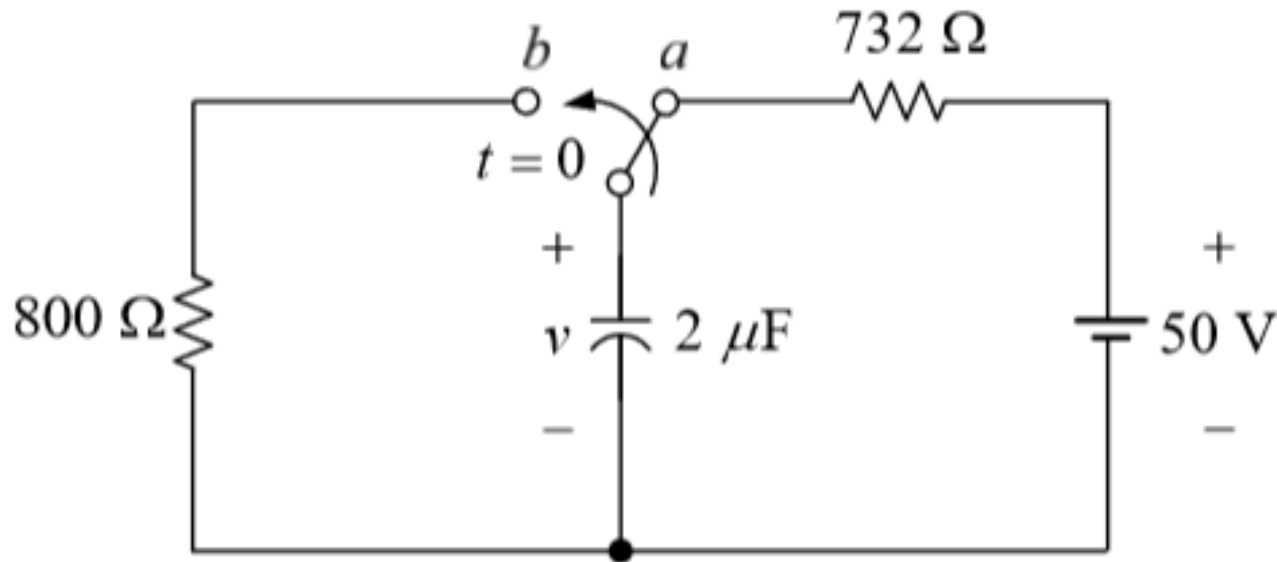
$$v_c(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}} = 8e^{\frac{-t}{0.5}} = 8e^{-2t} \text{ V} \quad \text{ตอบ}$$

พลังงานที่เริ่มสะสมในตัวเก็บประจุเท่ากับ

$$w_c(0) = \frac{1}{2} C v(0)_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) (8)^2 = 5.33 \text{ J} \quad \text{ตอบ}$$

โจทย์ปัญหา 2

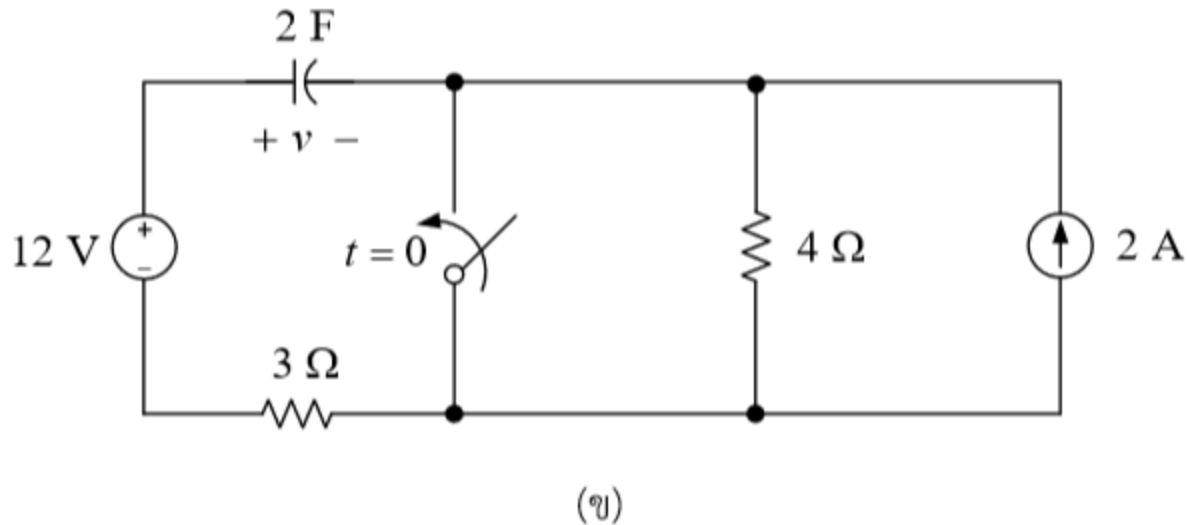
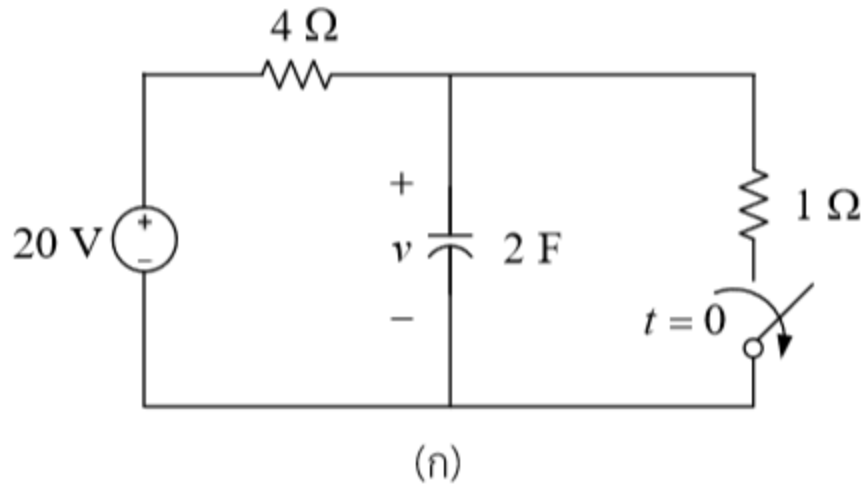
จงหาค่าแรงดัน $v(0)$ และ $v(2ms)$



$$v(0) = 50 \text{ V} , v(2ms) = 14.33 \text{ V} \quad \text{ตอบ}$$

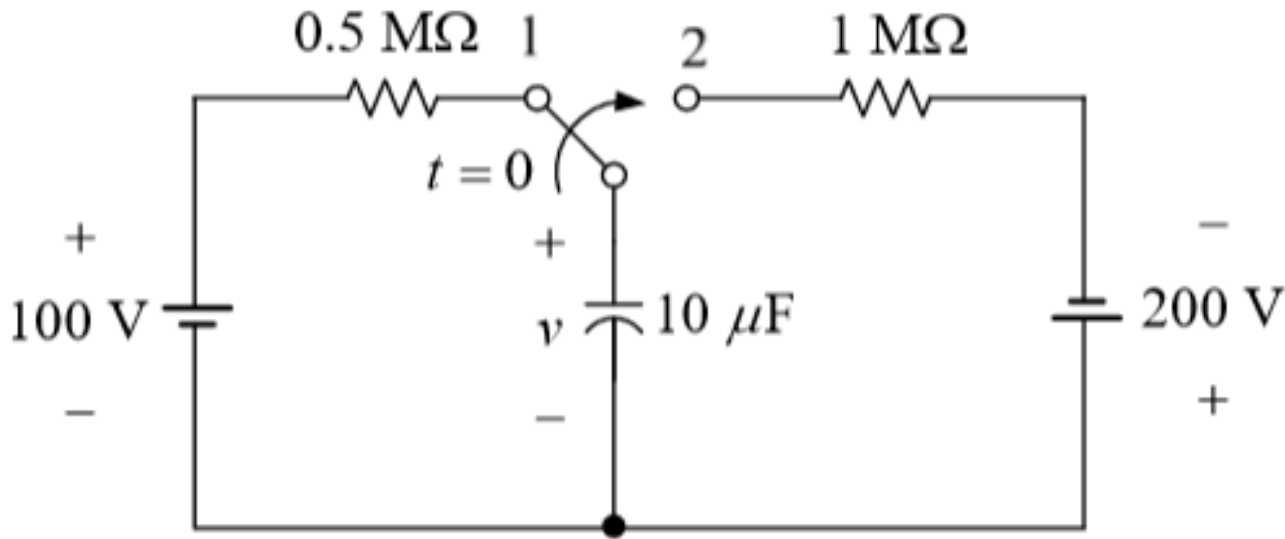
การบ้านครั้งที่ 4

1). จงหาแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $t < 0$ และ $t > 0$



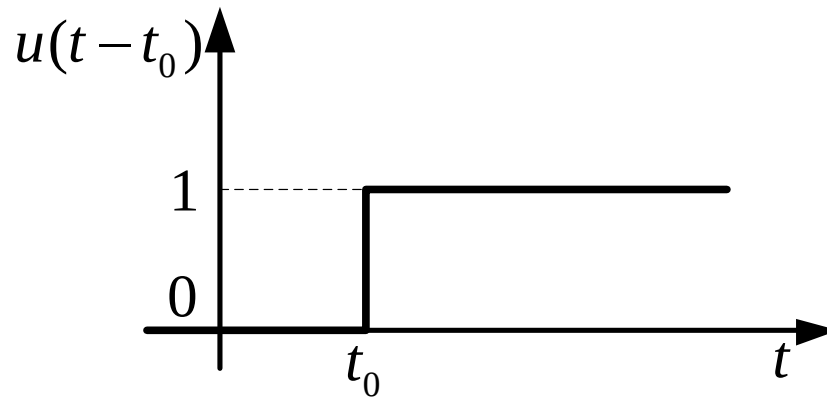
การบ้านครั้งที่ 4

2). สวิตช์เชื่อมต่อกับตำแหน่ง 1 ด้วยระยะเวลาที่นานมาก แต่เปลี่ยนไปเชื่อมต่อกับตำแหน่ง 2 ที่เวลา $t=0$ s จนถึงเวลา $t=2$ s จึงกลับไปเชื่อมต่อกับตำแหน่ง 1 จงวิเคราะห์หาแรงดัน $v(t)$ สำหรับเวลา $t > 0$



ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

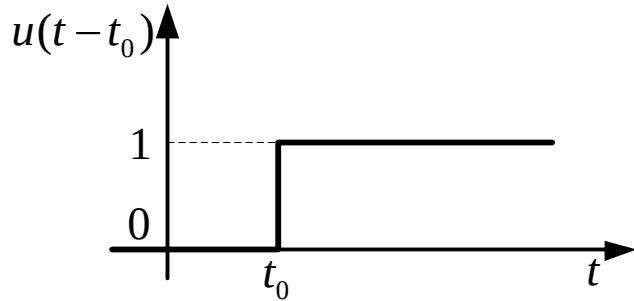
เป็นฟังก์ชันที่สามารถใช้แทนการทำงานของสวิตช์ในวงจรได้



สมการทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำมาอธิบายฟังก์ชันหนึ่งหน่วยคือ

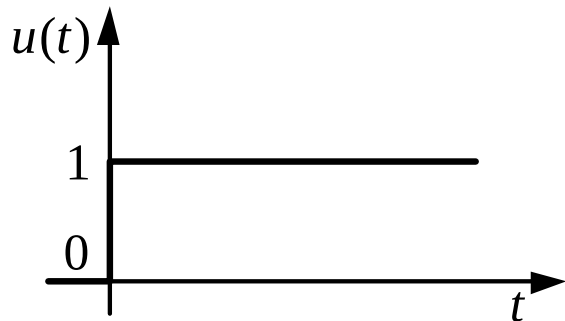
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & ; t < t_0 \\ 1 & ; t > t_0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)



$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & ; t < t_0 \\ 1 & ; t > t_0 \end{cases}$$

ในกรณีที่ $t_0 = 0$ กราฟที่ได้จะเป็นลักษณะอย่างไร ?????



$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases}$$

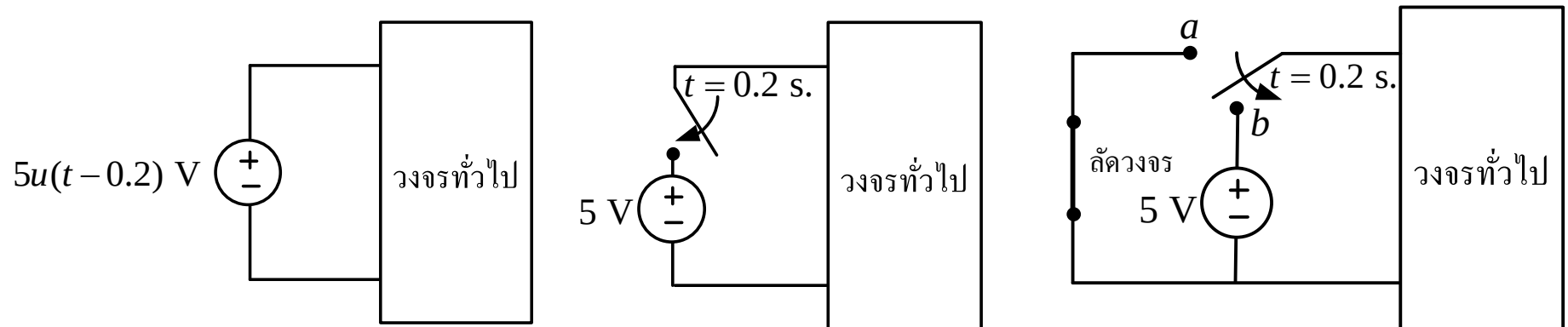
การแทนพฤติกรรมการทำงานของสวิตช์ที่ต่อกับแหล่งกำเนิดด้วยฟังก์ชัน $u(t)$ สามารถทำได้โดยการนำแรงดันแหล่งกำเนิดคูณด้วยฟังก์ชัน $u(t)$

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)

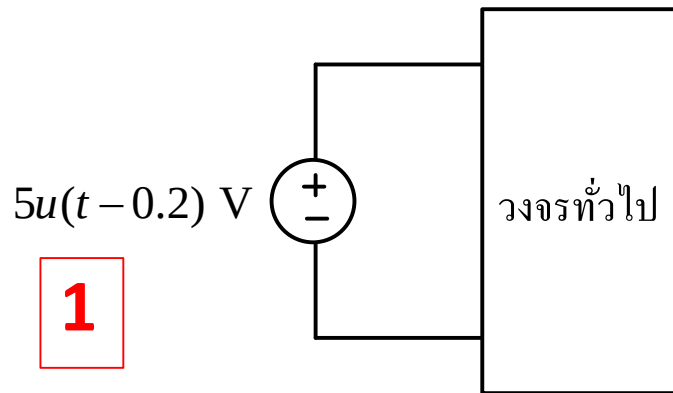
การแทนพฤติกรรมการทำงานของสวิตช์ที่ต่อกับแหล่งกำเนิดด้วยฟังก์ชัน $u(t)$ สามารถทำได้โดยการนำแรงดันแหล่งกำเนิดคูณด้วยฟังก์ชัน $u(t)$

$$v(t) = 5u(t - 0.2) \text{ V}$$

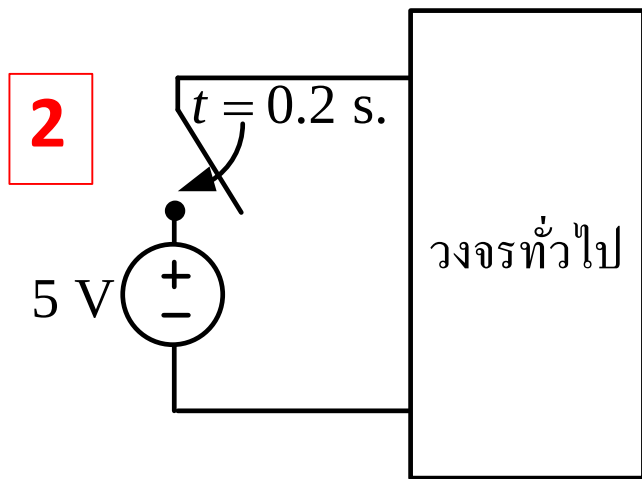
หมายถึง แหล่งกำเนิดแรงดันมีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับทุกๆ ค่าของ t ก่อนเวลา $t = 0.2 \text{ s}$. และจะมีแรงดันเท่ากับ 5 V หลังจากเวลา $t = 0.2 \text{ s}$.



ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)



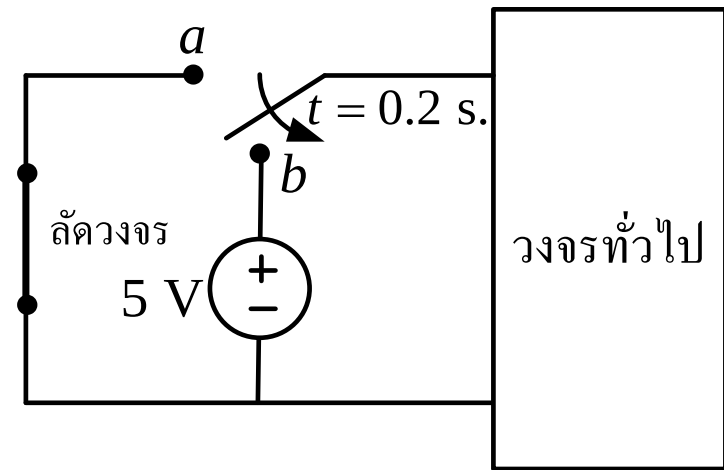
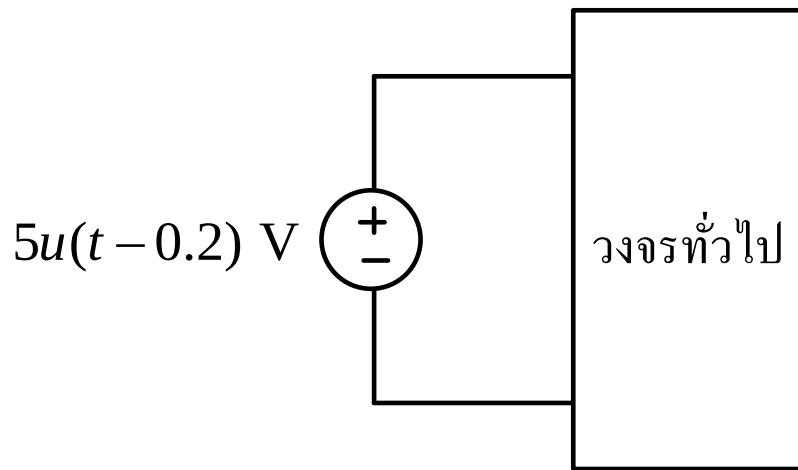
สามารถแทนได้ด้วยแหล่งจ่ายแรงดันอนุกรมอยู่กับสวิตช์ ซึ่งสวิตช์นี้จะปิดที่เวลา $t = 0.2 \text{ s}$.



เมื่อสวิตช์ปิดที่เวลา $t = 0.2 \text{ s}$. และช่วงเวลาหลังจากเวลา $t = 0.2 \text{ s}$. นั่นคือ แหล่งกำเนิดแรงดัน 5 V ต่ออยู่กับวงจรทั่วไปในขณะที่เวลาก่อน $t = 0.2 \text{ s}$. แรงดันที่ชั่วต่อกับวงจรทั่วไปอาจจะมีค่าเป็นเท่าใดก็ได้เพราะแหล่งกำเนิดแรงดัน 5 V เปิดวงจรอยู่ ไม่ได้ต่อกับวงจรทั่วไป

จะเห็นว่าภาพที่ 1 ไม่สมมูลกับภาพที่ 2 ที่ช่วงเวลาก่อน $t = 0.2 \text{ s}$.

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)



วงจรสมมูลที่ถูกต้องและสอดคล้องกับภาพที่ 1 สำหรับทุกๆ ช่วงเวลา

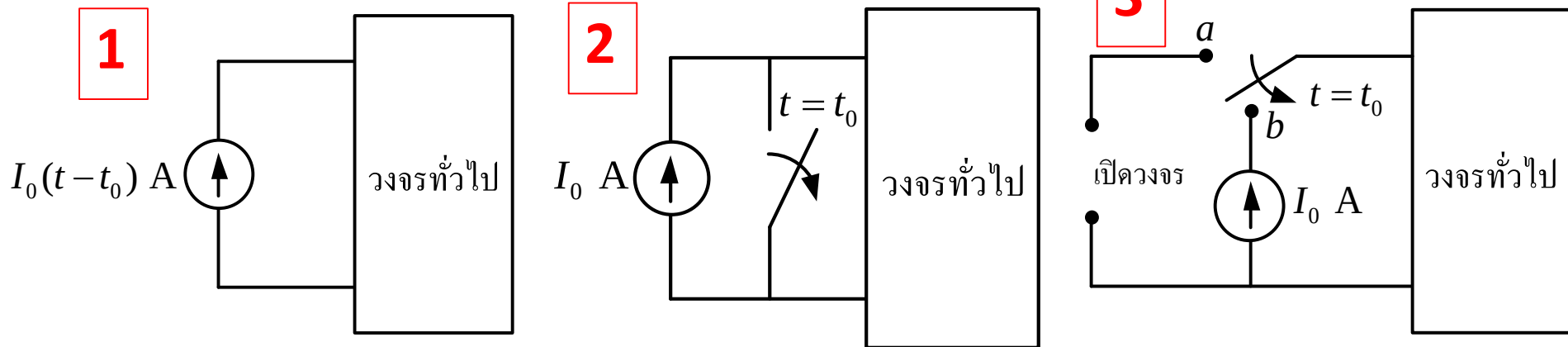
ที่เวลาก่อน $t = 0.2 \text{ s.}$ สวิตช์อยู่ที่ตำแหน่ง a ทำให้แรงดันมีค่าเท่ากับศูนย์

ที่เวลาหลัง $t = 0.2 \text{ s.}$ สวิตช์อยู่ที่ตำแหน่ง b ทำให้แรงดันมีค่าเท่ากับ 5V

จากวงจรแสดงให้เห็นว่า การทำงานของสวิตช์สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยได้

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)

กรณีนำฟังก์ชัน $u(t)$ มาใช้กับแหล่งกำเนิดกระแส



ภาพที่ 1 และ 2 จะสมมูลกันที่เวลาหลังจาก $t = t_0$ เท่านั้น

ภาพที่ 3 และ 1 จะสมมูลกันทุกช่วงเวลา

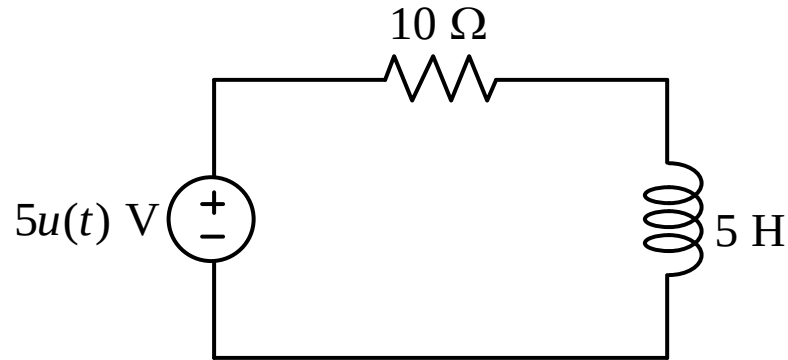
ภาพที่ 2 สามารถใช้แทนภาพที่ 1 ได้ ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขคือ ค่าเริ่มต้นของวงจรที่เวลาก่อน $t = t_0$ ต้องมีค่าเท่ากัน

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย (ต่อ)

สรุปแนวคิด ฟังก์ชัน $u(t)$ ที่ใช้งานสำหรับ

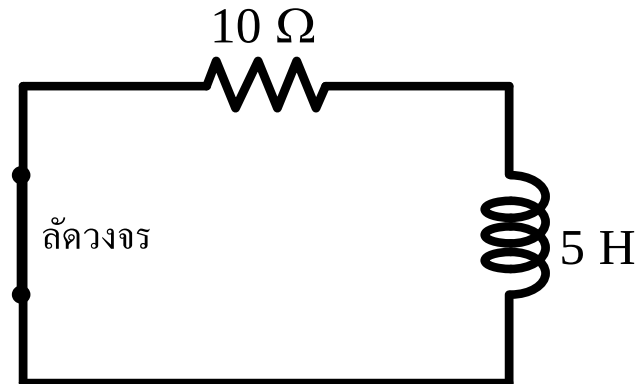
- แหล่งกำเนิดแรงดัน เช่น $V_s u(t)$ แหล่งกำเนิดแรงดันจะ**ลัดวงจร**ที่เวลา $t < 0$
- แหล่งกำเนิดกระแส เช่น $I_s u(t)$ แหล่งกำเนิดกระแสจะ**เปิดวงจร**ที่เวลา $t < 0$

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนวงจรที่เวลา $t > 0$ และ $t < 0$

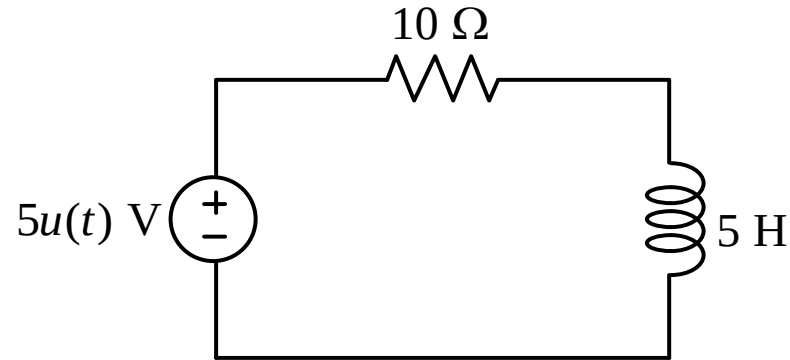


วิธีทำ วงจรที่ $t < 0 \Rightarrow u(t) = 0$

แหล่งจ่ายแรงดัน $5u(t) \text{ V} = 0 \text{ V} \Rightarrow$ **ลัดวงจร**

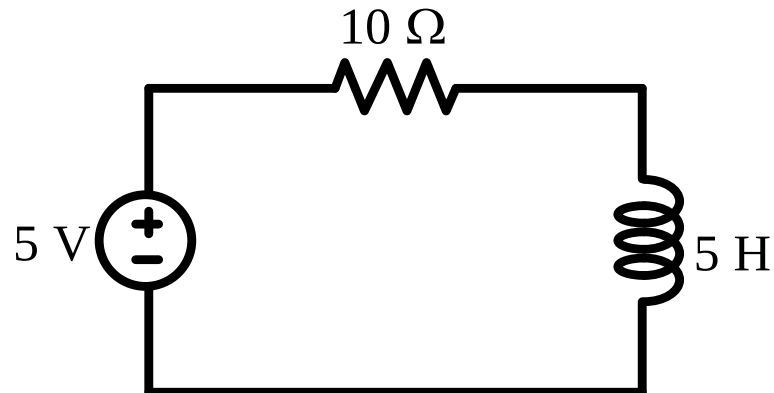


ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนวงจรที่เวลา $t > 0$ และ $t < 0$

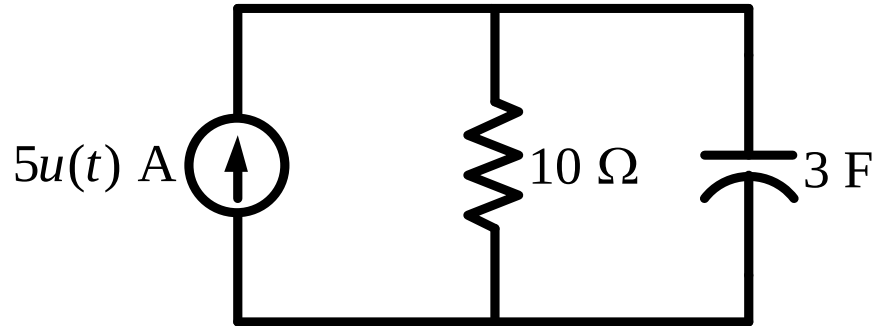


วิธีทำ วงจรที่ $t > 0 \Rightarrow u(t) = 1$

แหล่งจ่ายแรงดัน $5u(t) \text{ V} = 5 \text{ V}$

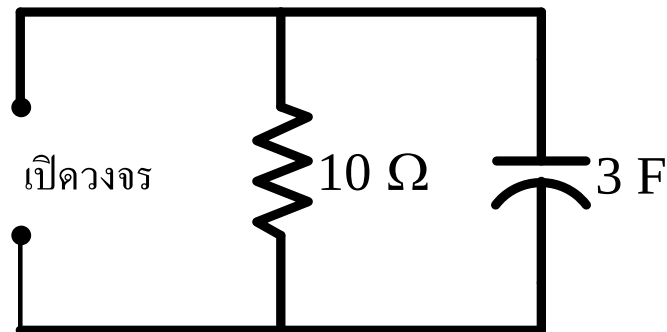


ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนวงจรที่เวลา $t > 0$ และ $t < 0$

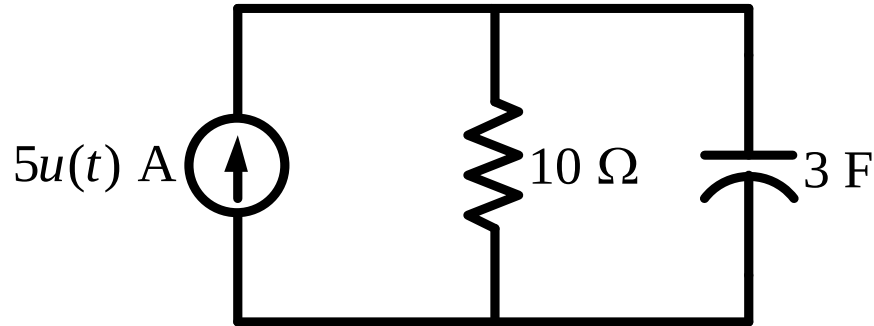


วิธีทำ วงจรที่ $t < 0 \Rightarrow u(t) = 0$

แหล่งจ่ายกระแส $5u(t) \text{ A} = 0 \text{ A} \Rightarrow$ เปิดวงจร

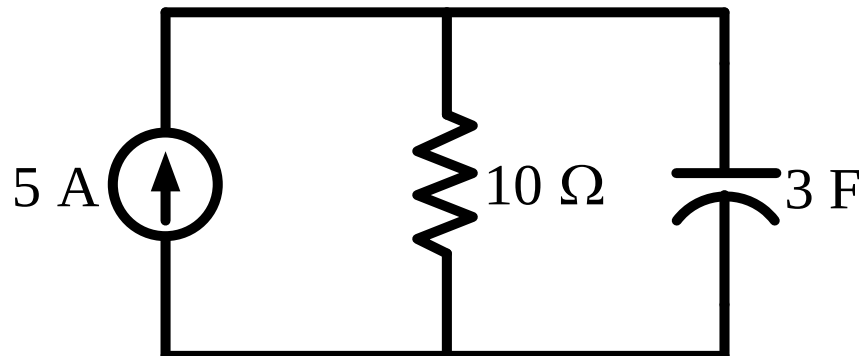


ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนวงจรที่เวลา $t > 0$ และ $t < 0$



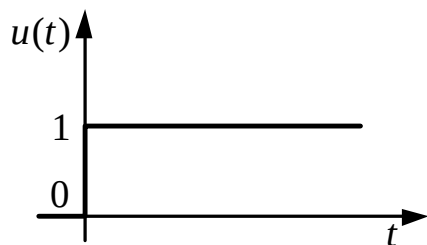
วิธีทำ วงจรที่ $t > 0 \Rightarrow u(t) = 1$

แหล่งจ่ายกระแส $5u(t) \text{ A} = 5 \text{ A}$

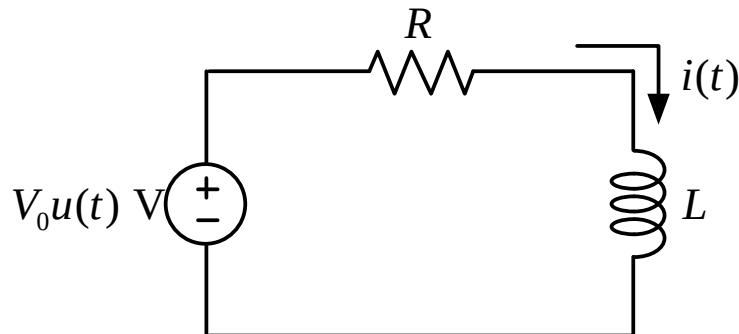


ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได

พิจารณาวงจรที่เชื่อมต่อแหล่งจ่ายแรงดันแบบขั้นที่ทันใด ที่เวลา $t > 0$



$$u(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases}$$



$$\text{KVL; } \Rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} - V_0 u(t) = 0$$

$$\text{พิจารณา } t > 0 \Rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = V_0$$

$$\frac{L di}{V_0 - Ri} = dt \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}} -\frac{L}{R} \ln(V_0 - Ri) = t + k$$

ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

พิจารณาหาค่า k $-\frac{L}{R} \ln(V_0 - Ri) = t + k$

อาศัยค่าเริ่มต้นของ $i(t)$ ทราบว่า ก่อนเวลาที่ $t = 0 \Rightarrow i(0^-) = 0 \text{ A}$

และกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดได้

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0 \text{ A}$$

ดังนั้นจาก $-\frac{L}{R} \ln(V_0 - Ri) = t + k$

$$k = -\frac{L}{R} \ln(V_0)$$

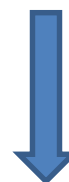
ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

$$k = -\frac{L}{R} \ln(V_0)$$



แทนค่า

$$-\frac{L}{R} \ln(V_0 - Ri) = t - \frac{L}{R} \ln(V_0) \quad \xrightarrow{\text{ย้ายข้างและจัดหมู่}} \quad -\frac{L}{R} [\ln(V_0 - Ri) - \ln(V_0)] = t$$



คุณสมบัติฟังก์ชัน log

$$\ln\left(\frac{V_0 - Ri}{V_0}\right) = -\frac{Rt}{L} \quad \xleftarrow{\text{ย้ายข้าง}} \quad -\frac{L}{R} \left[\ln\left(\frac{V_0 - Ri}{V_0}\right) \right] = t$$



$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$



$$i(t) = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

สำหรับ $i(t)$ ทุกๆ ค่า t

$$i(t) = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

สรุปแนวคิด

ขั้นตอนที่ 1: กำหนดให้ $i(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, $t > 0$

ค่าคงที่ τ

ผลตอบสนองในสภาวะอยู่ตัว

ขั้นตอนที่ 2: ขั้นตอนการเก็บข้อมูล

วงจรที่เวลา $t < 0$ ($t = 0^-$) $\longrightarrow$ ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร

$\longrightarrow$ คำนวณหาค่ากระแสตั้งต้นของตัวเหนี่ยวนำ $\longrightarrow i(0^-) = i(0^+) = i(0)$

วงจรที่เวลา $t > 0$ แบ่งออกเป็น 2 ช่วงคือ

$$t = 0^+ \quad \text{และ} \quad t \rightarrow \infty$$

ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

สรุปแนวคิด (ต่อ)

ขั้นตอนที่ 2: วงจรที่เวลา $t = 0^+$  คำนวณหาค่าคงที่ทางเวลา

 ช่วงนี้จะเป็นตัวบอกว่า วงจรมีผลตอบสนองแบบใดบ้าง

-  อยู่ตัว+ธรรมชาติ (มีแหล่งจ่าย)
-  ธรรมชาติ (ไม่มีแหล่งจ่าย)

วงจรที่เวลา $t \rightarrow \infty$ คำนวณค่ากระแสในสถานะอยู่ตัว

 $i(\infty) = i_f$ (ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร)

****กระแสที่คำนวณได้คือ ผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว เมื่อวงจรได้รับอินพุตแบบขั้นบันได**

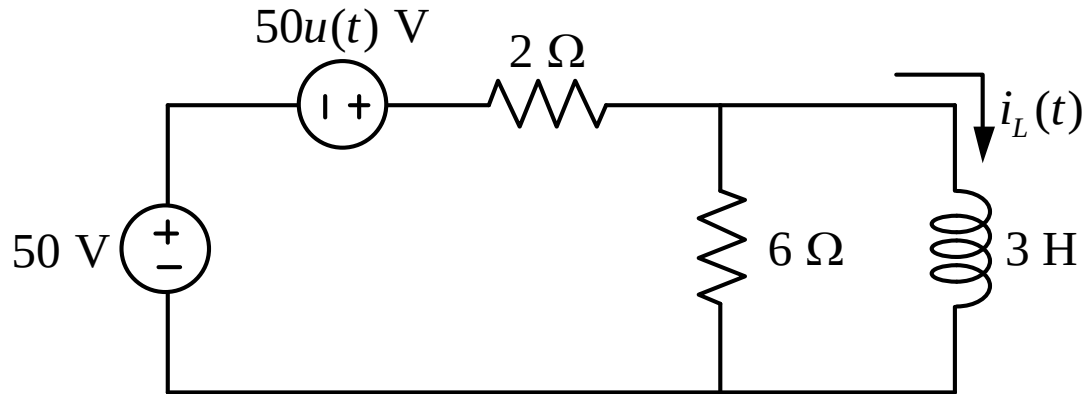
ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได (ต่อ)

สรุปแนวคิด (ต่อ)

ขั้นตอนที่ 3: ขั้นตอนการคำนวณ

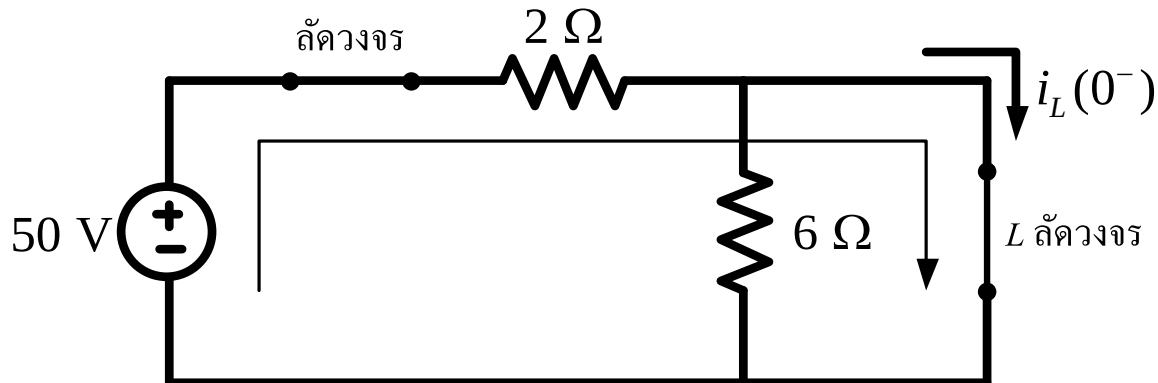
- ใช้สมการ $i(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
- คำนวณค่า A ของสมการจากค่า $i(0^-) = i(0^+) = i(0)$
(ได้จากขั้นตอนที่ 2)
- วาดกราฟและวงจร และสรุปคำตอบที่คำนวณได้

ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ



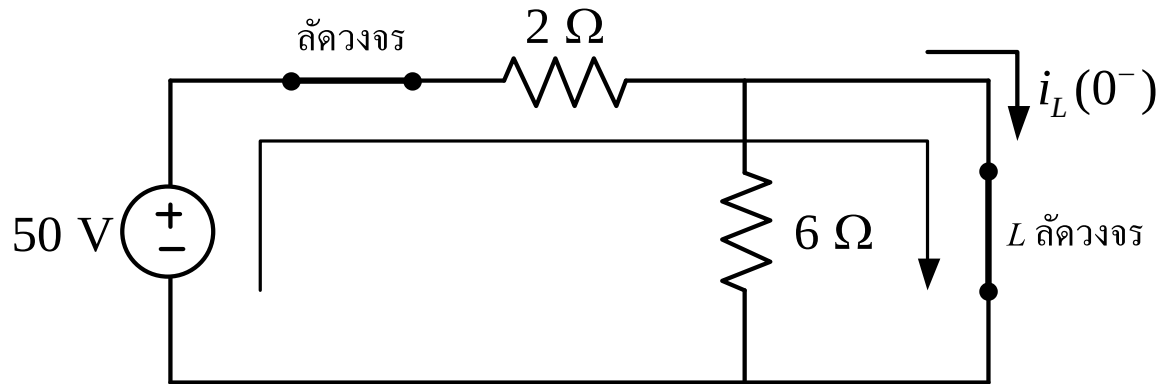
วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: กำหนดให้ $i(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

ขั้นตอนที่ 2: วงจรที่เวลา $t < 0$ ($t = 0^-$) $\Rightarrow$ ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร $u(t) = 0$



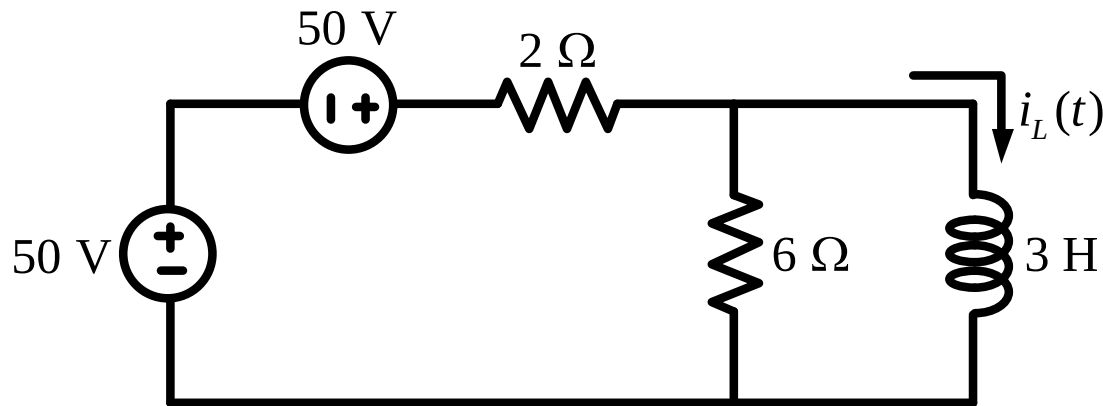
ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

วิธีทำ



ขั้นตอนที่ 2: จากวงจร $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 50/2 = 25 \text{ A}$

ที่เวลา $t > 0$ ➡ วงจรที่ $t = 0^+$ ➡ $u(t) = 1$ ทำให้ $50u(t) = 50V$

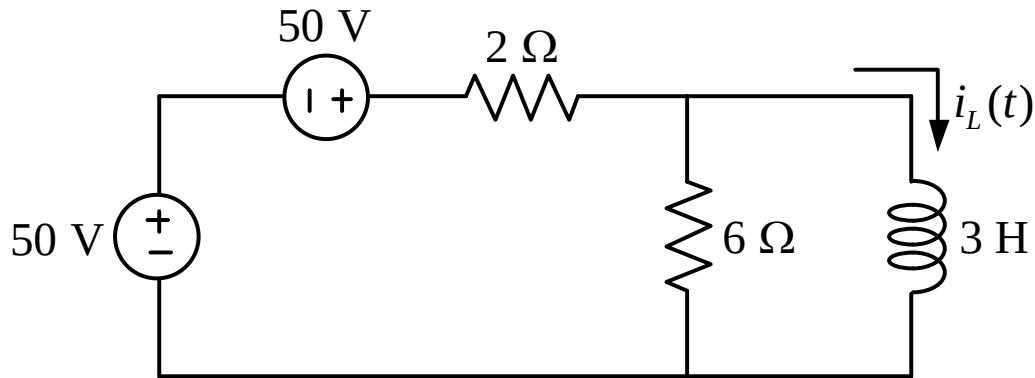


แหล่งกำเนิดแรงดันมาเชื่อมต่อกับวงจรแบบทันทีทันใด

ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

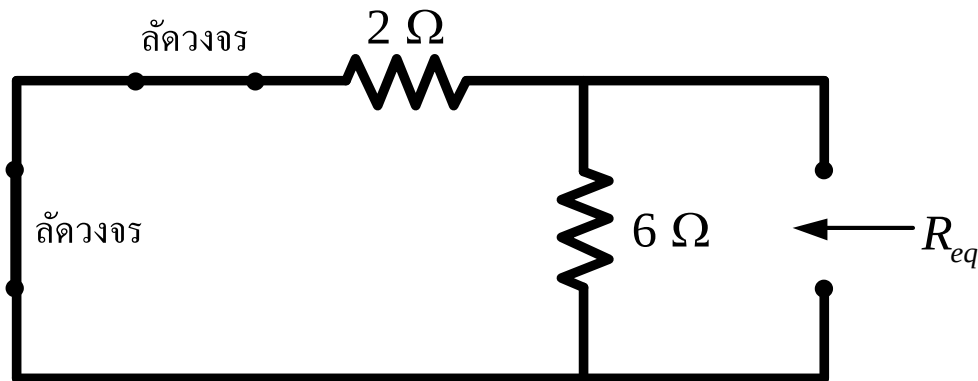
วิธีทำ

$t = 0^+$



ผลตอบสนองของวงจร = ผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว + ผลตอบสนองทางธรรมชาติ

คำนวณค่าคงที่ทางเวลา: โดยการปลดตัวเหนี่ยวนำออกแล้วหาค่า R_{eq}



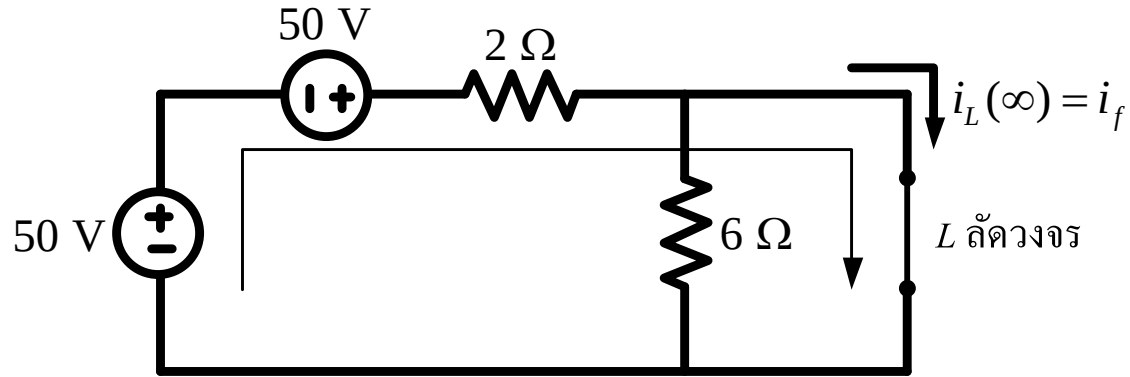
$$R_{eq} = 2 \parallel 6 = 12/8 = 3/2 \, \Omega$$

$$\tau = L/R_{eq} = 3 / (3/2) = 2 \, \text{s}.$$

ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

วิธีทำ

$$t \rightarrow \infty$$



คำนวณค่ากระแสในสถานะอยู่ตัว ในขณะที่ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร จะได้ว่า

$$i_L(\infty) = i_f = \frac{100}{2} = 50 \text{ A}$$

ขั้นตอนที่ 3: ขั้นตอนการคำนวณ

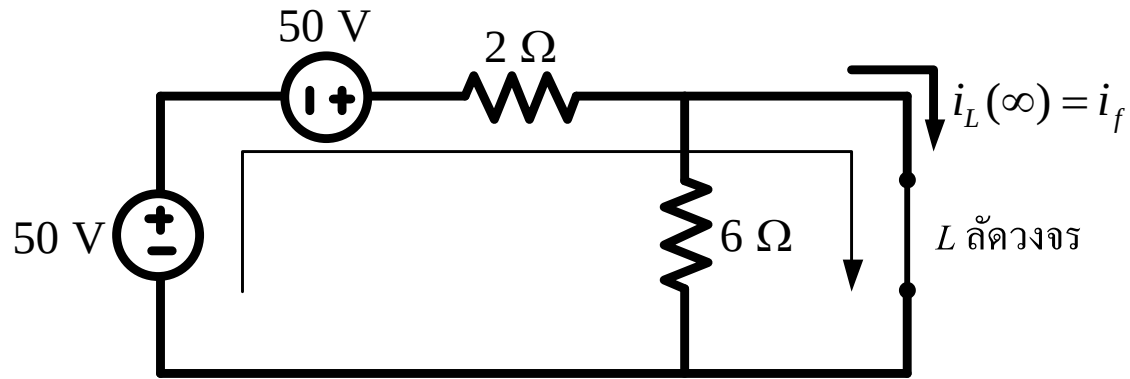
เขียนสมการจะได้ว่า
$$i_L(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 50 + Ae^{-\frac{t}{2}}$$

จากขั้นตอนที่ 2 จะได้ว่า $i_f = 50 \text{ A}$ และ $\tau = 2 \text{ s}$.

ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

วิธีทำ

$$t \rightarrow \infty$$



$$i_L(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 50 + Ae^{-\frac{t}{2}}$$

ขั้นตอนที่ 3: ขั้นตอนการคำนวณ

คำนวณค่า A จาก $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 50 / 2 = 25 \text{ A}$

$$i_L(t=0) = 50 + A = 25 \quad \Rightarrow \quad A = -25$$

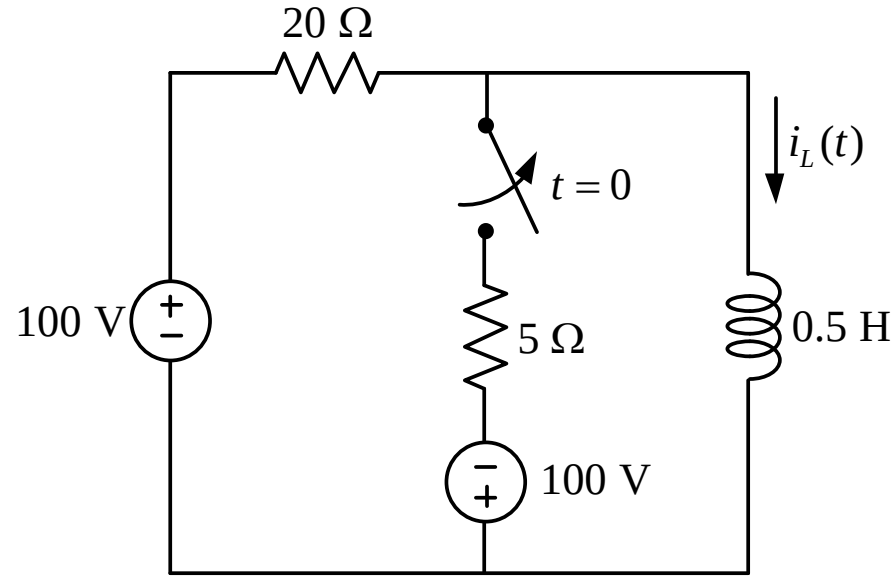
$$i_L(t) = 50 - 25e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{ที่เวลา } t > 0$$

ตัวอย่างที่ 9 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

วิธีทำ ค่ากระแส $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ

$$i_L(t) = \begin{cases} 25 \text{ A}, & t < 0 \\ 50 - 25e^{-\frac{t}{2}}, & t > 0 \end{cases}$$

โจทย์ปัญหา 3



- จงคำนวณหา
- 1) ค่ากระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t < 0 \Rightarrow 15\text{ A}$
 - 2) ค่ากระแส $i_L(0^+) \Rightarrow 15\text{ A}$
 - 3) ค่ากระแส $i_L(\infty) \Rightarrow 5\text{ A}$
 - 4) ค่ากระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0 \Rightarrow i_L(t) = 5 - 20e^{-40t}\text{ A}$