



Space Curve

เส้นโค้งปริภูมิ

By ARNON ISARAMONGKOLRAK
ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
NAKHONPATHOM RAJABHAT UNIVERSITY

Contents

- ▶ ฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์
- ▶ เส้นโค้งของฟังก์ชันเวกเตอร์
- ▶อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์
- ▶ อินทิกรัลของฟังก์ชันเวกเตอร์
- ▶ ความยาวส่วนโค้ง
- ▶ เส้นโค้งเรียบ
- ▶ ความโค้ง และรัศมีความโค้ง



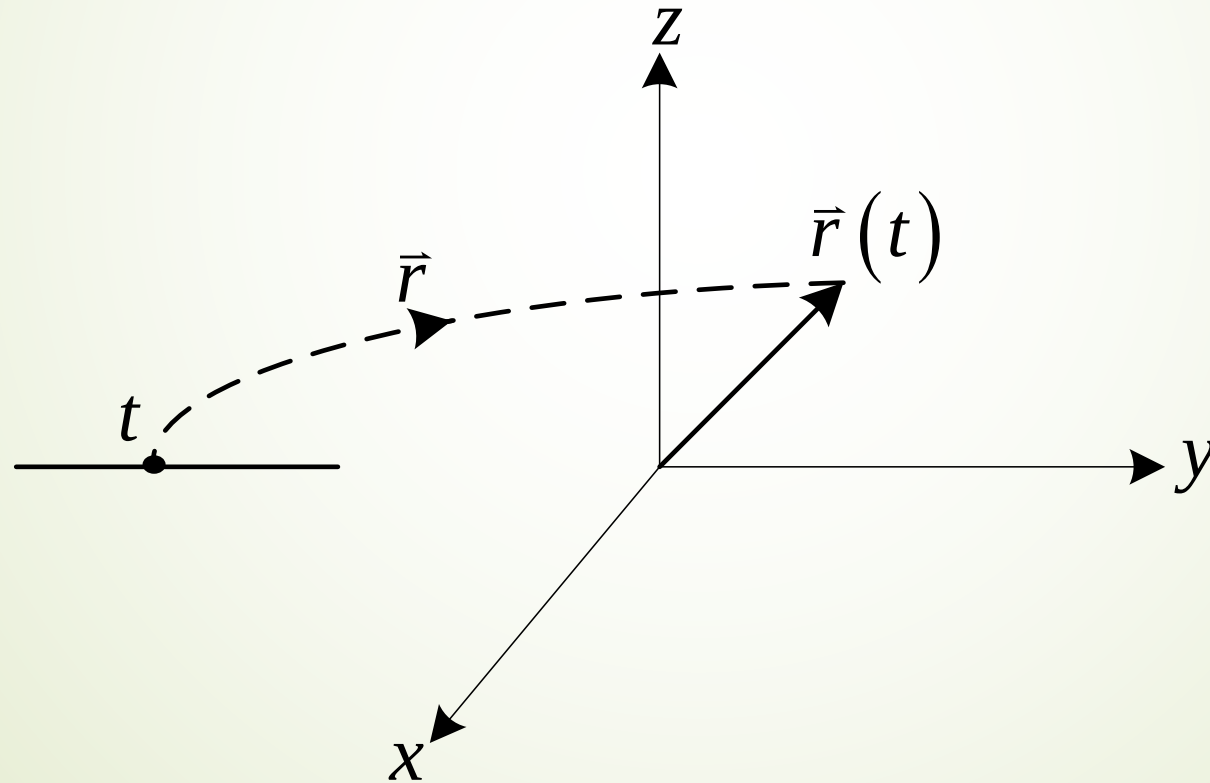
ฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์

function components of vector



ฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์

- กำหนดให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชัน และ t เป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นสำหรับแต่ละค่าของ t ในโดเมนของ $\vec{r}$ จะมีเวกเตอร์เพียงเวกเตอร์เดียวในปริภูมิสามมิติที่สมนัยกับ t เขียนแทนด้วย $\vec{r}(t)$



ฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์

- ➡ ถ้าให้ $f(t), g(t)$ และ $h(t)$ เป็นส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$ แล้ว $f(t), g(t)$ และ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง เรียกฟังก์ชันค่าจริงทั้งสามนี้ว่า **“ฟังก์ชันส่วนประกอบของเวกเตอร์”** เขียนแทนด้วย

Diagram illustrating the equivalence between two representations of a vector $\vec{r}(t)$:

Left representation: $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

Right representation: $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$

Red arrows indicate the correspondence between the components and the unit vectors:

- $f(t)$ corresponds to $\vec{i}$
- $g(t)$ corresponds to $\vec{j}$
- $h(t)$ corresponds to $\vec{k}$

Example 1 ถ้า $\vec{r}(t) = (t^3, \log(3-t), \sqrt{t})$ แล้วจงหาฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$

Solution

ฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$ คือ

$$\vec{r}(t) = (t^3, \log(3-t), \sqrt{t})$$

$$f(t) = t^3, \quad (-\infty \leq t \leq \infty)$$

$$g(t) = \log(3-t), \quad (3-t > 0)$$

$$h(t) = \sqrt{t}, \quad (t \geq 0)$$

โดเมนของ $\vec{r}(t)$ เป็นเซตของค่า t ซึ่ง $\vec{r}(t)$ นิยาม จะเห็นว่า โดเมนของ $\vec{r}(t)$ คือช่วง $[3, 0)$

บทนิยาม 2.1

ถ้า $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right)$

เมื่อฟังก์ชันส่วนประกอบทั้งสามมีลิมิตเมื่อ $t \rightarrow a$

*** ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์มีคุณสมบัติที่เป็นไปตามกฎเกณฑ์ของลิมิตของฟังก์ชันค่าจริง

Example 2 จงหา $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t)$ เมื่อ $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + \frac{\sin(t)}{t}\vec{k}$

Solution

$$\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + \frac{\sin(t)}{t}\vec{k}$$

Take limit ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t^3) \right] \vec{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} te^{-t} \right] \vec{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \right] \vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = (1)\vec{i} + (0)\vec{j} + (1)\vec{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{k}$$

Answer



เส้นโค้งของฟังก์ชันเวกเตอร์

curve of vector functions

บทนิยาม 2.2

ฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}$ มีความต่อเนื่องที่ a ถ้า $\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$

ถ้า f, g, h เป็นฟังก์ชันค่าจริงและต่างก็มีความต่อเนื่องบนช่วง I และเซต C บนจุด (x, y, z) ทั้งหมดในปริภูมิซึ่งตามสมการ $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$

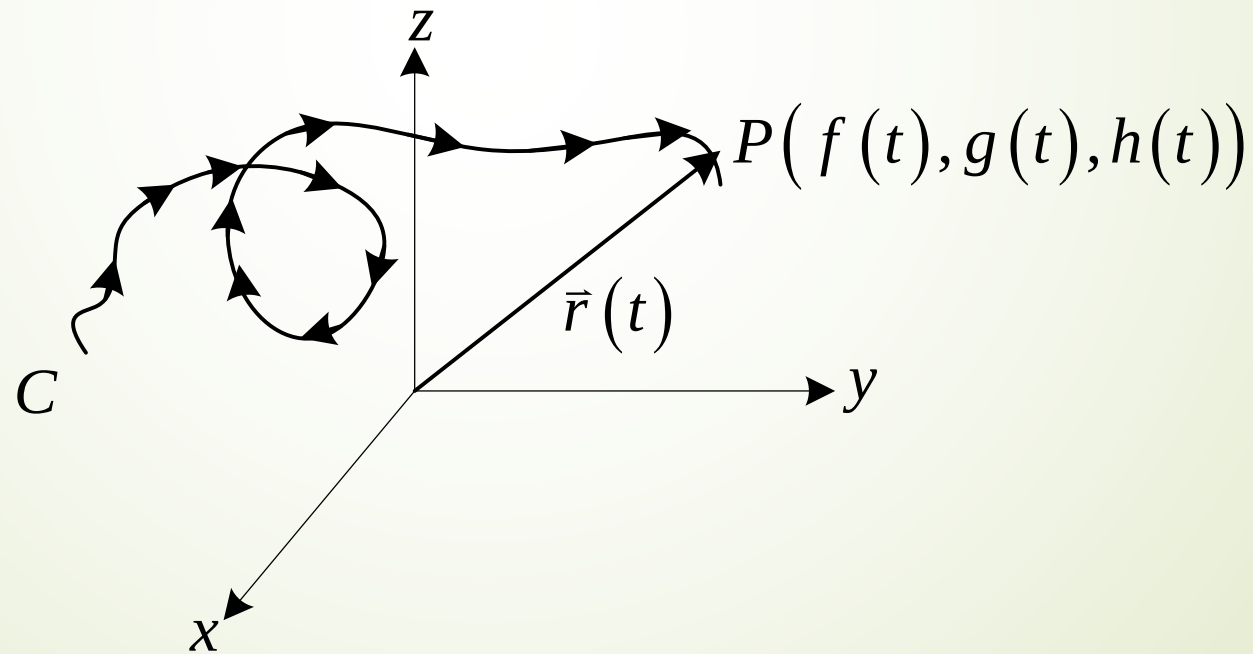
ค่าของ t แปรเปลี่ยนไปตลอดบนช่วง I เรียกว่า “เส้นโค้งปริภูมิ (Space curve)”

และสมการ $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ เรียกว่า “สมการพารามेटริกซ์(parametric)” ของ C

t เรียกว่า “พารามิเตอร์(parameter)”

บทนิยาม 2.2

C เปรียบเสมือนแนวทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค ณ เวลา t อนุภาคอยู่ ณ จุด $P(f(t), g(t), h(t))$ บนเซต C ถ้าให้ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ แล้ว $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด $P(f(t), g(t), h(t))$ บนเซต C

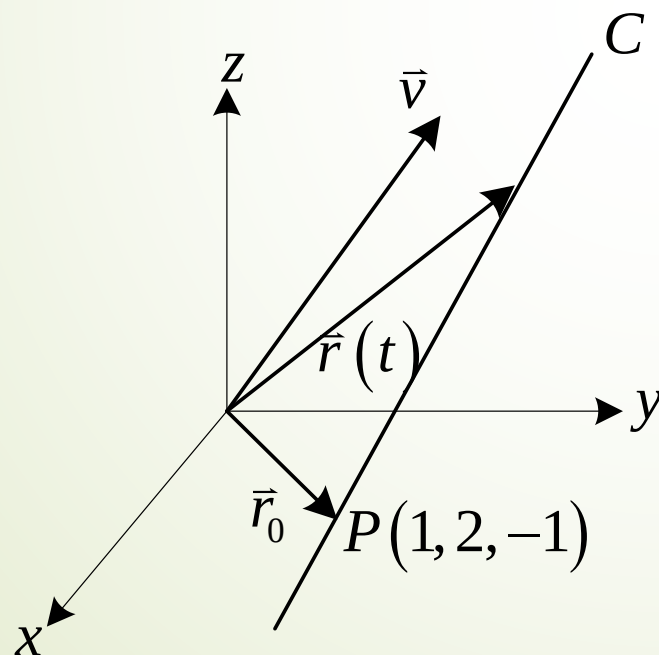


Example 3 จงบรรยายลักษณะเส้นโค้งซึ่งนิยามด้วยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

$$\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + (2+5t)\vec{j} + (-1+6t)\vec{k}$$

Solution สมการพารามетริกซ์ที่สมนัยคือ $x = 1+t, y = 2+5t, z = -1+6t$

หรือเขียนฟังก์ชัน $\vec{r}(t)$ ให้อยู่ในรูป $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v}$ $\left. \begin{array}{l} \vec{r}_0 = (1, 2, -1) \\ \vec{v} = [1, 5, 6] \end{array} \right\}$ ซึ่งก็คือสมการเชิงเส้นของเส้นตรง



Answer

Example 4 จงบรรยายลักษณะเส้นโค้งซึ่งนิยามด้วยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

$$\vec{r}(t) = 2 \cos(t) \vec{i} + \sin(t) \vec{j} + t \vec{k}$$

Solution สมการพาราเมตริกซ์ที่สมนัยคือ $x = 2 \cos(t), y = \sin(t), z = t$

เพราะว่าจากคุณสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\left(\frac{x^2}{2}\right) + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

ดังนั้นเส้นโค้งต้องตั้งอยู่บนผิวทรงกระบอก (Ellipse) $\left(\frac{x^2}{2}\right) + y^2 = 1$ เนื่องจาก $z = t$

ดังนั้นลักษณะเส้นโค้งจะเป็นเกลียวรอบผิวทรงกระบอกตามค่าของ $z = t$ ตามแกน z

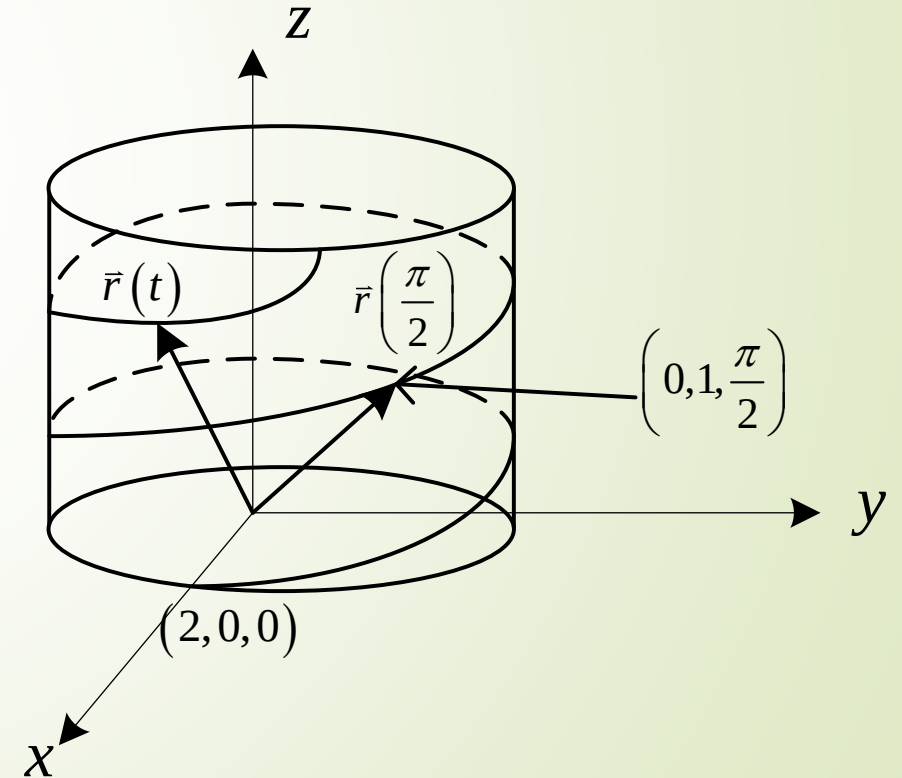
จะเรียกเส้นโค้งในลักษณะนี้ว่า เส้นโค้ง ฮีลิกซ์ (Helix) หรือเส้นเกลียว

Example 4 จงบรรยายลักษณะเส้นโค้งซึ่งนิยามด้วยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

แทนค่า $t = 0$ จะได้เวกเตอร์ $\vec{r}(0) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

แทนค่า $t = \frac{\pi}{2}$ จะได้เวกเตอร์ $\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + \frac{\pi}{2}\vec{k}$





อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

differential of vector functions

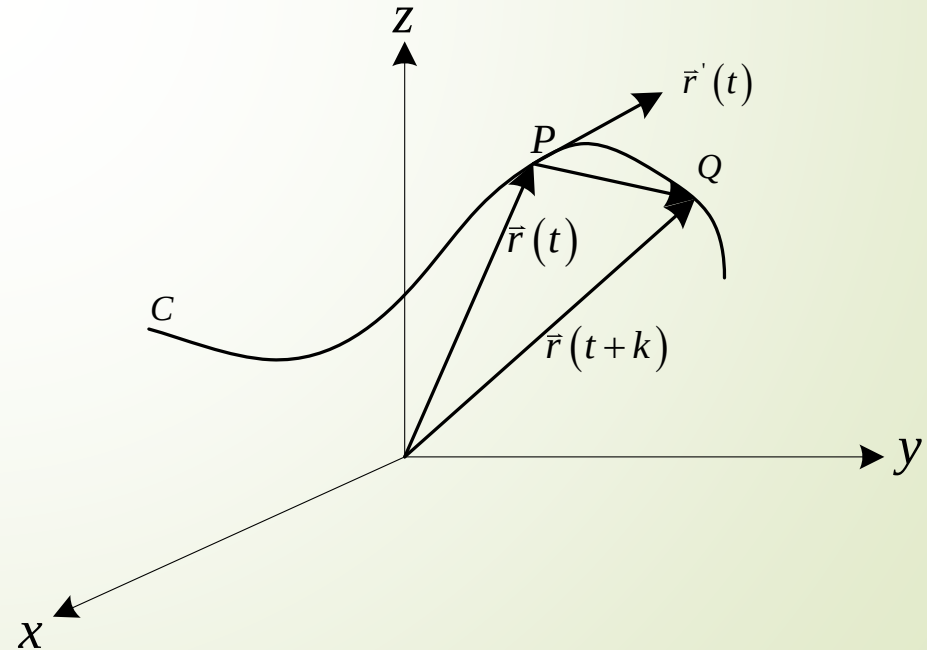
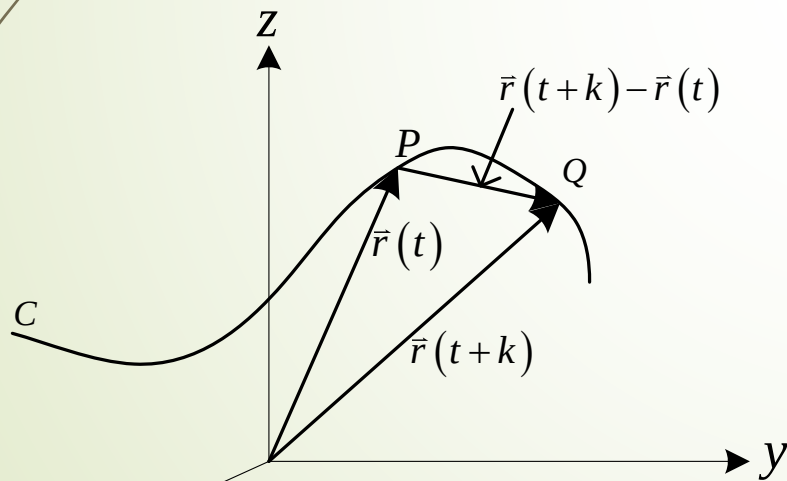


บทนิยาม 2.3

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\frac{d\vec{r}}{dt}$ หรือ $\vec{r}'(t)$ ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+k) - \vec{r}(t)}{k}$$

เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้ ความสัมพันธ์เชิงเรขาคณิตของบทนิยามนี้จะเป็นดังภาพ



อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

$\vec{r}(t)$ และ $\vec{r}(t+k)$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P และ Q ตามลำดับดังนี้

$$PQ = \vec{r}(t+k) - \vec{r}(t)$$

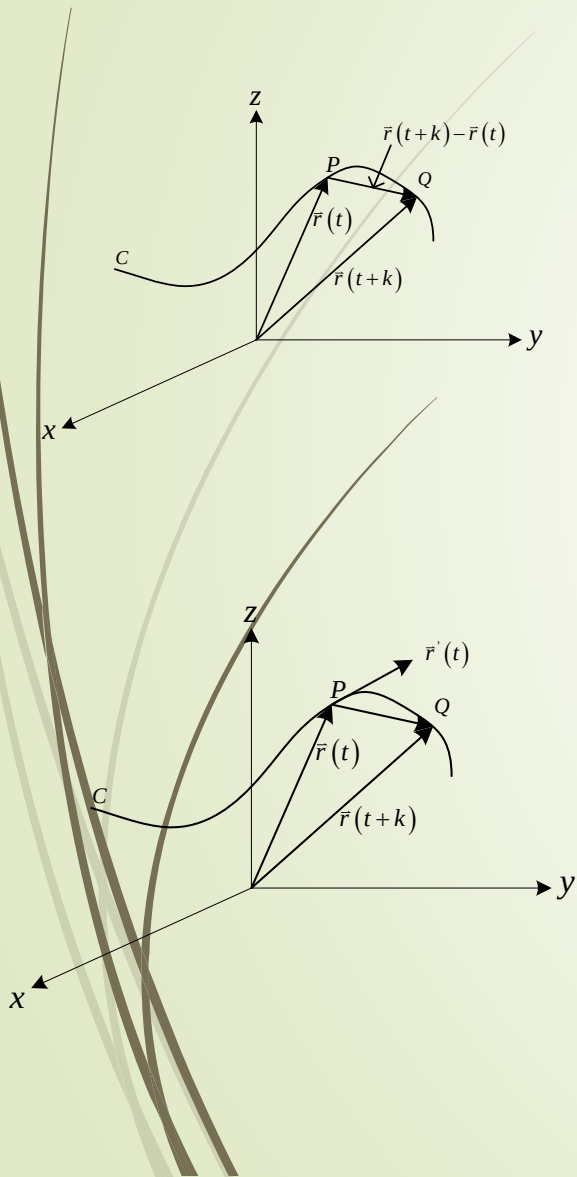
เวกเตอร์ $\frac{1}{k}(\vec{r}(t+k) - \vec{r}(t))$ ขนานกับ $\vec{r}(t+k) - \vec{r}(t)$ เมื่อ $k \rightarrow 0$ ทำให้

$\frac{1}{k}(\vec{r}(t+k) - \vec{r}(t))$ เข้าใกล้เวกเตอร์ซึ่งอยู่บนแนวของเส้นสัมผัสที่จุด P

เรียกเวกเตอร์ $\vec{r}'(t)$ ว่า **“เวกเตอร์สัมผัส (tangent vector)”** กับเส้นโค้ง C

เมื่อลิมิตหาค่าได้ และ $\vec{r}'(t)$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์แล้ว

$$T(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \longrightarrow \text{เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย}$$



Example 5 จงหาอนุพันธ์ของ $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$
และหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยเมื่อ $t = 0$

Solution หาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = (1+t^3)\vec{i} + (te^{-t})\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$

$$\text{จะได้ } \vec{r}'(t) = 3t^2\vec{i} + (1-t)e^{-t}\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k}$$

เมื่อ $t = 0$ แทนค่าจะได้ $\vec{r}(0) = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ และ $\vec{r}'(0) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k}$

ดังนั้นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่จุด $(1, 0, 0)$ คือ

$$T(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

Answer

Example 6 จงหา $\vec{r}'(t)$ และเขียนแผนภาพแสดง $\vec{r}(1)$ และ $\vec{r}'(1)$ เมื่อ

$$\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (2-t)\vec{j}$$

Solution

หาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (2-t)\vec{j}$

$$\text{จะได้ } \vec{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} - \vec{j}$$

$$\text{แทนค่า } t=1 \text{ จะได้ } \vec{r}'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}}\vec{i} - \vec{j} \longrightarrow \vec{r}'(1) = \frac{1}{2}\vec{i} - \vec{j}$$

สมการพาราเมตริกซ์ของเส้นโค้งที่กำหนดมาให้ในระนาบคือ

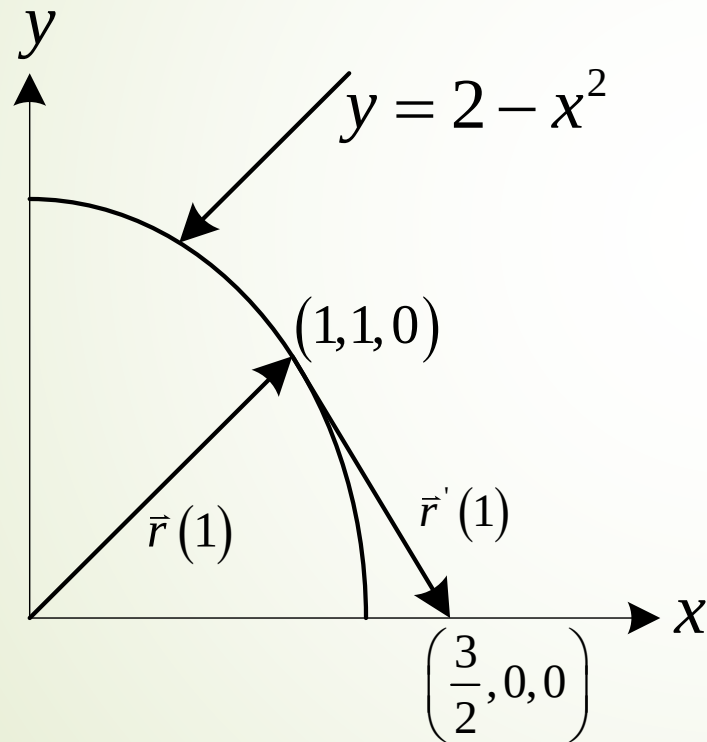
$$x = \sqrt{t}, y = 2-t, z = 0 \longrightarrow y = 2-x^2, x \geq 0$$

Example 6 จงหา $\vec{r}'(t)$ และเขียนแผนภาพแสดง $\vec{r}(1)$ และ $\vec{r}'(1)$ เมื่อ

$$\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (2-t)\vec{j}$$

$$\vec{r}(1) = \vec{i} + \vec{j}$$

และแสดง $\vec{r}'(1)$ ด้วยลูกศรที่มี
จุดเริ่มต้นที่ $(1,1,0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$



Answer

Example 7 จงแสดงว่าถ้า $\|\vec{r}(t)\| = c$ (ค่าคงที่) แล้ว $\vec{r}'(t)$ ตั้งฉากกับ $\vec{r}(t)$ สำหรับแต่ละค่าของ t ในโดเมนของ $\vec{r}$

Solution

พิสูจน์ เพราะว่า $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2$

ดังนั้น

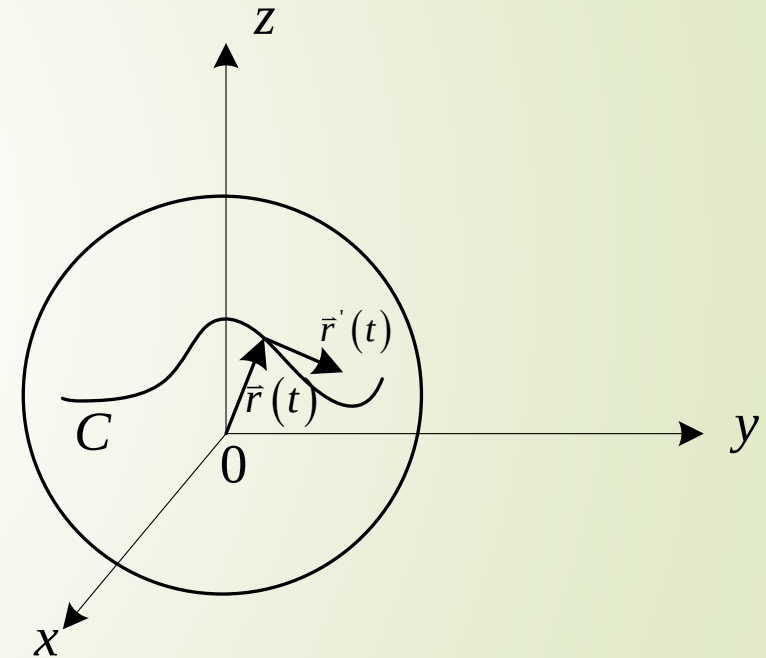
$$\frac{d}{dt}(c^2) = \frac{d}{dt}[\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)]$$

$$0 = \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

นั่นคือ $\vec{r}'(t)$ ตั้งฉากกับ $\vec{r}(t)$

Answer



***** ถ้าเส้นโค้ง C อยู่บนพื้นผิวทรงกลมแล้วเวกเตอร์สัมผัส $\vec{r}'(t)$ ย่อมตั้งฉากกับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}(t)$ เสมอ**



อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันเวกเตอร์

Limit Integral of vector functions

อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันเวกเตอร์

สามารถเขียนอินทิกรัลของ $\vec{r}$ ในรูปของอินทิกรัลส่วนประกอบ f, g, h ดังนี้

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b g(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \vec{k}$$

จากทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัสสำหรับฟังก์ชันค่าเวกเตอร์แบบต่อเนื่องคือ

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = [\vec{R}(t)]_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a)$$

เมื่อ $\vec{R}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $\vec{r}$ นั่นคือ $\vec{R}'(t) = \vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์ $\int \vec{r}(t) dt$

Example 8 ถ้า $\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 2t\vec{k}$ แล้วจงหาอินทิกรัลจำกัดเขต
ของ $\int \vec{r}(t) dt$

Solution

$$\int \vec{r}(t) dt = \left(\int 2\cos(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int \sin(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int 2t dt \right) \vec{k}$$

$$\int \vec{r}(t) dt = (2\sin(t))\vec{i} + (-\cos(t))\vec{j} + t^2\vec{k} + C \quad \text{เมื่อ } C \text{ คือ เวกเตอร์คงที่ใดๆ}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{r}(t) dt = \left[2\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + t^2\vec{k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{r}(t) dt = \left[2\vec{i} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k} \right] - [-\vec{j}]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{r}(t) dt = 2\vec{i} + \vec{j} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k}$$

Answer

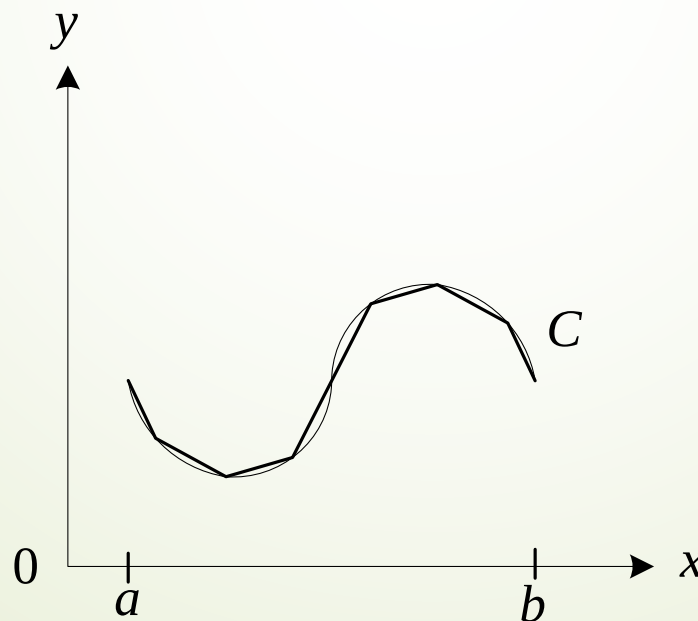
ความยาวส่วนโค้ง
curve length

ความยาวส่วนโค้ง

ในกรณีของเส้นโค้ง C ในระนาบซึ่งมีสมการพารามетริก $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ สำหรับ $a \leq t \leq b$

ความยาวส่วนโค้ง C มีนิยามเป็นลิมิตของโพลีกอน (Polygon) และคำนวณได้ดังนี้

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{เมื่อ } f'(t) \text{ และ } g'(t) \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง}$$



ความยาวส่วนโค้ง

การหาความยาวส่วนโค้งในปริภูมิสามมิติก็ใช้วิธีการเดียวกัน กล่าวคือ นิยามในรูปลิมิตของรูปหลายเหลี่ยมหรือพอลีกอน กำหนดให้สมการแบบเวกเตอร์ของเส้นโค้ง C ในปริภูมิคือ

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$$

ดังนั้น $\vec{r}'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$ สำหรับ $a \leq t \leq b$

เขียนในรูปสมการพารามетริกได้ดังนี้ $x = f(t)$ $y = g(t)$ $z = h(t)$

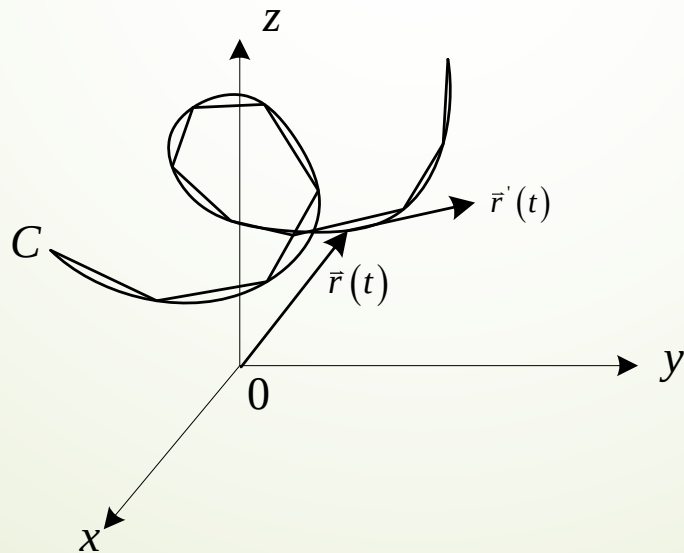
โดยที่ $f'(t)$ $g'(t)$ $h'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ความยาวส่วนโค้ง

สามารถคำนวณความยาวส่วนโค้ง C เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้นจาก a ไป b

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad \longrightarrow \quad L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$



Example 9 จงหาความยาวส่วนโค้งสี่เหลี่ยมวงกลมซึ่งมีสมการแบบเวกเตอร์ดังนี้

$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$ จากจุด $(1, 0, 0)$ ไปยังจุด $(1, 0, 2\pi)$

Solution เพราะว่า $\vec{r}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$

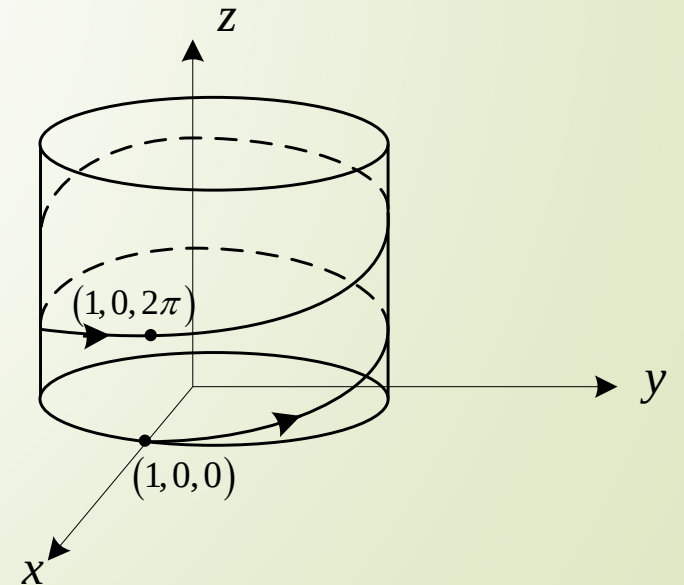
$$\text{จะได้ } \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} \longrightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$$

ส่วนของเส้นโค้งจากจุด $(1, 0, 0)$ ไปยังจุด $(1, 0, 2\pi)$ สมนัยกับค่าของ t จาก 0 ถึง 2π

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \quad \textbf{Answer}$$

แทนค่าจะได้



เส้นโค้งเรียบ

บทนิยามที่ 2.4 กล่าวว่า เส้นโค้ง C กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}'(t)$ บนช่วง I เป็นเส้นโค้งเรียบถ้า

1. $\vec{r}'(t)$ มีความต่อเนื่อง
2. $\vec{r}'(t) \neq 0$ สำหรับแต่ละ t ที่เป็นจุดภายใน I

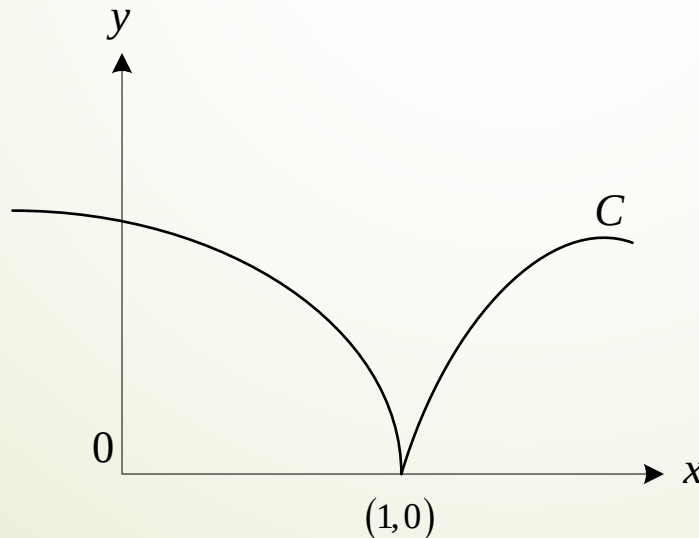
Example 10 สมการแบบเวกเตอร์ของเส้นโค้ง C ในระนาบคือ $\vec{r}(t) = (1+t^3, t^2)$

Solution เนื่องจาก $\vec{r}'(t) = (3t^2, 2t)$

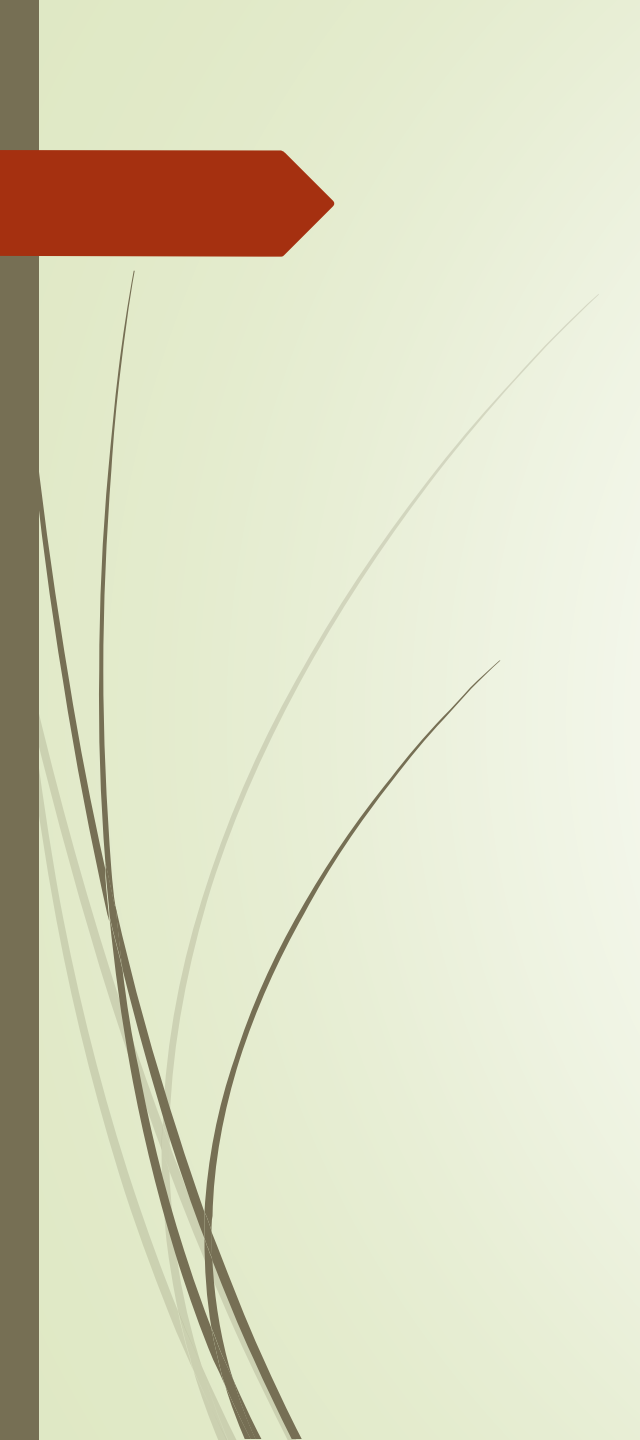
ดังนั้น $\vec{r}'(0) = (0, 0)$

จะได้ว่า จุดบนเส้นโค้งที่สมนัยกับ $t = 0$ คือ $(1, 0)$ ซึ่งมีลักษณะหักเป็นมุมแหลมวกกลับ (Cusp) กล่าวได้ว่า

เส้นโค้ง C ขาดความเรียบที่จุดนี้ $C: \vec{r}(t) = (1+t^3, t)$ หรือ $C: y = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



Answer

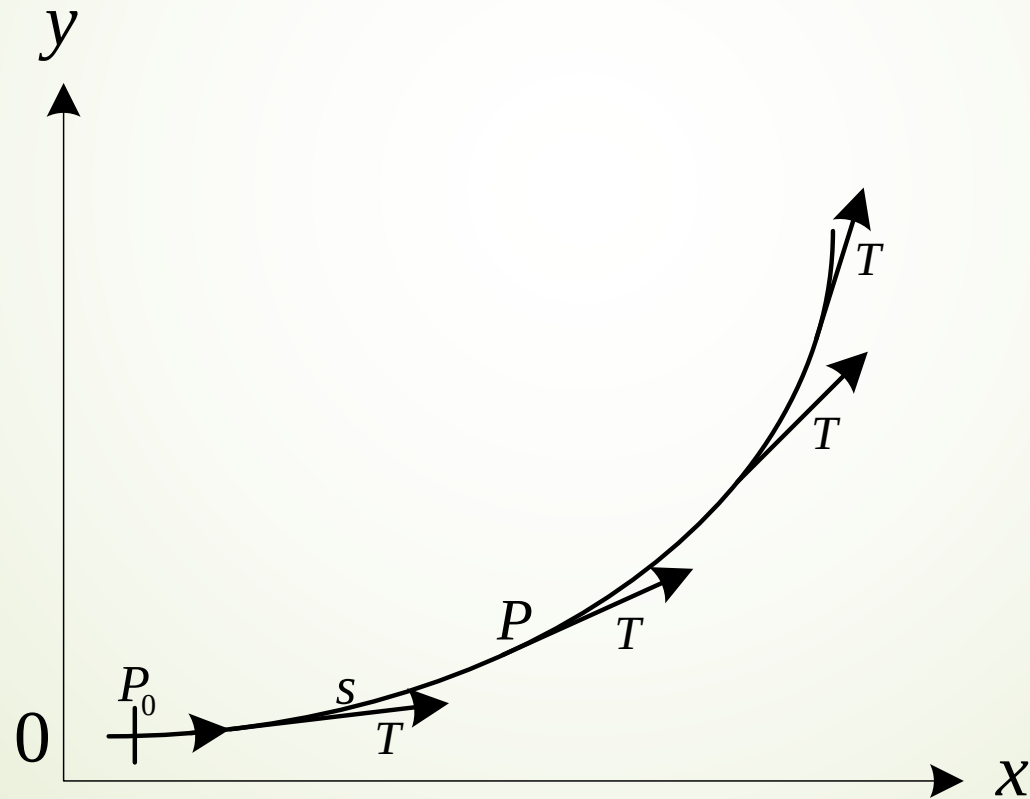


ความโค้ง **curvature**

ความโค้ง

การวัดความโค้งของเส้นโค้งจะวัดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของเส้นโค้งออกจากเส้นสัมผัส $T = \frac{dr}{ds}$

ค่าความโค้งจะใช้สัญลักษณ์ κ (Kappa)

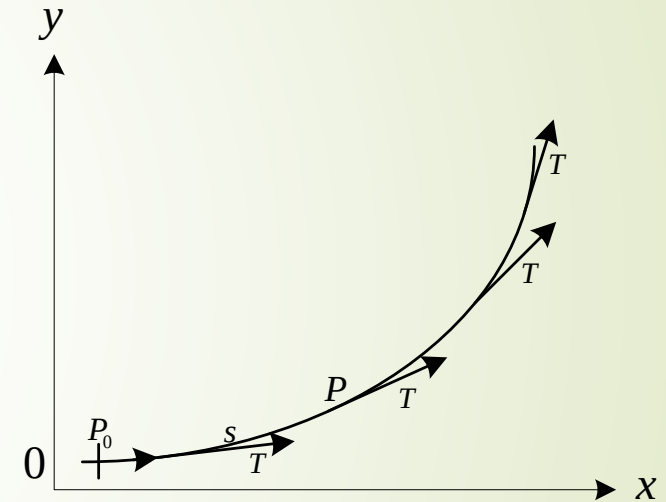


นิยาม

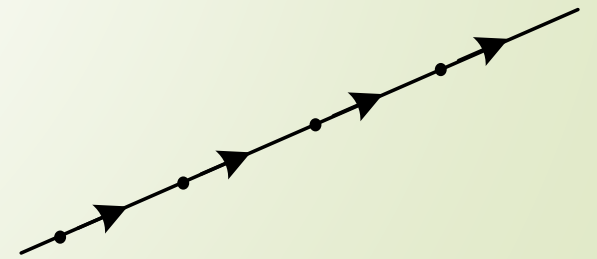
ถ้า T เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สัมผัสกับเส้นโค้งราบเรียบ ความโค้งของเส้นโค้งจะเท่ากับ

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

ถ้า $\left| \frac{dT}{ds} \right|$ มีค่ามาก หมายความว่า ที่จุด P นั้นมีความโค้งมาก



ถ้า $\left| \frac{dT}{ds} \right|$ มีค่าเป็นศูนย์ หมายความว่า ที่จุด P นั้นมีความโค้งเป็นศูนย์



ความโค้ง

สำหรับเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ เราสามารถหาความโค้งได้ดังนี้

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} \cdot \left| \frac{dT}{dt} \right| \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{|v|} \cdot \left| \frac{dT}{dt} \right|$$

ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งราบเรียบแล้ว ความโค้งหาได้จาก

$$\kappa = \frac{1}{|v|} \cdot \left| \frac{dT}{dt} \right| \quad \text{เมื่อ} \quad T = \frac{v}{|v|} \quad \text{คือเวกเตอร์สัมผัสขนาดหนึ่งหน่วย}$$

Example 11 จงแสดงว่าวงกลม a มีความโค้งเป็น $\frac{1}{a}$

Solution เส้นโค้งที่เป็นวงกลมรัศมี a คือ $\vec{r}(t) = (a \cos t)\vec{i} + (a \sin t)\vec{j}$

ดังนั้น $\vec{r}'(t) = \vec{v} = -(a \sin t)\vec{i} + (a \cos t)\vec{j}$

$$|\vec{r}'(t)| = |\vec{v}| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} \longrightarrow |\vec{r}'(t)| = |\vec{v}| = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

จะได้ว่า $T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -(\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$

$$\frac{dT}{dt} = -(\cos t)\vec{i} - (\sin t)\vec{j}$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

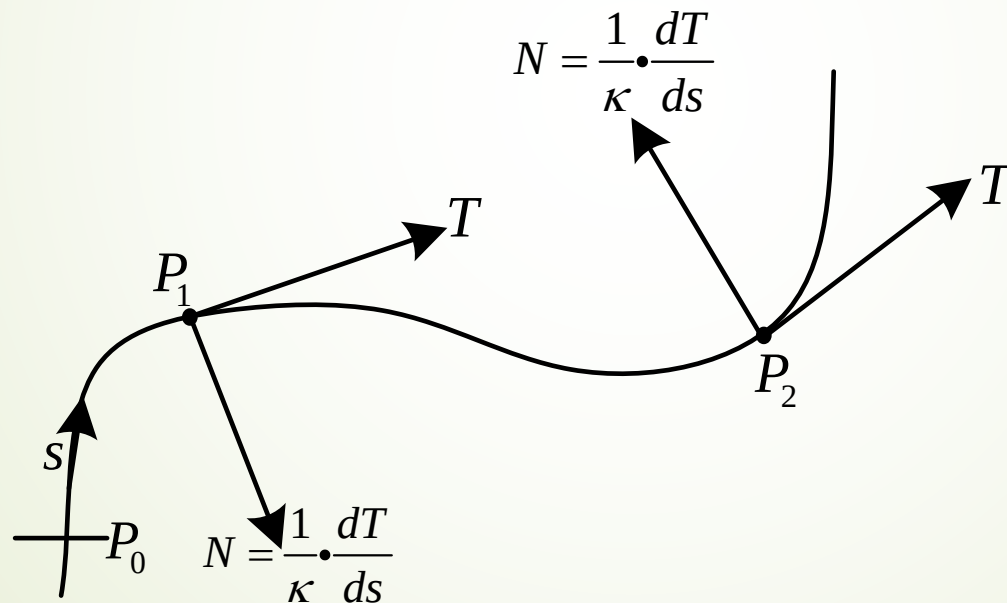
ดังนั้นค่าความโค้งจะเป็น $\kappa = \frac{1}{|v|} \cdot \left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a}$

Answer

ความโค้ง

พิจารณาเส้นโค้ง T ค่าอนุพันธ์ $\frac{dT}{ds}$ จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ T ถ้าหากหา $\frac{dT}{ds}$ ด้วย κ

จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย N ที่ตั้งฉากกับ T โดยที่ N นี้เรียกว่า **“เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย”**



นิยาม

ในจุดที่ κ ไม่เป็นศูนย์ เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งหาได้จาก $N = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dT}{ds}$

ถ้าหากมีเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ ใดๆ สามารถใช้กฎลูกโซ่หาเวกเตอร์ N ดังนี้

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left| \frac{dT}{ds} \right|} \xrightarrow{\text{กฎลูกโซ่}} N = \frac{\frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}}{\left| \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right|} \xrightarrow{\text{เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง}} N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|}$$

ถ้า $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งราบเรียบ เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยหาได้จาก

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|} \quad \text{เมื่อ} \quad T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย}$$

Example 12 จงหา T และ N จากการเคลื่อนที่ในแนววงกลม

Solution

ขั้นตอนแรกหา T จาก $\vec{r}'(t) = \vec{v} = -(2\sin 2t)\vec{i} + (2\cos 2t)\vec{j}$

และจาก $T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

แทนค่าจะได้ $T = \frac{-(2\sin 2t)\vec{i} + (2\cos 2t)\vec{j}}{2} \rightarrow T = -(\sin 2t)\vec{i} + (\cos 2t)\vec{j}$

ขั้นตอนที่สองหา N จาก $\frac{dT}{dt} = -(2\cos 2t)\vec{i} - (2\sin 2t)\vec{j}$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2$$

Example 12 จงหา T และ N จากการเคลื่อนที่ในแนววงกลม

$$\vec{r}(t) = (\cos 2t)\vec{i} + (\sin 2t)\vec{j}$$

และจาก $N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left| \frac{dT}{dt} \right|}$

แทนค่าจะได้ $N = \frac{-(2\cos 2t)\vec{i} - (2\sin 2t)\vec{j}}{2}$

$$N = -(\cos 2t)\vec{i} - (\sin 2t)\vec{j}$$

จะพบว่า $T \cdot N = 0$ นั้นหมายความว่า T ตั้งฉากกับ N

Answer



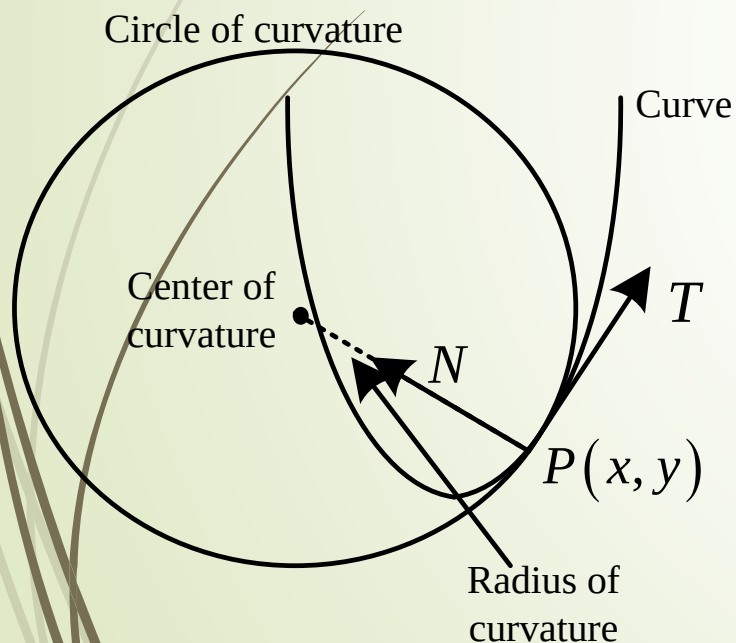
รัศมีความโค้ง

Radius of curvature

รัศมีความโค้ง

รัศมีความโค้งของส่วนโค้งมีสัญลักษณ์เป็น ρ คำนวณได้จาก

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$



วงกลมที่สัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด P ถ้าหากรัศมีของวงกลมเท่ากับรัศมี
ความโค้ง ณ จุดนั้นเรียกววงกลมนั้นว่า **“circle of curvature”** หรือ
“Osculating Circle”

Example 13 จงหา Osculating Circle ของกราฟพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุดกำเนิด

Solution เส้นทางของกราฟพาราโบลาคือ $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$

หาความโค้งของกราฟพาราโบลาที่จุดกำเนิดโดย $\vec{r}'(t) = \vec{v} = \vec{i} + 2t\vec{j} \longrightarrow |\vec{r}'(t)| = |\vec{v}| = \sqrt{1+4t^2}$

ดังนั้น
$$T = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (1+4t^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{i} + 2t(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{j}$$

คำนวณหาค่า $\frac{dT}{dt}$ จะได้
$$\frac{dT}{dt} = -4t(1+4t^2)^{-\frac{3}{2}} \vec{i} + \left[2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}} - 8t^2(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \vec{j}$$

ที่จุดเริ่มต้น $t = 0$ จะได้ความโค้งเป็น
$$\kappa(0) = \frac{1}{|\vec{v}(0)|} \cdot \left| \frac{dT}{dt}(0) \right|$$

Example 13 จงหา Osculating Circle ของกราฟพาราโบลา

$$y = x^2 \text{ ที่จุดกำเนิด}$$

Solution

$$\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot |0\vec{i} + 2\vec{j}|$$

$$\kappa(0) = 1 \cdot \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

รัศมีความโค้งคือ $\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}$ และวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ดังนั้นจะได้ Osculating circle คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$\text{แทนค่าจะได้} \quad (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Example 13 จงหา Osculating Circle ของกราฟพาราโบลา

$$y = x^2 \text{ ที่จุดกำเนิด}$$

Solution

$$\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot |0\vec{i} + 2\vec{j}|$$

$$\kappa(0) = 1 \cdot \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

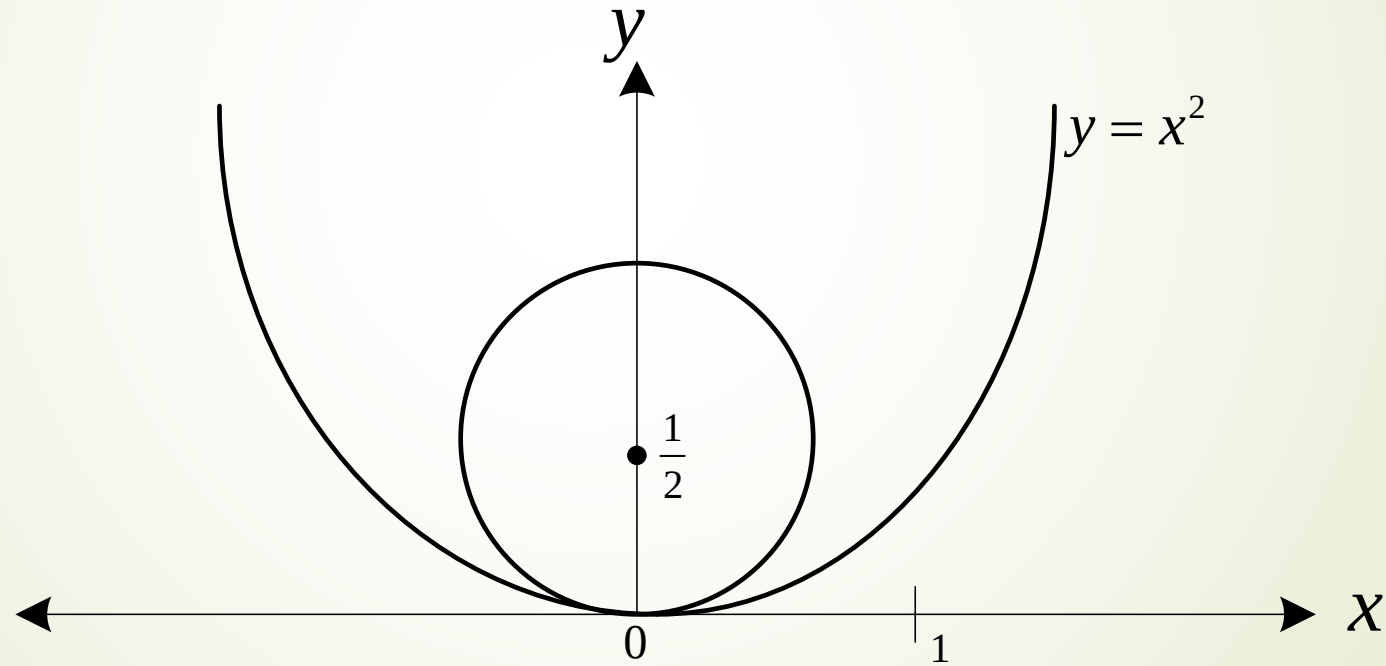
รัศมีความโค้งคือ $\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}$ และวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

ดังนั้นจะได้ Osculating circle คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

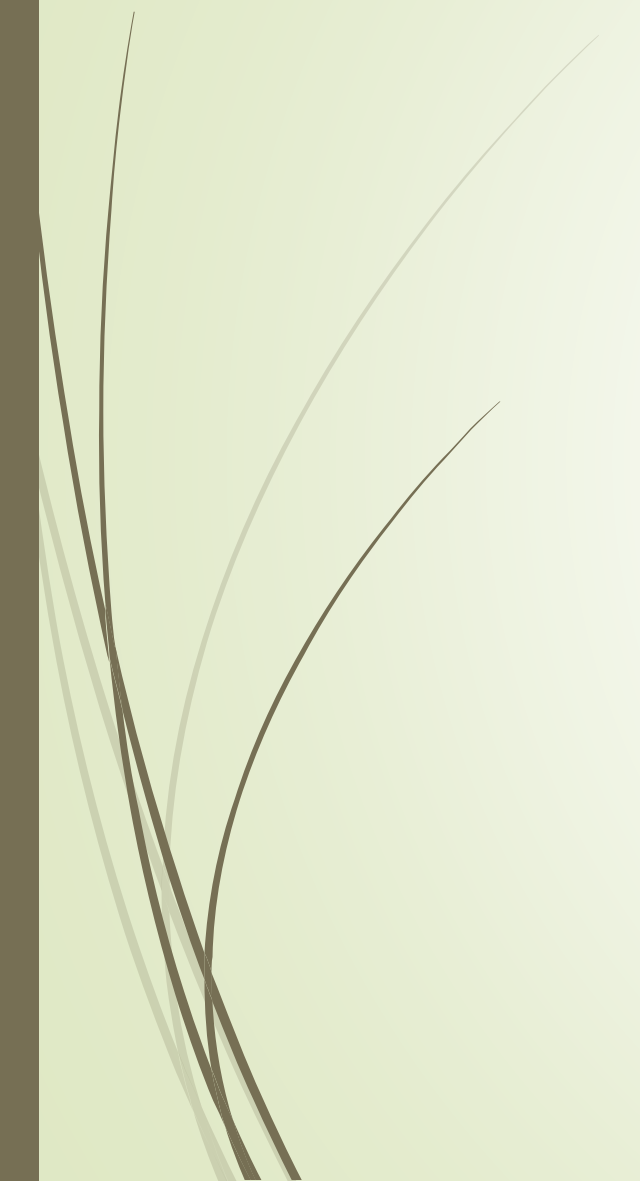
$$\text{แทนค่าจะได้ } (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{หรือ}} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Example 13 จงหา Osculating Circle ของกราฟพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุดกำเนิด

Solution



Answer



The End