

บทที่ 2

กฎของคูลอมป์และความเข้มสนามไฟฟ้า

Coulomb's Law and Electric Field Intensity

Arnon Isaramongkolrak

Department of Electrical Engineering
Nakhon pathom Rajabhat University

หัวข้อการบรรยาย

- กฎของคูลอมบ์
- ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่ม
- ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นปริมาตรอย่างต่อเนื่อง
- ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง
- ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

สนามไฟฟ้าสถิต (Electrostatic field)

- เกิดจากผลของประจุไฟฟ้าที่อยู่นิ่งกับที่ ที่วางตัวอยู่ในตัวกลางต่างๆ เช่น วางตัวอยู่ในสุญญากาศ หรืออวกาศว่าง (**free space**)
- ประจุไฟฟ้าที่ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าสถิตนี้ สามารถพิจารณาได้จากกรณีที่ ประจุไฟฟ้าเป็นจุด ประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่ม หรือประจุไฟฟ้ามีการกระจายตัวอย่างต่อเนื่อง
- ประจุเหล่านี้จะมีแรงกระทำต่อกันทำให้เกิดสนามไฟฟ้า และเกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า และพลังงานไฟฟ้าต่อไป

กฎของคูลอมบ์

ประมาณ ค.ศ. 1600 Colonel Charles Coulomb วิศวกรประจำกองทัพบกของฝรั่งเศส ได้ทำการทดลองทางสนามไฟฟ้าสถิต โดยได้ศึกษาแรงที่เกิดจากประจุไฟฟ้าสองตัวที่กระทำต่อกัน จนเป็นที่มาของกฎของคูลอมบ์

ค่าคงที่มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ โดยที่ $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ และ $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F / m}$

แรงที่เกิดจากประจุไฟฟ้า (N) $\rightarrow F = \frac{kQ_1Q_2}{R^2}$ $\leftarrow$ ประจุไฟฟ้า (C)

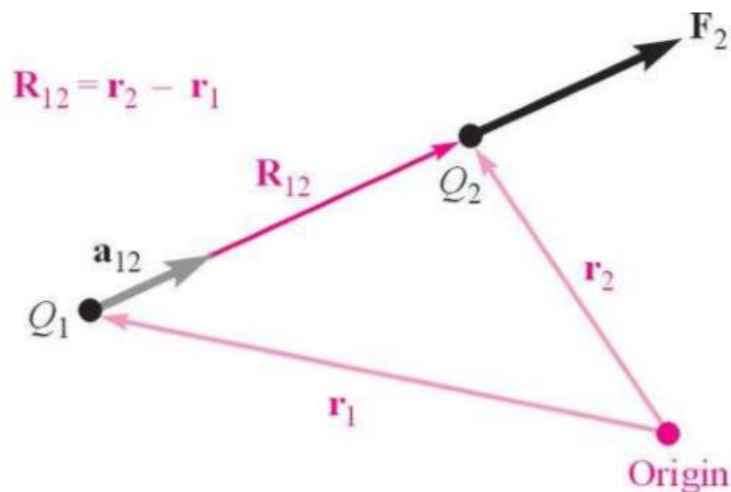
$\leftarrow$ ระยะห่างของประจุทั้งสอง (m)

กฎของคูลอมบ์

จะได้

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R^2}$$

ในกรณีพิจารณาทิศทางการเคลื่อนที่ของแรงด้วย จะทำให้สมการดังกล่าวปรากฏในรูปของเวกเตอร์ ซึ่ง เมื่อกำหนดให้ Q_1 และ Q_2 มีประจุเครื่องหมายเหมือนกัน จะได้แรงลัพท์ที่ผลักกัน โดยเป็นการหาแรงตรงประจุ Q_2 ที่เกิดจากผลของประจุ Q_1 ซึ่งจะได้ผลลัพท์ F_2 ในทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ a_{12}



$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \mathbf{a}_{12}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง R_{12}

$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \frac{R_{12}}{|R_{12}|} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

ตัวอย่างที่ 1

จงใช้กฎของคูลอมบ์หาแรงลัพธ์บนประจุ Q_2 ที่กระทำโดยประจุ Q_1 เมื่อประจุ $Q_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ C}$ ที่ $(1, 2, 3)$ และประจุ $Q_2 = -10^{-4} \text{ C}$ ที่ $(2, 0, 5)$ วางอยู่ในสุญญากาศ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{12} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2-1)\mathbf{a}_x + (0-2)\mathbf{a}_y + (5-3)\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{R}_{12}| &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

จึงได้แรงลัพธ์ $\mathbf{F}_2$ บนประจุ Q_2 ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{3 \times 10^{-4} (-10^{-4})}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 3^2} \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \\ &= -10\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y - 20\mathbf{a}_z \quad \text{N}\end{aligned}$$

ซึ่งถ้าหาขนาดของ $\mathbf{F}_2$ ก็จะได้ 30 N

ตัวอย่างที่ 1

จากกฎของคูลอมบ์ แรงกระทำที่ปรากฏของประจุทั้งสองจะเป็นแรงร่วมซึ่งกันและกัน ซึ่งหมายถึงไม่ว่าประจุทั้งสองจะมีเครื่องหมายเหมือนหรือแตกต่างกัน ก็จะได้แรงกระทำของประจุทั้งสองในขนาดที่เท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามเสมอ (แรงผลักก็ผลักเช่นกัน แรงดูดก็ดูดเช่นกัน)

$$F_1 = -F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \mathbf{a}_{12}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้า

แรงกระทำที่เกิดจากประจุไฟฟ้าโดยอาศัยกฎของคูลอมบ์ จะทำให้เกิดสนามไฟฟ้า หรืออาจแทนได้ในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้า ซึ่งเมื่อพิจารณาประจุ Q_1 ที่อยู่นิ่งกับที่ ถ้าต้องการหาแรงที่เกิดจากประจุ Q_1 ที่กระทำกับประจุทดสอบ Q_t จากกฎของคูลอมบ์จะได้

$$F_t = \frac{Q_1 Q_t}{4\pi\epsilon R_{1t}^2} a_{1t}$$

ซึ่งความเข้มสนามไฟฟ้า (E) คือ แรงที่กระทำกับประจุหารด้วยประจุที่ถูกกระทำนั้นๆ จึงได้ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นจุด ซึ่งจะมีทิศทางไปทางเดียวกันกับแรงที่มากระทำ

$$E = \frac{F_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_{1t}^2} a_{1t}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่ม

เมื่อพิจารณาประจุไฟฟ้าทั้งหมด n จุด กระทำกับจุดทดสอบ จะได้

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R_{1t}^2} a_{1t} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon R_{2t}^2} a_{2t} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon R_{nt}^2} a_{nt}$$

หรือเมื่อพิจารณาประจุ Q_1 ซึ่งมีพิกัดอยู่ที่ r_1 , Q_2 ซึ่งมีพิกัดอยู่ที่ $r_2, \dots$, และ

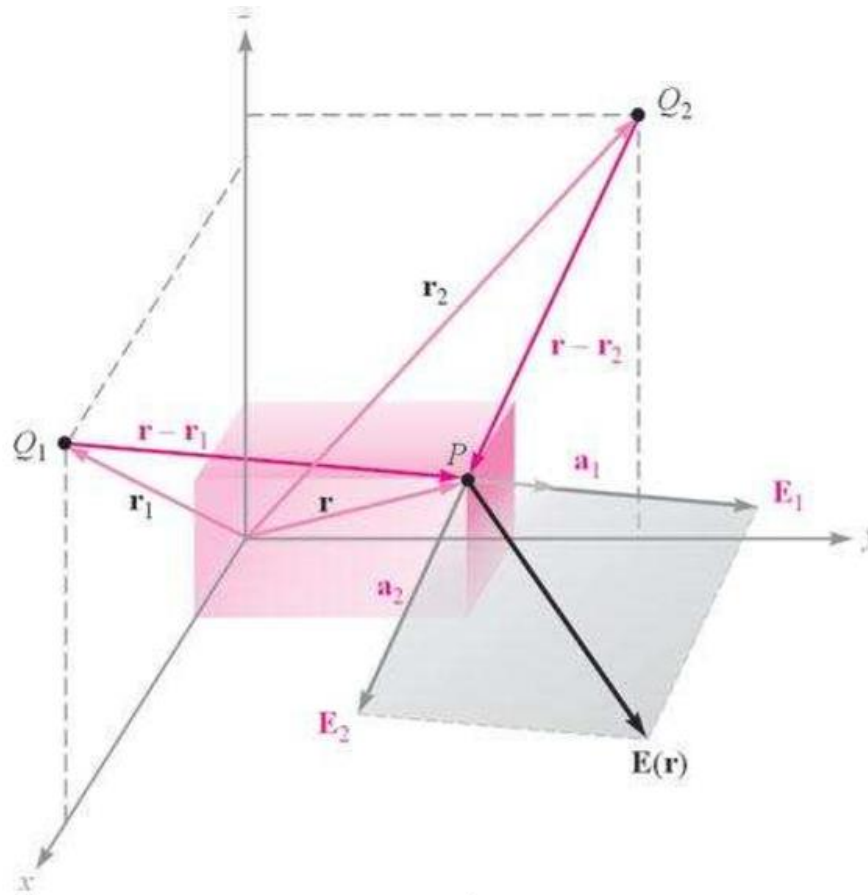
Q_n ซึ่งมีพิกัดอยู่ที่ r_n กระทำกับจุดทดสอบที่มีพิกัดอยู่ที่ r จะได้

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่ม

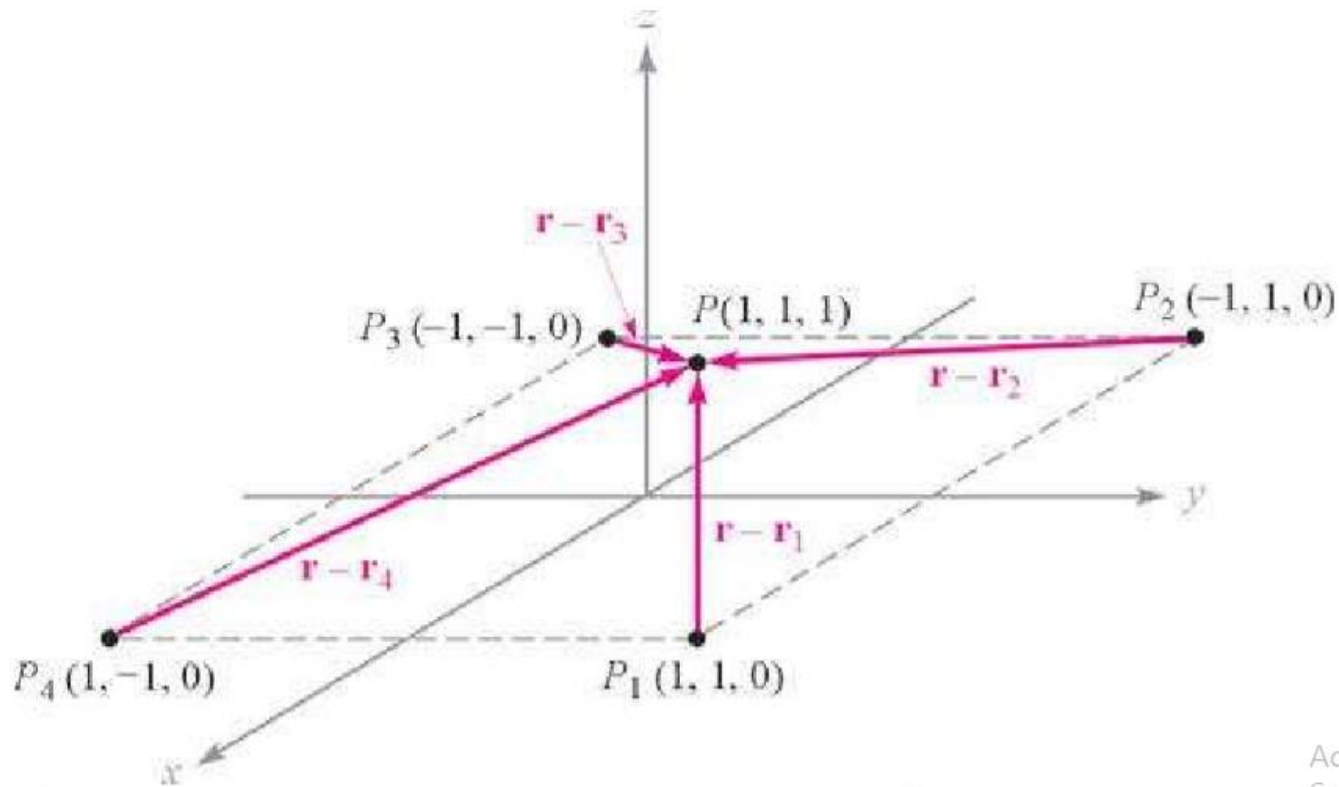
พิจารณาประจุ Q_1 และ Q_2 กระทำกับจุดทดสอบเพื่อหาความเข้มสนามไฟฟ้า

ณ จุด P



ตัวอย่างที่ 2

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(1,1,1)$ ในอวกาศว่าง ซึ่งโคนประจุขนาดเท่ากันเท่ากับ $3nC$ ทั้ง 4 ประจุกระทำซึ่งประจุทั้ง 4 อยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(-1,-1,0)$ และ $P_4(1,-1,0)$



ตัวอย่างที่ 2

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(1,1,1)$ ในอวกาศว่าง ซึ่งโคนประจุขนาดเท่ากันเท่ากับ $3nC$ ทั้ง 4 ประจุกระทำซึ่งประจุทั้ง 4 อยู่ที่ตำแหน่ง

$P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(-1,-1,0)$ และ $P_4(1,-1,0)$

วิธีทำ ความเข้มสนามไฟฟ้า เมื่อพิจารณาประจุไฟฟ้าเป็นกลุ่มหาได้จาก

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|}$$

โดยที่ $\mathbf{r} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \quad \therefore \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_z \quad , \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = 1$$

$$\mathbf{r}_2 = -\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \quad \therefore \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z \quad , \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{5}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(1,1,1)$ ในอวกาศว่าง ซึ่งโคนประจุขนาดเท่ากันเท่ากับ $3nC$ ทั้ง 4 ประจุกระทำซึ่งประจุทั้ง 4 อยู่ที่ตำแหน่ง $P_1(1,1,0)$, $P_2(-1,1,0)$, $P_3(-1,-1,0)$ และ $P_4(1,-1,0)$

วิธีทำ $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \quad \therefore \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = 2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \quad , \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_3| = 3$
 $\mathbf{r}_4 = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y \quad \therefore \mathbf{r} - \mathbf{r}_4 = 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \quad , \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_4| = \sqrt{5}$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon} = \frac{3 \times 10^{-9}}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} = 26.96 \text{ V.m}$$

ดังนั้น
$$\mathbf{E} = 26.96 \left[\frac{\mathbf{a}_z}{1(1)^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}(\sqrt{5})^2} + \frac{2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{3(3)^2} + \frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}(\sqrt{5})^2} \right]$$
$$= 6.82\mathbf{a}_x + 6.82\mathbf{a}_y + 32.8\mathbf{a}_z \quad \text{V/m}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นปริมาตร อย่างต่อเนื่อง

การกระจายของประจุอย่างต่อเนื่อง หมายถึง ประจุจำนวนมหาศาลที่อยู่รวมกันอย่างหนาแน่นในบริเวณที่จำกัด ซึ่งอาจจะอยู่รวมกันเป็นแบบปริมาตรเป็นแบบพื้นผิว หรือเป็นแบบเส้น ซึ่งการพิจารณาการกระจายของประจุที่อยู่รวมกันอย่างต่อเนื่องนี้ จะใช้การอินทิเกรตองค์ประกอบของประจุที่เกิดขึ้นตลอดช่วงของการกระจายประจุ

ในกรณีที่ประจุอยู่รวมกันเป็นแบบปริมาตร จะพิจารณาความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าเชิงปริมาตรซึ่งแทนได้ด้วย ρ_v มีหน่วยคูลอมบ์ต่อลูกบาศก์เมตร (C/m^3) ดังนั้นปริมาณประจุเล็กๆ ที่อยู่ในปริมาตรเล็กๆ จะหาได้จาก

$$\Delta Q = \rho_v \Delta v$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นปริมาตร อย่างต่อเนื่อง

จึงสามารถหาประจุไฟฟ้าทั้งหมดตลอดทั้งปริมาตรได้เป็น

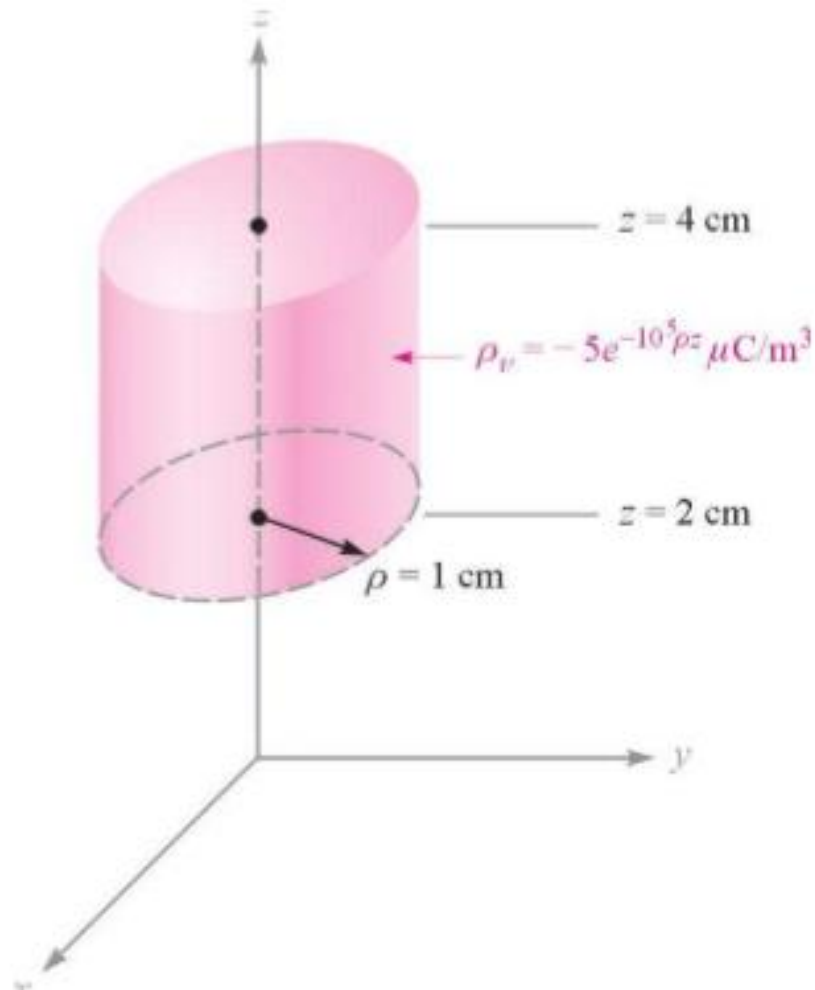
$$Q = \int_{vol} \rho_v dv$$

และสามารถหาความเข้มสนามที่ $\mathbf{r}$ ที่เกิดจากการกระทำของประจุที่อยู่รวมกัน
เป็นแบบปริมาตรที่ $\mathbf{r}'$ ได้จาก

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{a}_{\mathbf{r}'} = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_{vol} \frac{\rho_v(\mathbf{r}') dv' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าประจุไฟฟ้าตลอดทั้งปริมาตรดังแสดงในรูป (ตัวอย่างนี้เป็นการพิจารณาปริมาตรของทรงกระบอก)



ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าประจุไฟฟ้าตลอดทั้งปริมาตรดังแสดงในรูป (ตัวอย่างนี้เป็นการพิจารณาปริมาตรของทรงกระบอก)

วิธีทำ จากรูปที่ปรากฏ จะต้องอาศัยความรู้ของระบบพิกัดทรงกระบอก จึงได้

$$Q = \int_{vol} \rho_v dv = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho d\phi dz$$

อินทิเกรตเทียบกับ ϕ จึงได้

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho dz$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าประจุไฟฟ้าตลอดทั้งปริมาตรดังแสดงในรูป (ตัวอย่างนี้เป็นการพิจารณาปริมาตรของทรงกระบอก)

วิธีทำ อินทิเกรตเทียบกับ z จึงได้

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5} \pi}{-10^5 \rho} e^{-10^5 \rho z} \rho d\rho \right)_{z=0.02}^{z=0.04} \\ &= \int_0^{0.01} -10^{-10} \pi (e^{-2000 \rho} - e^{-4000 \rho}) d\rho \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าประจุไฟฟ้าตลอดทั้งปริมาตรดังแสดงในรูป (ตัวอย่างนี้เป็นการพิจารณาปริมาตรของทรงกระบอก)

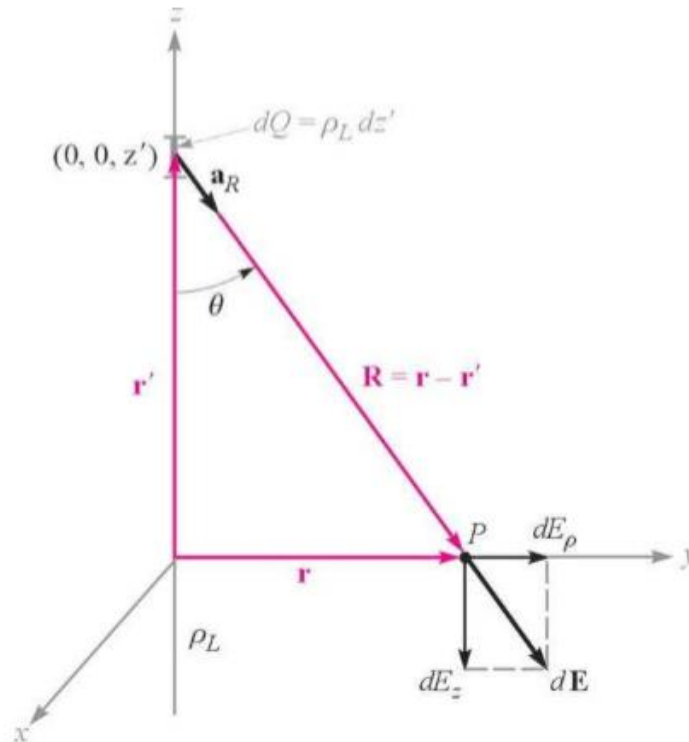
วิธีทำ อินทิเกรตเทียบกับ ρ จึงได้

$$\begin{aligned} Q &= -10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-2000\rho}}{-2000} - \frac{e^{-4000\rho}}{-4000} \right)_{\rho=0}^{\rho=0.01} \\ &= -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{4000} \right) \quad \text{พิจารณาเฉพาะ } \rho = 0 \text{ เท่านั้นเพราะที่ } \rho = 0.01 \\ &\quad \text{มันจะมีค่าน้อยมากประมาณศูนย์} \\ &= \frac{-10^{-12} \pi}{40} \\ &= -0.0785 \text{ pC} \end{aligned}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง

ในกรณีที่ประจูงู่รวมกันเป็นเส้น จะพิจารณาความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าเชิงเส้นซึ่งแทนได้ด้วย ρ_L มีหน่วยคูลอมบ์ต่อเมตร (C/m)

จากรูป พิจารณาประจุไฟฟ้าที่ยาวมาก $(+\infty, -\infty)$ วางตัวอยู่ในแนวแกน Z ของระบบพิกัดทรงกระบอก



ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง

ต้องการทราบความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุด P เนื่องจากระบบสมมาตร Z จะเป็นแกนกลางของทรงกระบอก และระยะจาก Z ถึงจุด P ก็คือรัศมีของทรงกระบอก ถ้าให้รัศมีมีค่าคงที่เมื่อจุด P หมุนไปรอบแกน Z ย่อมจะได้ความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุด P ที่หมุนไปเท่ากันตลอด ดังนั้นจึงได้

$$d\mathbf{E} = dE_\rho \mathbf{a}_\rho + dE_z \mathbf{a}_z$$

เมื่อพิจารณาประจุไฟฟ้าที่อยู่ในเส้นความยาวเล็กๆ จะได้ $dQ = \rho_L dz'$ ดังนั้นจึงได้ความเข้มสนามไฟฟ้าจากผลของประจุที่อยู่ในเส้นความยาวเล็กๆ นี้เป็น

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$
 $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$\mathbf{r} = y\mathbf{a}_y = \rho\mathbf{a}_\rho$
 $\mathbf{r}' = z'\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_L dz' (\rho\mathbf{a}_\rho - z'\mathbf{a}_z)}{4\pi\epsilon (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

ซึ่งความเข้มสนามไฟฟ้าจะไม่ขึ้นอยู่กัแกน Z ในกรณีทีระบบสมมาตร (บนกับล่างเท่ากัน) ดังนั้น ความเข้มสนามไฟฟ้าจะขึ้นอยู่กัเทอมของ E_ρ อย่างเดียว

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง

$$d\mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho$$

$$\mathbf{E}_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dz'}{4\pi\epsilon(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\rho$$

ทำการอินทิเกรตจะได้

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \mathbf{a}_\rho$$

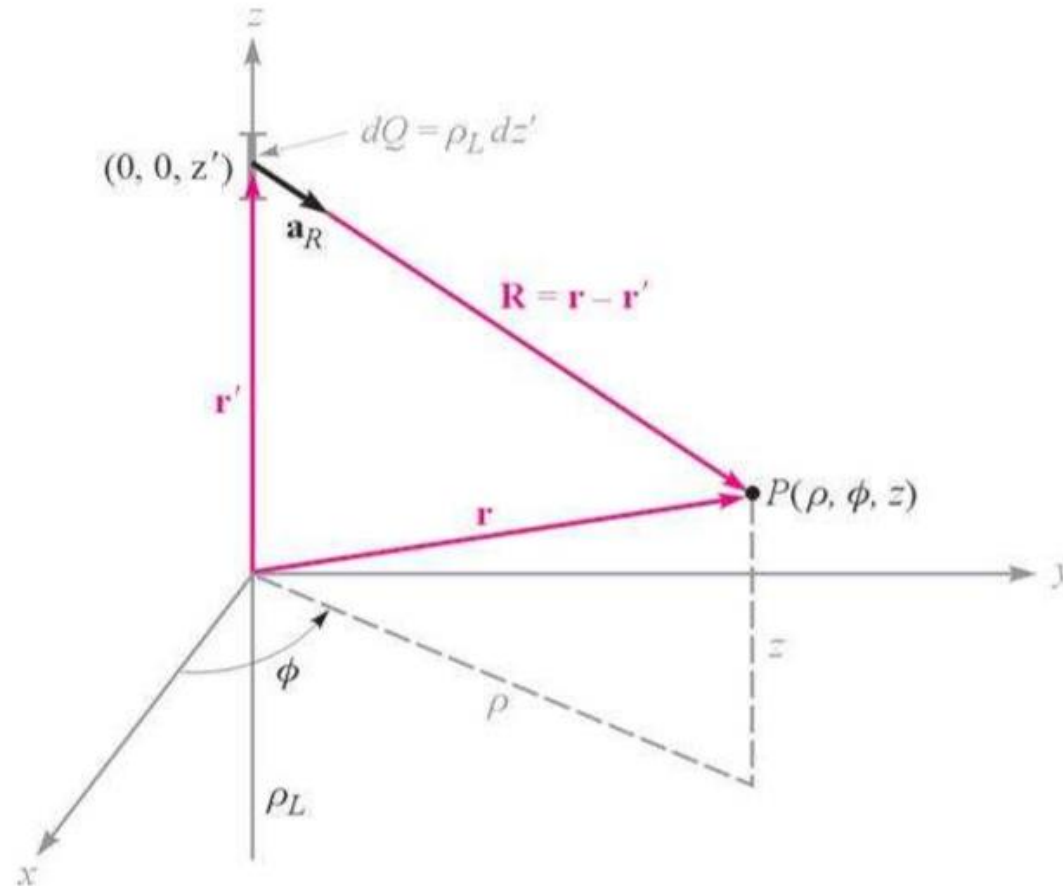
ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง

ในกรณีที่จุด P ไม่สมมาตรก็ดำเนินการพิสูจน์เหมือนเช่นเดิม โดย r จะเปลี่ยนไปเป็น $\rho a_\rho + z a_z$ ซึ่งจากการพิสูจน์ ผลลัพธ์ของความเข้มสนามไฟฟ้าก็จะเหลือเฉพาะ E_ρ แต่เพียงเทอมเดียว จะได้

$$\mathbf{E}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon\rho} \mathbf{a}_\rho$$

ซึ่งจะสังเกตเห็นว่า การหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้าในกรณีที่ประจุไฟฟ้าเป็นเส้นยาวมาก แม้ว่าจะมีความสมมาตรหรือไม่สมมาตรรอบแกนก็ตาม ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าก็จะมีค่าเท่ากัน แต่ในกรณีที่ประจุไฟฟ้าเป็นเส้นมีความยาวจำกัดจะต้องดำเนินการอินทิเกรตใหม่ให้อยู่ในช่วงที่จำกัดนั้น

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นเส้นอย่างต่อเนื่อง



ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นเส้นแต่ไม่สมมาตรรอบแกน

ตัวอย่างที่ 4

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(1, 2, 3)$ ในระบบพิกัดฉากที่วางตัวอยู่ในอวกาศว่าง ซึ่งเกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นเส้นวางตัวไปตามแกน Z โดยกำหนดให้ $\rho_L = 0.5 \text{ nC/m}$

วิธีทำ เนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้าจะปรากฏเฉพาะทิศทางของรัศมีรอบแกน Z หรือก็คือ จะปรากฏในทิศทางของรัศมี ρ เท่านั้นซึ่งก็คือส่วนประกอบของ X และ y

$$\rho = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y$$

$$|\rho| = \sqrt{5}$$

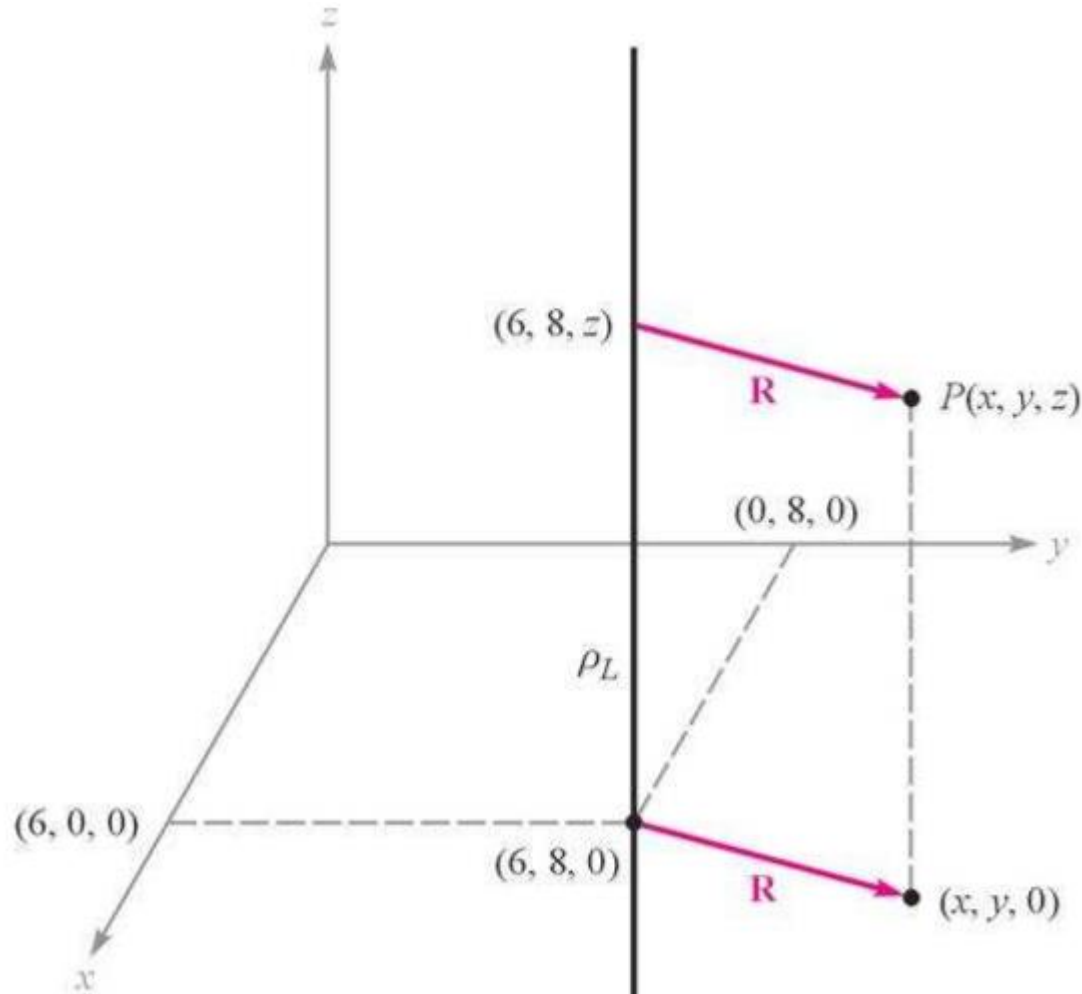
$$\mathbf{a}_\rho = \frac{\rho}{|\rho|} = \frac{\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\rho &= \frac{0.5 \times 10^{-9}}{2\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times \sqrt{5}} \cdot \frac{\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y}{\sqrt{5}} \\ &= 1.8\mathbf{a}_x + 3.6\mathbf{a}_y \text{ V/m} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(x, y, z)$ ที่วางตัวอยู่ในอวกาศว่าง ซึ่งเกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นเส้นที่มีความหนาแน่นของประจุคือ ρ_L โดยวางตัวไปตามแกน z ที่ $x=6, y=8$



ตัวอย่างที่ 5

จงหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(x, y, z)$ ที่วางตัวอยู่ในอวกาศว่าง ซึ่งเกิดจากประจุไฟฟ้าเป็นเส้นที่มีความหนาแน่นของประจุคือ ρ_L โดยวางตัวไปตามแกน z ที่ $x=6, y=8$

วิธีทำ

เนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้าจะปรากฏเฉพาะทิศทางของรัศมีรอบแกน z หรือก็คือจะปรากฏในทิศทางของรัศมี ρ เท่านั้น (จากรูปที่ปรากฏคือ R) ซึ่งก็คือส่วนประกอบ x, y

ในระบบพิกัดฉากนั่นเอง ดังนั้น ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด $P(x, y, z)$ ใดๆ คือ

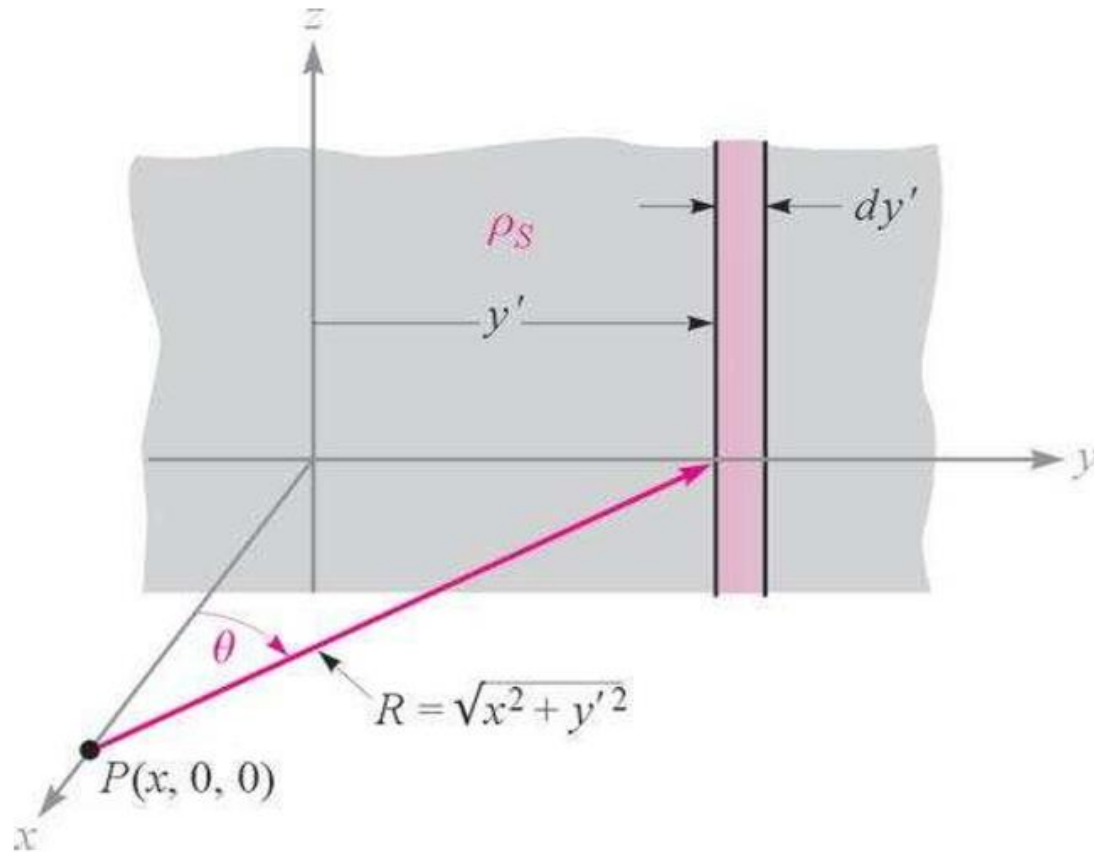
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}} \mathbf{a}_R$$

$$\text{ซึ่ง} \quad \mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{(x-6)\mathbf{a}_x + (y-8)\mathbf{a}_y}{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

ในกรณีประจุอยู่รวมกันเป็นแผ่น เราจะพิจารณาความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าเชิงพื้นที่ ซึ่งแทนได้ด้วย ρ_s มีหน่วยคูลอมบ์ต่อตารางเมตร (C/m^2)



ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

จากรูปพิจารณาแผ่นบางที่มีขนาดใหญ่มาก (ใหญ่มากเมื่อเทียบกับระยะทางจากแผ่นถึงจุด P) วางตัวอยู่ในระนาบ yz และต้องการทราบความเข้มสนามไฟฟ้า ณ จุด P ซึ่งวางตัวอยู่ในแกน x^+ จากรูปเนื่องจากระบบสมมาตรจึงไม่มีความเข้มสนามไฟฟ้าในทิศทางของ y กับ z จึงมีเพียง E_x เท่านั้น

จากรูปเราจะนำความสัมพันธ์ของประจุเป็นเส้นยาวไม่จำกัดมาใช้ ซึ่งในกรณีที่พิจารณาเฉพาะส่วนหนึ่งของแผ่นบาง จะได้ $\rho_L = \rho_s dy'$

โดยที่ ระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุด P บนแกน x^+ จะมีค่า $R = \sqrt{x^2 + y'^2}$

$$dE = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon R} a_R$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

เนื่องจากถ้าพิจารณาระบบสมมาตรจะมีเพียง E_x เท่านั้น

$$dE_x = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y'^2}} \cos\theta = \frac{\rho_s dy'}{2\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y'^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2}$$

เมื่อพิจารณาตลอดทั้งแผ่น จึงได้

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdy'}{x^2 + y'^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon} \tan^{-1} \frac{y'}{x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon}$$

ในกรณีที่จุด P อยู่แกน x^- จะได้

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon} \quad \text{ค่านิ่งเครื่องหมายของประจุด้วย} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_N$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือพื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

พิจารณา

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_N$$

มีทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่ของประจุและพุ่งออกจากแผ่นไปหาจุดที่ต้องการหาค่าความเข้มสนามไฟฟ้า

ในกรณีที่มีแผ่นบางสองแผ่น โดยมีแผ่นที่เป็นประจุลบ $-\rho_s$ เพิ่มขึ้นมา โดยเพิ่มขึ้นมาที่ระยะ $x = a$ เราสามารถหาความเข้มสนามไฟฟ้าทั้งหมดที่เกิดจากผลของแต่ละแผ่นแบ่งเป็นบริเวณได้ดังนี้

ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าที่บริเวณ $x > a$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x \quad \therefore \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = 0$$

บริเวณ $x < 0$

$$\mathbf{E}_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x \quad \therefore \quad \mathbf{E} = 0$$

บริเวณ $0 < x < a$

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{E}_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{a}_x \quad \therefore \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{a}_x$$

ความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุไฟฟ้าที่รวมกันเป็นแผ่นหรือ พื้นผิวอย่างต่อเนื่อง

ซึ่งกรณีนี้ถูกนำไปใช้สำหรับการสร้างตัวเก็บประจุ โดยมีแผ่นประจุต่างกันสองแผ่นมีอากาศคั่นเป็นระยะห่างอยู่เล็กน้อย โดยถือว่าแผ่นบางนี้มีขนาดใหญ่กว่าระยะห่างของทั้งสองแผ่นมาก

หมายเหตุ ในการทำโจทย์นี้ ไม่ว่าประจุไฟฟ้าจะปรากฏอยู่ในลักษณะใดก็ตาม อาจจะ เป็นจุด เป็นกลุ่ม เป็นเส้น เป็นแผ่น หรือ เป็นปริมาตร ให้ดำเนินการพิจารณาทุก ลักษณะ แล้วนำผลของแต่ละลักษณะมารวมกัน

โจทย์ปัญหา 1

- 1) จงหาแรงลัพธ์บนประจุ Q_A ซึ่งกระทำโดย Q_B เมื่อประจุ $Q_A = -20 \mu\text{C}$ ที่ $(-6, 4, 7)$ และประจุ $Q_B = 50 \mu\text{C}$ ที่ $(5, 8, -2)$ วางอยู่ในสุญญากาศ (Ans: $30.72\mathbf{a}_x + 11.169\mathbf{a}_y - 25.13\mathbf{a}_z$ mN)
- 2) ประจุบวกขนาด 10 nC จำนวน 4 ประจุวางที่ระนาบ $z = 0$ ที่ตำแหน่งมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กว้างด้านละ 8 cm มีประจุที่ห้าวางไว้ที่ตำแหน่งห่างจากประจุทั้งสี่เหล่านั้นด้วยระยะ 8 cm เท่าๆ กัน จงหาแรงทั้งหมดที่กระทำกับประจุที่ห้า เมื่อ $\epsilon = \epsilon_0$ (Ans: $4.0 \times 10^{-4} \text{ N}$)

โจทย์ปัญหา 2

- ประจุ $-0.3 \mu\text{C}$ ที่จุด $A(25, -30, 15)$ (ในหน่วย cm) และประจุ $0.5 \mu\text{C}$ ที่จุด $B(-10, 8, 12)$ จงหา $\mathbf{E}$ ที่จุด
- (a) จุดกำเนิด (Ans: $92.3\mathbf{a}_x - 77.6\mathbf{a}_y - 94.2\mathbf{a}_z$ kV/m)
- (b) $P(15, 20, 50)$ (Ans: $11.9\mathbf{a}_x - 0.519\mathbf{a}_y + 12.4\mathbf{a}_z$ kV/m)

โจทย์ปัญหา 3

ในอวกาศว่างมีประจุซึ่งมีความหนาแน่น $\rho_v = \rho_0 r/a$ C/m³ ซึ่ง ρ_0 และ a เป็นค่าคงที่ จงหาประจุทั้งหมดที่อยู่ภายในบริเวณ

(a) ทรงกลม $r \leq a$ (Ans: $\pi\rho_0 a^3$)

(b) ทรงกลวย $r \leq a, 0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ (Ans: $0.024\pi\rho_0 a^3$)

(c) $r \leq a, 0 \leq \theta \leq 0.1\pi, 0 \leq \phi \leq 0.2\pi$ (Ans: $0.0024\pi\rho_0 a^3$)

โจทย์ปัญหา 4

ประจุเส้นสม่ำเสมอขนาด 16 nC/m วางอยู่เป็นเส้นที่ $y = -2, z = 5$ ถ้า $\epsilon = \epsilon_0$ จงหา

(a) สนาม $\mathbf{E}$ ที่ $P(1, 2, 3)$ (Ans: $57.5\mathbf{a}_y - 28.8\mathbf{a}_z$ V/m)

(b) สนาม $\mathbf{E}$ ที่จุดบนระนาบ $z = 0$ และทิศทางของ $\mathbf{E}$ เป็น $(1/3)\mathbf{a}_y - (2/3)\mathbf{a}_z$ (Ans: $23\mathbf{a}_y - 46\mathbf{a}_z$ V/m)

โจทย์ปัญหา 6

1) ประจุแบบแผ่นขนาดอนันต์จำนวนสามแผ่นวางอยู่ในอวกาศว่าง ซึ่งแผ่นที่หนึ่งมีค่า 3 nC/m^2 ที่ $z = -4$ แผ่นที่สองมีค่า 6 nC/m^2 ที่ $z = 1$ และแผ่นที่สามมีค่า -8 nC/m^2 ที่ $z = 4$ จงหา $\mathbf{E}$ ที่จุด

(a) $P_A(2,5,-5)$ (Ans: $-56.5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$)

(b) $P_B(4,2,-3)$ (Ans: $283\mathbf{a}_z \text{ V/m}$)

(c) $P_C(-1,-5,2)$ (Ans: $961\mathbf{a}_z \text{ V/m}$)

(d) $P_D(-2,4,5)$ (Ans: $56.5\mathbf{a}_z \text{ V/m}$)