

บทที่ 3

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า กฎของเกาส์ และไดเวอร์เจนซ์

Electric Flux Density, Gauss's Law and Divergence

Arnon Isaramongkolrak

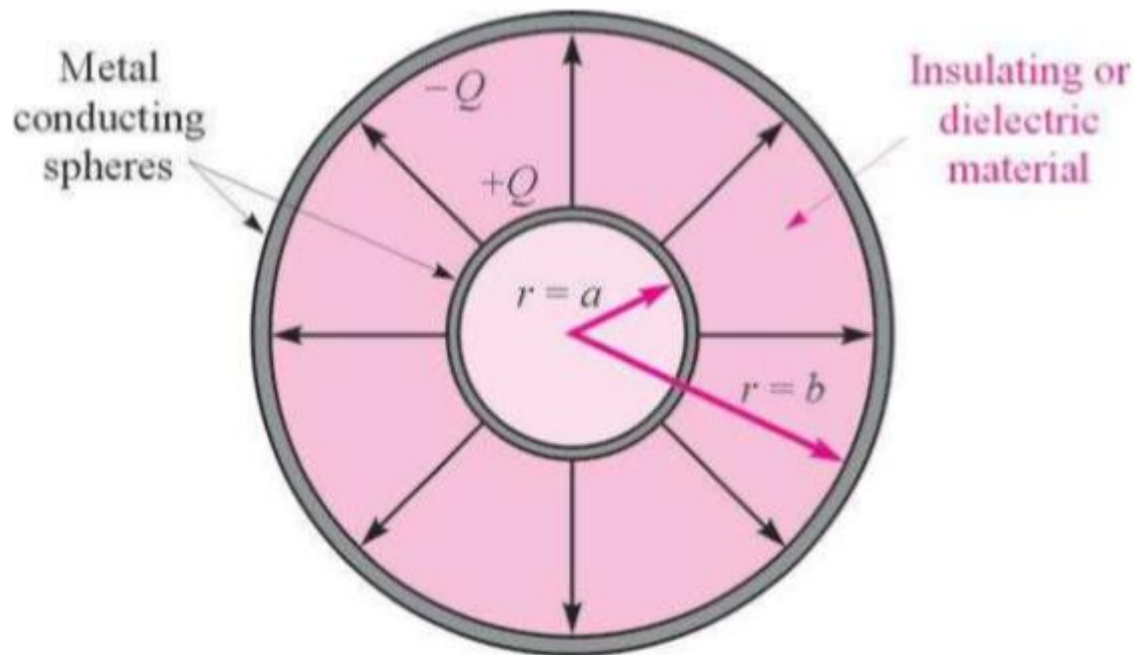
Department of Electrical Engineering
Nakhon pathom Rajabhat University

หัวข้อการบรรยาย

- ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า
- กฎของเกาส์
- การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร
- ไคเวอร์เจนซ์ และสมการลำดับที่ 1 ของแมกซ์เวลล์
- เวกเตอร์โอเปอเรเตอร์เดลและทฤษฎีไคเวอร์เจนซ์

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

- ไมเคิล ฟาราเดย์ ได้ทำการทดลองนำโลหะ (ตัวนำไฟฟ้า) รูปทรงกลมกลวงที่มีรัศมีต่างกัน 2 ลูก (พื้นที่ทรงกลม $4\pi r^2$) โดยทรงกลมลูกเล็กจะซ้อนอยู่ในทรงกลมลูกใหญ่ซึ่งมีวัสดุฉนวนไฟฟ้าคั่น แล้วปล่อยประจุไฟฟ้าบวกจำนวนหนึ่งตรงบริเวณผิวของทรงกลมลูกเล็ก



ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

จากการทดลองของฟาราเดย์ ปรากฏว่า ประจุไฟฟ้าบวกที่ผิวของทรงกลมลูกเล็ก($r = a$)ทำให้เกิดประจุไฟฟ้าลบที่ผิวของทรงกลมลูกใหญ่ ($r = b$) โดยประจุไฟฟ้าลบที่เกิดขึ้นนั้นมีขนาดเท่ากับประจุไฟฟ้าบวก เพราะมีเส้นฟลักซ์ไฟฟ้าพุ่งออกจากผิวของทรงกลมลูกเล็กไปยังลูกใหญ่ และยังพบว่าจำนวนของประจุไฟฟ้าบวก ($+Q$) ที่ผิวของทรงกลมลูกเล็กจะมีค่าเท่ากับจำนวนของฟลักซ์ไฟฟ้า (ψ) ที่พุ่งกระจายออกอย่างสมมาตร

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

$$\psi = Q$$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (D) ที่อยู่บนผิวของทรงกลมลูกเล็ก ($r = a$) หาได้จาก จำนวนฟลักซ์ที่พุ่งตัดผ่านพื้นผิวในลักษณะตั้งฉากหารด้วยพื้นที่ผิวนั้น

$$D = \frac{\psi}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r$$

ทำนองเดียวกัน D ที่อยู่บนผิวของทรงกลมลูกใหญ่ ($r = b$) ก็หาได้จาก

$$D = \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r$$

และ D ที่อยู่ตรงระยะ r ซึ่ง $a \leq r \leq b$ จึงหาได้จาก

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

ถ้าลดขนาดของทรงกลมวงในให้ลดลงเรื่อยๆ จนกลายเป็นจุด แต่ให้ยังคงมีประจุไฟฟ้า Q อยู่เท่าเดิม ค่า D ที่จุด r เมตร จากประจุไฟฟ้าเป็นจุด หาได้จาก

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} a_r$$

จะได้ความสัมพันธ์ของ D และ E ซึ่งมีทิศทางไปในทางเดียวกันคือ

$$D = \epsilon E$$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า

ในกรณีหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นปริมาตรจะได้

$$\mathbf{E} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r$$

สามารถหาค่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นปริมาตรได้ดังนี้

$$\mathbf{D} = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ประจุเป็นจุดขนาด $60\mu C$ อยู่ที่จุดกำเนิด จงหาฟลักซ์ไฟฟ้า ψ ซึ่งผ่าน

- 1) ส่วนของทรงกลมที่มีรัศมี $r = 26cm$ ซึ่งอยู่ในขอบเขต $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$
- 2) พื้นที่ผิวปิด ซึ่งมี $\rho = 26cm$ และ $z = \pm 26cm$
- 3) ระนาบ $z = 26cm$

วิธีทำ 1) จากขอบเขตของ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ที่โจทย์ให้มา ทำให้ทราบว่าทรงกลมมีพื้นที่ผิวเพียง 1 ใน 4 ของครึ่งทรงกลมซีกบนหรือ 1 ใน 8 ของทรงกลมทั้งหมด และทราบว่าเส้นฟลักซ์ไฟฟ้าจะต้องพุ่งกระจายออกอย่างสมมาตรจากประจุเป็นจุดนั้น ซึ่งโจทย์กำหนดประจุเป็นจุดขนาด $60\mu C$ อยู่ที่จุดกำเนิดมาให้ ทำให้ง่ายต่อการจินตนาการถึงปริมาณของเส้นฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งกระจายออกอย่างสมมาตร โดยข้อนี้มีพื้นที่ขอบเขตเป็น 1 ใน 8 ของฟลักซ์ไฟฟ้าที่กระจายออกอย่างสมมาตรทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ประจุเป็นจุดขนาด $60\mu C$ อยู่ที่จุดกำเนิด
จงหาฟลักซ์ไฟฟ้า ψ ซึ่งผ่าน

วิธีทำ

$$\psi = \frac{Q}{8} = \frac{60\mu C}{8} = 7.5\mu C$$

*** จากโจทย์ข้อนี้ จะสังเกตเห็นว่า ค่าฟลักซ์ไฟฟ้าไม่ได้ขึ้นอยู่กับรัศมีของทรงกลม

2) พื้นที่ผิวปิด ซึ่งมี $\rho = 26cm$ และ $z = \pm 26cm$

เนื่องจากข้อนี้เป็นพื้นที่ผิวปิด ปริมาณของฟลักซ์ไฟฟ้าที่ปรากฏทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ
ประจุไฟฟ้านั้น

$$\psi = Q = 60\mu C$$

3) ระนาบ $z = 26cm$

เนื่องจากข้อนี้ระนาบมีค่าอนันต์ จึงมีพื้นที่ขอบเขตเป็นครึ่งหนึ่งของฟลักซ์ไฟฟ้าที่กระจาย
อย่างสมมาตรทั้งหมด (มีเฉพาะระนาบบวกด้านบน)

$$\psi = \frac{Q}{2} = \frac{60\mu C}{2} = 30\mu C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา D ในพิกัดฉากที่จุด $P(2, -3, 6)$ เมื่อ

1) มีประจุเป็นจุดมีค่า $55mC$ ที่ $(-2, 3, -6)$

2) มีประจุเป็นเส้นวางตัวบนแกน x โดยมี $\rho_L = 20mC/m$

3) มีประจุเป็นแผ่นวางตัวอยู่ในระนาบ $z = -5m$ โดยมี $\rho_s = 120\mu C/m^2$

วิธีทำ

$$1). \quad \mathbf{r} = 4\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r = \frac{55 \times 10^{-3}}{4\pi (14)^2} \cdot \left[\frac{4\mathbf{a}_x - 6\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z}{14} \right]$$

$$\mathbf{D} = 6.38\mathbf{a}_x - 9.57\mathbf{a}_y + 19.14\mathbf{a}_z \mu C/m^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา D ในพิกัดฉากที่จุด $P(2, -3, 6)$ เมื่อ

- 1) มีประจุเป็นจุดมีค่า $55mC$ ที่ $(-2, 3, -6)$
- 2) มีประจุเป็นเส้นวางตัวบนแกน x โดยมี $\rho_L = 20mC/m$
- 3) มีประจุเป็นแผ่นวางตัวอยู่ในระนาบ $z = -5m$ โดยมี $\rho_s = 120\mu C/m^2$

วิธีทำ 2). เนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้า E จะปรากฏเฉพาะทิศทางของรัศมีรอบแกน x หรือก็คือจะปรากฏในทิศทางของรัศมี r เท่านั้น ซึ่งก็คือส่วนประกอบ y และ z ในระบบพิกัดฉากนั่นเอง

$$r = -3a_y + 6a_z \quad \longrightarrow \quad |r| = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$D = \epsilon E = \frac{\rho_L}{2\pi r} a_r = \frac{20 \times 10^{-3}}{2\pi \sqrt{45}} \cdot \left[\frac{-3a_y + 6a_z}{\sqrt{45}} \right]$$

$$D = -212.2a_y + 424.4a_z \mu C/m^2$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา D ในพิกัดฉากที่จุด $P(2, -3, 6)$ เมื่อ

- 1) มีประจุเป็นจุดมีค่า $55mC$ ที่ $(-2, 3, -6)$
- 2) มีประจุเป็นเส้นวางตัวบนแกน x โดยมี $\rho_L = 20mC/m$
- 3) มีประจุเป็นแผ่นวางตัวอยู่ในระนาบ $z = -5m$ โดยมี $\rho_s = 120\mu C/m^2$

วิธีทำ 3). D ที่เกิดจากประจุเป็นแผ่นหาได้จาก

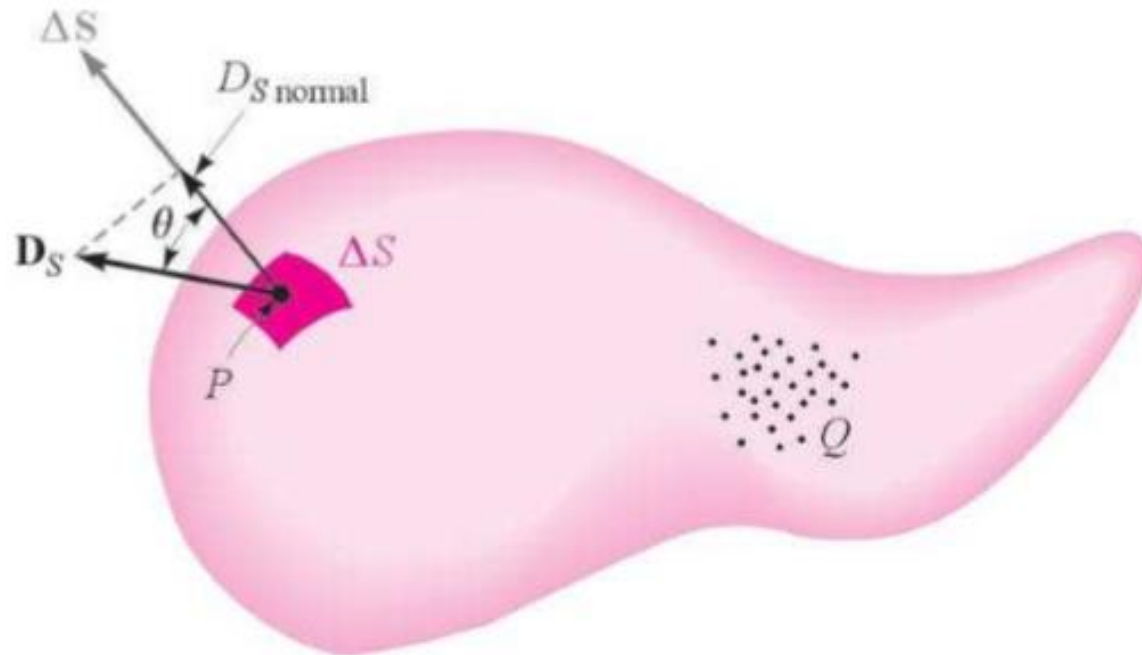
$$D = \epsilon E = \frac{\rho_s}{2} a_N = \frac{\rho_s}{2} \cdot a_z$$

เนื่องจาก E จะมีทิศทางพุ่งออกจากแผ่นไปสู่จุด P ดังนั้นจึงได้ E ไปในทิศทาง $+a_z$

$$D = \frac{120\mu C}{2} a_z = 60a_z \mu C/m^2$$

กฎของเกาส์

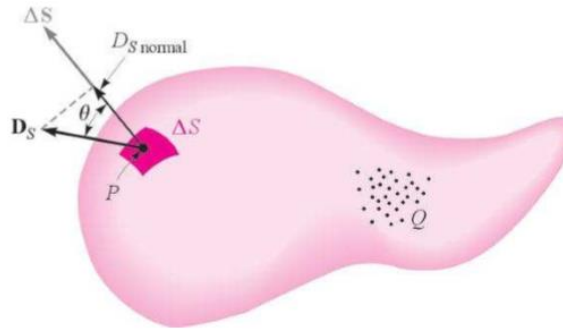
กฎของเกาส์ กล่าวว่า “ ฟลักซ์ไฟฟ้ารวม ψ ที่ไหลทะลุผ่านตลอดพื้นผิวปิดจะเท่ากับประจุรวม Q ที่ถูกพื้นผิวปิดคลุมไว้”



ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า D_S ที่จุด P ที่เกิดจากประจุ Q สามารถหาได้โดย

$$\Delta\psi = \text{ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่าน } \Delta S = D_{S,normal} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = D_S \cdot \Delta S$$

กฎของเกาส์



ฟลักซ์ไฟฟ้ารวมที่ไหลทะลุผ่านตลอดพื้นผิวปิด (ในลักษณะใดก็ตาม) จะได้เป็น

$$\psi = \int d\psi = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{charge enclosed} = Q$$

พื้นที่ผิวปิดนี้ บ่อยครั้งจะถูกเรียกว่า พื้นผิวแบบเกาส์ ประจุที่อยู่ในผิวปิดอาจเป็นได้ทั้ง

ประจุเป็นกลุ่ม $\longrightarrow Q = \sum Q_n$

ประจุเป็นแผ่น $\longrightarrow Q = \int_S \rho_s dS$

ประจุเป็นเส้น $\longrightarrow Q = \int \rho_L dL$

ประจุเป็นปริมาตร $\longrightarrow Q = \int_{vol} \rho_v dv$

ซึ่งประจุเป็นปริมาตรจะพบบ่อยครั้ง ดังนั้นกฎของเกาส์อาจเขียนอยู่ในรูปดังนี้

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho_v dv$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า $D = 0.3r^3 \mathbf{a}_r$ nC/m² ใน
อวกาศว่าง จงหา

1) E ที่จุด $P(r = 2, \theta = 25^\circ, \phi = 90^\circ)$

วิธีทำ

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{0.3 \times 2^2 \times 10^{-9}}{\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \mathbf{a}_r = 135.5 \mathbf{a}_r \text{ V/m}$$

2) จงหาประจุทั้งหมด Q ที่อยู่ในทรงกลม $r = 3$

วิธีทำ จาก $D = 0.3r^3 \mathbf{a}_r$ และ $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$

จะได้ $Q = \oint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 0.3(3)^2 (3)^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า $D = 0.3r^3 \mathbf{a}_r \text{ nC/m}^2$ ใน
อวกาศว่าง จงหา

$$Q = 0.3(9)(9)(2)(2\pi)$$

$$Q = 305.36 \text{ nC}$$

3) จงหาฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมด ψ ที่พุ่งออกจากทรงกลม $r = 4$

วิธีทำ ทราบว่า $\psi = Q$ จะได้ว่า

$$\psi = 0.3(16)(16)(2)(2\pi)$$

$$\psi = 965 \text{ nC}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงคำนวณพลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมด ψ ที่พุ่งออกจากพื้นผิวลูกบาศก์ที่เกิดจากการฟอร์มของระนาบทั้ง 6 ซึ่งประกอบด้วย $x, y, z = \pm 5$ ในกรณีนี้ที่

1) ประจุกระจายตัวเป็นแบบกลุ่ม ซึ่งมี 2 จุดคือ $0.1 \mu C$ ที่ $(1, -2, 3)$ และ $\frac{1}{7} \mu C$ ที่ $(-1, 2, -2)$

วิธีทำ ทราบว่า $\psi = Q$ กรณีประจุเป็นกลุ่มอยู่ภายในลูกบาศก์ผิวปิดจะได้

$$Q = \sum Q_n = 0.1 + \frac{1}{7} = 0.243 \mu C$$

2) ประจุกระจายตัวเป็นแบบเส้น ซึ่งมี $\rho_L = \pi \mu C/m$ ที่ $x = -2, y = 3$

วิธีทำ กรณีประจุเป็นแบบเส้น จะได้ว่า $Q = \int \rho_L dL$

$$Q = \int_{-5}^5 \pi dz \quad \text{เพราะวางตัวเป็นเส้นอยู่ภายในลูกบาศก์ผิวปิดขนานแกน } z$$

$$Q = 10\pi \mu C = 31.4 \mu C$$

ตัวอย่างที่ 4 จงคำนวณฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมด ψ ที่พุ่งออกจากพื้นผิวลูกบาศก์ที่เกิดจากการฟอร์มของระนาบทั้ง 6 ซึ่งประกอบด้วย $x, y, z = \pm 5$ ในกรณีที่

3) ประจุกระจายตัวเป็นแบบแผ่น ซึ่งมี $\rho_s = 0.1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ บนระนาบ $y = 3x$

วิธีทำ ระนาบ $y = 3x$ แสดงว่า แผ่นวางตัวในแนวเอียง (ลองพล็อตกราฟตามฟังก์ชัน $y = 3x$ จะทำให้ทราบการวางตัวของแผ่นแบบคร่าวๆ ได้ ซึ่งแนวเอียงนี้จะมีความยาวเป็น 1.054 เท่าของแกน y)

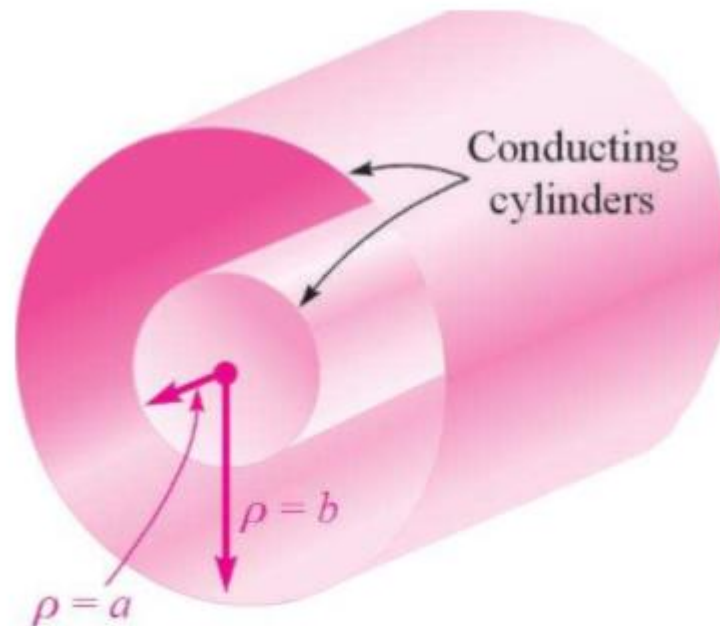
กรณีประจุเป็นแบบแผ่น จะได้ว่า $Q = \int_S \rho_s dS$

$$Q = \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 0.1(1.054 dy) dz$$

$$Q = 0.1 \times 1.054 \times 100 = 10.54 \mu\text{C}$$

การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร

ในหัวข้อนี้จะขอยกตัวอย่างเฉพาะกรณีปัญหาสายโคแอกเซียลเคเบิลรูปทรงกระบอกที่มีความยาว L และพื้นผิวมีการกระจายประจุอย่างสมมาตร ซึ่งประกอบด้วยสายตัวนำด้านในที่มีรัศมี $\rho = a$ และสายตัวนำด้านนอกมีรัศมี $\rho = b$ ซึ่งมีฉนวนคั่นระหว่างคู่สาย และบนผิวด้านนอกสายตัวนำด้านในมีความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าเท่ากับ ρ_s



การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร

จากกฎของเกาส์

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

ในกรณีที่พื้นผิวมีการกระจายประจุอย่างสมมาตร จะทำให้ทราบว่า $\mathbf{D}_S$ มีค่าคงที่ที่ทุกๆ จุดบนพื้นผิว จึงสามารถนำเทอม $\mathbf{D}_S$ ออกมาจากเครื่องหมายอินทิเกรตได้ จะได้

$$Q = \mathbf{D}_S \oint_S 1 dS$$

$$Q = \mathbf{D}_S \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho d\phi dz$$

$$Q = \mathbf{D}_S 2\pi\rho L$$

การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร

และจาก
$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

สามารถหาประจุทั้งหมดตลอดความยาว L ของสายตัวนำด้านใน $\rho = a$ ได้ดังนี้

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_s a d\phi dz = 2\pi a L \rho_s$$

เปรียบเทียบสมการ

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} \quad \longleftrightarrow \quad Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_s a d\phi dz = 2\pi a L \rho_s$$

จะได้
$$\mathbf{D}_S = \frac{a\rho_s}{\rho} \quad \text{ซึ่ง } (a < \rho < b)$$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่จุดใดๆ ในรูปเวกเตอร์ของสายเคเบิลสามารถหาได้เป็น

$$\mathbf{D} = \frac{a\rho_s}{\rho} \mathbf{a}_\rho$$

การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร

หรือเขียน ρ_S ของสายตัวนำด้านในให้อยู่ในรูป ρ_L ได้คือ $\rho_L = 2\pi a \rho_S$

จะได้ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่จุดใดๆ ของสายเคเบิลเป็น

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_\rho$$

กรณีประจุเป็นเส้นยาวอนันต์ (L ยาวมากเมื่อเทียบกับรัศมี b)

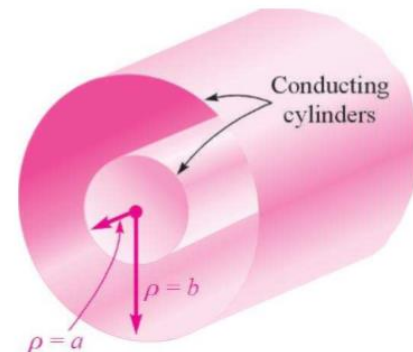
เส้นฟลักซ์ไฟฟ้าจะเริ่มต้นจากผิวของสายตัวนำด้านในแล้วพุ่งออกไปในทิศทางของ a_ρ

ไปสิ้นสุดที่ผิวด้านในของสายตัวนำด้านนอกที่มีประจุไฟฟ้าลบอยู่ จะได้ว่า

$$Q_{\text{ทรงกระบอกชั้นนอก}} = -2\pi a L \rho_S, \text{ ทรงกระบอกชั้นใน}$$

$$2\pi b L \rho_S, \text{ ทรงกระบอกชั้นนอก} = -2\pi a L \rho_S, \text{ ทรงกระบอกชั้นใน}$$

$$\rho_S, \text{ ทรงกระบอกชั้นนอก} = -\frac{a}{b} \rho_S, \text{ ทรงกระบอกชั้นใน}$$



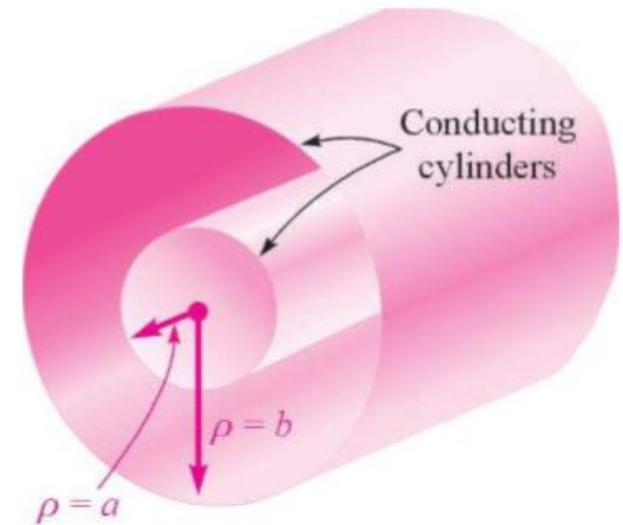
การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์กับประจุที่มีการกระจายอย่างสมมาตร

กรณีถ้ามีพื้นที่ผิวแบบเกาส์ที่ $\rho > b$

ประจุทั้งหมดที่อยู่ภายในจะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากมีประจุไฟฟ้าขนาดเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามบนผิวของแต่ละตัวนำ ดังนั้น

$$0 = D_S 2\pi\rho L \quad (\rho > b)$$

$$D_S = 0 \quad (\rho > b)$$



และจะมีผลในการทำงานเดียวกันที่ $\rho < a$ ดังนั้นสายโคแอกเชียลเคเบิลจะไม่ปรากฏสนามไฟฟ้าอยู่ภายนอก และจะไม่ปรากฏสนามไฟฟ้าภายในแกนของตัวนำชั้นในเช่นกัน ซึ่งโครงสร้างในลักษณะเช่นนี้จะช่วยป้องกันการรบกวนทางสนามไฟฟ้าได้

ตัวอย่างที่ 5 สายโคแอกเชียลเคเบิลยาว 50 เซนติเมตร มีรัศมีชั้นนอก 4 มิลลิเมตร โดยมีอากาศคั่นกลางระหว่างตัวนำทั้งสอง ประจุทั้งหมดที่อยู่ตรงผิวของตัวนำชั้นในมีค่า 30 nC จงหาค่าความหนาแน่นประจุบนผิวของตัวนำแต่ละชั้น พร้อมทั้งหาค่า E และ D

วิธีทำ ทราบว่า $\rho_{s, \text{ตัวนำชั้นใน}} = \frac{Q_{\text{ตัวนำชั้นใน}}}{2\pi aL}$

$$= \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi (10^{-3})(0.5)} = 9.55 \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

ตัวนำชั้นนอกย่อมมีขนาดของประจุเท่ากับตัวนำชั้นในแต่มีประจุเป็นลบ จึงได้

$$\rho_{s, \text{ตัวนำชั้นนอก}} = \frac{Q_{\text{ตัวนำชั้นนอก}}}{2\pi bL}$$
$$= \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi (4 \times 10^{-3})(0.5)} = -2.39 \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

ตัวอย่างที่ 5 สายโคแอกเชียลเคเบิลยาว 50 เซนติเมตร มีรัศมีชั้นนอก 4 มิลลิเมตร โดยมีอากาศคั่นกลางระหว่างตัวนำทั้งสอง ประจุทั้งหมดที่อยู่ตรงผิวของตัวนำชั้นในมีค่า 30 nC จงหาค่าความหนาแน่นประจุบนผิวของตัวนำแต่ละชั้น พร้อมทั้งหาค่า E และ D

วิธีทำ D และ E ที่จุดใดๆ ของสายเคเบิลคำนวณได้จาก

$$D = \frac{a\rho_s}{\rho} a_\rho = \frac{(10^{-3})(9.55 \times 10^{-6})}{\rho} a_\rho = \frac{9.55}{\rho} a_\rho \text{ nC/m}^2$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{9.55 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12} \rho} a_\rho = \frac{1079}{\rho} a_\rho \text{ V/m}$$

จาก D และ E ที่ได้นั้น จะใช้ภายในบริเวณ $1 < \rho < 4$ สำหรับ $\rho < 1$ หรือ $\rho > 4$

ทั้งค่า D และ E มีค่าเป็นศูนย์

ไดเวอร์เจนซ์และสมการลำดับที่ 1 ของแมกซ์เวลล์

ไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ใดๆ จะมีผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งเป็นได้ทั้งค่าบวกและลบ

ไดเวอร์เจนซ์ของความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (divD) หมายถึง จำนวนของฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งออกจากผิวย่อยปิดต่อหน่วยปริมาตร เมื่อปริมาตรหดลงจนมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งแทนได้ด้วย

ในระบบพิกัดฉาก

$$\text{divD} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

สมการนี้เป็นการตั้งต้นสมการด้วยการประมาณค่าโดยการประยุกต์ใช้กฎของเกาส์ ซึ่งสมการจะมีความถูกต้องมากขึ้นเมื่อ Δv มีขนาดเล็กลงจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ซึ่งเมื่อหาขีดจำกัดเข้าใกล้ศูนย์จะได้

$$\text{divD} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

ไดเวอร์เจนซ์และสมการลำดับที่ 1 ของแมกซ์เวลล์

$$\text{div} \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

จะเห็นได้ว่า เทอมสุดท้ายนั่นคือ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร จะได้

$$\text{div} \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \rho_v$$

โดยสมการ $\text{div} \mathbf{D} = \rho_v$ เป็นสมการลำดับที่ 1 จากทั้งหมด 4 สมการของแมกซ์เวลล์ที่

ใช้สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต โดยกล่าวว่า **“ฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งออกต่อหน่วย ปริมาตรขนาดเล็กมากจนเป็นจุดนั้น จะเท่ากับ ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตร ณ จุดนั้น”**

ไดเวอร์เจนซ์และสมการลำดับที่ 1 ของแมกซ์เวลล์

ในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\text{div} \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

ในระบบพิกัดทรงกลม

$$\text{div} \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

โอเปอเรเตอร์ไดเวอร์เจนซ์ ไม่ได้จำกัดอยู่เพียงการใช้กับความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าแต่เพียงอย่างเดียวเท่านั้น ยังสามารถนำไปใช้กับสนามเวกเตอร์ใดๆ ก็ได้

ตัวอย่างที่ 6 จงประมาณค่าประจุที่อยู่ในปริมาตรขนาด $10^{-9} m^3$ วางตัว
อยู่ที่จุดกำเนิด โดย $D = e^{-x} \sin y a_x - e^{-x} \cos y a_y + 2z a_z \text{ C/m}^2$

วิธีทำ จากสูตรการประมาณค่า

$$\text{div} D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \frac{Q}{\Delta v} \quad \longrightarrow \quad Q = \Delta v \cdot \text{div} D$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

วางตัวอยู่ที่จุดกำเนิด จะได้ $\text{div} D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = (0 + 0 + 2) = 2$

ดังนั้น $Q = \Delta v \cdot \text{div} D = 2 \times 10^{-9} = 2 nC$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา divD ที่จุด

1) $D = (2xyz - y^2)a_x + (x^2z - 2xy)a_y + (x^2y)a_z \text{ C/m}^2$ ที่ $P_A(2, 3, -1)$

วิธีทำ

$$\text{divD} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\text{divD} = 2yz - 2x = 2(3)(-1) - 2(2) = -10$$

2) $D = 2\rho z^2 \sin^2 \phi a_\rho + \rho z^2 \sin 2\phi a_\phi + 2\rho^2 z \sin^2 \phi a_z \text{ C/m}^2$ ที่ $P_B(\rho = 2, \phi = 110^\circ, z = -1)$

วิธีทำ

$$\text{divD} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\text{divD} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(2\rho^2 z^2 \sin^2 \phi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho z^2 \sin 2\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(2\rho^2 z \sin^2 \phi)}{\partial z}$$

$$\text{divD} = 4z^2 \sin^2 \phi + z^2 \cos 2\phi \cdot 2 + 2\rho^2 \sin^2 \phi$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา divD ที่จุด

$$\text{divD} = 4z^2 \sin^2 \phi + z^2 \cos 2\phi \cdot 2 + 2\rho^2 \sin^2 \phi$$

$$\text{divD} = 4(-1)^2 \sin^2(110) + (-1)^2 \cos(220) \cdot 2 + 2(2)^2 \sin^2(110)$$

$$\text{divD} = 9.06$$

3) $D = 2r \sin \theta \cos \phi a_r + r \cos \theta \cos \phi a_\theta - r \sin \phi a_\phi$ C/m^2 ที่ $P_C (r = 1.5, \theta = 30^\circ, \phi = 50^\circ)$

วิธีทำ

$$\text{divD} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta D_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(D_\phi)}{\partial \phi}$$

$$\text{divD} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(2r^3 \sin \theta \cos \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \sin \theta \cos \theta \cos \phi)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(-r \sin \phi)}{\partial \phi}$$

$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{2}$

$$\text{divD} = 6 \sin \theta \cos \phi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{r \cos \phi}{2} \cdot 2 \cos 2\theta - \frac{\cos \phi}{\sin \theta} = 1.286$$

เวกเตอร์โอเปอเรเตอร์เดลและทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

โอเปอเรเตอร์เดล ใช้สัญลักษณ์ (∇) เป็นเวกเตอร์ซึ่งแทนได้ด้วยสมการ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

จากความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในระบบพิกัดฉาก $\mathbf{D} = D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z$

$$\text{ดังนั้น} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial D_y}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial D_z}{\partial z} \mathbf{a}_z = \text{div} \mathbf{D} = \rho_v$$

จากกฎของเกาส์ $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$ ซึ่ง $Q = \int_{vol} \rho_v dv$ และ $\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}$

$$\text{ดังนั้นจะได้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์คือ} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

ฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดที่พุ่งผ่านพื้นที่ผิวปิดจะมีค่าเท่ากับการอินทิเกรตไดเวอร์เจนซ์ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่านตลอดปริมาตรที่พื้นผิวปิดอยู่

ตัวอย่างที่ 8 จงประเมินค่าการอินทิเกรตทั้งสองข้างของทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

เมื่อ $D = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 โดยมีพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดซึ่งประกอบไปด้วยระนาบ $x=0$

และ $x=1$ $y=0$ และ $y=2$ $z=0$ และ $z=3$

วิธีทำ จาก D ที่โจทย์กำหนดทราบว่า ทิศทางของ D ต้องขนานกับพื้นที่ผิวของทั้ง $z=0$ และ $z=3$ ดังนั้นกฎของเกาส์จึงไม่นำระนาบ z มาพิจารณา

$$\oint_S D \cdot dS = \int_0^3 \int_0^2 (D)_{x=0} \cdot (-dydz\mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (D)_{x=1} \cdot (dydz\mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^1 (D)_{y=0} \cdot (-dxdz\mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (D)_{y=2} \cdot (dxdz\mathbf{a}_y)$$

เครื่องหมายของเวกเตอร์ dS พิจารณาได้จากทิศทางของฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งออกจากผิวปิด

$$\oint_S D \cdot dS = -\int_0^3 \int_0^2 (D)_{x=0} \cdot dydz + \int_0^3 \int_0^2 (D)_{x=1} \cdot dydz - \int_0^3 \int_0^1 (D)_{y=0} \cdot dxdz + \int_0^3 \int_0^1 (D)_{y=2} \cdot dxdz$$

$$\text{ซึ่ง } (D_x)_{x=0} = 0 \quad \text{และ} \quad (D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงประเมินค่าการอินทิเกรตทั้งสองข้างของทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์

เมื่อ $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m^2 โดยมีพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าปิดซึ่งประกอบไปด้วยระนาบ $x=0$

และ $x=1$ $y=0$ และ $y=2$ $z=0$ และ $z=3$

วิธีทำ

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D}_x)_{x=1} \cdot dydz = \int_0^3 \int_0^2 2y dydz = \int_0^3 4dz = 12$$

อีกวิธีหนึ่ง

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y} = 2y$$

จะได้

$$\oint_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz = \int_0^3 4dz = 12$$

ดังนั้น

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = 12$$

โจทย์ปัญหา 1 ประจุจุด 20nC วางอยู่ที่ $(4, -1, 3)$ และประจุเส้น -25nC/m วางอยู่ที่ $x = 4$ $z = 6$ จงคำนวณหา D ที่จุด $(3, -1, 0)$

$$\text{Ans : } -0.38\mathbf{a}_x + 0.13\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$$

โจทย์ปัญหา 2

1) ผิวทรงกระบอก $\rho = 8 \text{ cm}$ มีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่ $\rho_v = 5e^{-20|z|} \text{ nC/m}^3$

(a) จงหาประจุไฟฟ้าทั้งหมด (Ans: 0.25 nC)

(b) ฟลักซ์ไฟฟ้าออกจากผิว $\rho = 8 \text{ cm}$, $1 \text{ cm} < z < 5 \text{ cm}$ และ $30^\circ < \phi < 90^\circ$ เป็นจำนวนเท่าใด (Ans: 9.45 pC)

โจทย์ปัญหา 3

1) มีประจุเป็นจุดขนาด $0.25 \mu\text{C}$ วางอยู่ที่ $r = 0$ และมีประจุซึ่งมีความหนาแน่น 2 mC/m^2 อยู่ที่ $r = 1 \text{ cm}$ พร้อมด้วย -0.6 mC/m^2 อยู่ที่ $r = 1.8 \text{ cm}$ จงหา $\mathbf{D}$ ที่

(a) $r = 0.5 \text{ cm}$ (Ans: $796\mathbf{a}_r \mu\text{C/m}^2$)

(b) $r = 1.5 \text{ cm}$ (Ans: $977\mathbf{a}_r \mu\text{C/m}^2$)

(c) $r = 2.5 \text{ cm}$ (Ans: $40.8\mathbf{a}_r \mu\text{C/m}^2$)

(d) หาคความหนาแน่นประจุไฟฟ้าของแผ่นซึ่งวางอยู่ที่ $r = 3 \text{ cm}$ ที่ทำให้ $\mathbf{D} = 0$ ที่ $r = 3.5 \text{ cm}$ (Ans: $-28.3 \mu\text{C/m}^2$)

โจทย์ปัญหา 4

1) ในอวกาศว่าง กำหนดให้ $\mathbf{D} = 8xyz^4 \mathbf{a}_x + 4x^2z^4 \mathbf{a}_y + 16x^2yz^3 \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$

(a) จงหาฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดที่ผ่านพื้นผิวฉาก $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$ ในทิศทาง $\mathbf{a}_z$ (Ans: 1365 pC)

(b) หา $\mathbf{E}$ ที่ $P(2, -1, 3)$ (Ans: $-146.4\mathbf{a}_x + 146.4\mathbf{a}_y - 195.2\mathbf{a}_z \text{ V/m}$)

(c) จงประมาณค่าประจุทั้งหมดที่อยู่ในปริมาตรทรงกลมขนาด 10^{-12} m^3 วางตัวอยู่ที่ $P(2, -1, 3)$ (Ans: $-2.38 \times 10^{-21} \text{ C}$)

2) จงหาค่าความหนาแน่นของประจุเชิงปริมาตร (ρ_v) เมื่อทราบค่า $\mathbf{D}$

(a) $\mathbf{D} = \frac{4xy}{z} \mathbf{a}_x + \frac{2x^2}{z} \mathbf{a}_y - \frac{2x^2y}{z^2} \mathbf{a}_z$ (Ans: $\frac{4y}{z^3}(x^2 + z^2)$)

(b) $\mathbf{D} = z \sin \phi \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho \sin \phi \mathbf{a}_z$ (Ans: 0)

(c) $\mathbf{D} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ (Ans: 0)

โจทย์ปัญหา 5

จงคำนวณหา $\nabla \cdot \mathbf{D}$ ที่จุดต่อไปนี้

(a) $\mathbf{D} = (1/z^2)[10xyz\mathbf{a}_x + 5x^2z\mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y)\mathbf{a}_z]$ ที่จุด $P(-2, 3, 5)$ (Ans: 8.96)

(b) $\mathbf{D} = 5z^2\mathbf{a}_\rho + 10\rho z\mathbf{a}_z$ ที่จุด $P(3, -45^\circ, 5)$ (Ans: 71.67)

(c) $\mathbf{D} = 2r \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + r \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ ที่จุด $P(3, 45^\circ, -45^\circ)$ (Ans: -2)

โจทย์ปัญหา 6

ถ้ามี $\mathbf{D} = 5.00r^2\mathbf{a}_r$ mC/m² ในบริเวณ $r \leq 0.08$ m และ $\mathbf{D} = 0.205\mathbf{a}_r/r^2$ μ C/m² ในบริเวณ $r \geq 0.08$ m จงหา

(a) ρ_v ที่ $r = 0.06$ m (Ans: 1.20 mC/m³)

(b) ρ_v ที่ $r = 0.1$ m (Ans: 0)

(c) ความหนาแน่นประจุเชิงผิวที่ $r = 0.08$ m ที่ทำให้ $\mathbf{D} = 0$ ในบริเวณ $r > 0.08$ m (Ans: -32 μ C/m²)