Parametric Equations
สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม

By ARNON ISARAMONGKOLRAK
ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
NAKHONPATHOM RAJABHAT UNIVERSITY

Contents

- เส้นตรงกำหนดโดยจุดและเวกเตอร์
- ส่วนของเส้นตรง
- สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง

ส่วนของเส้นตรงที่กำหนดโดยจุด

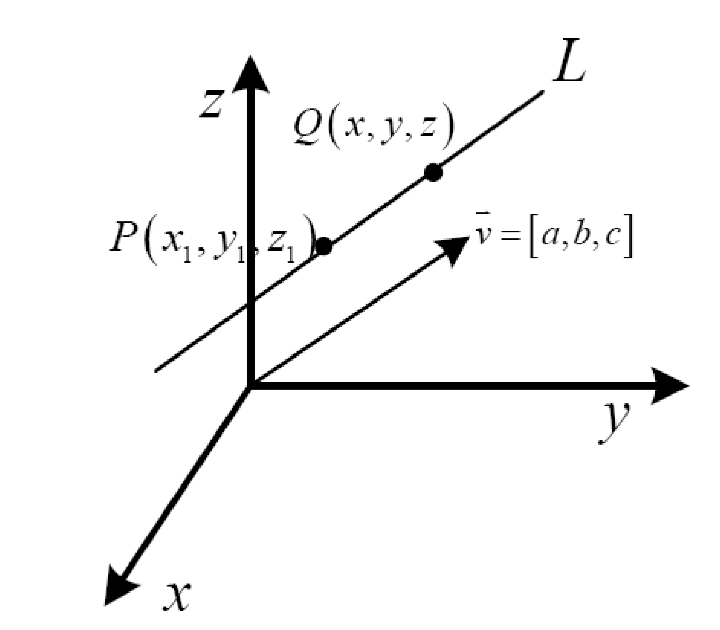
- เราสามารถหาสมการเส้นตรงได้ ถ้าเรารู้ จุดหนึ่งจุดบนเส้นตรงและเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ซึ่งขนานกับเส้นตรง นั่นคือ การหาสมการอ้างอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

- ทฤษฎี2.1 ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = [a, b, c]$ L จะมีสมการอ้างอิงตัวแปรเสริมคือ

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct \qquad \text{เมื่อ } -\infty \le t \le \infty$$

ส่วนของเส้นตรงที่กำหนดโดยจุด

กำหนด L ผ่านจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = [a, b, c]$ และให้ $Q(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L



$\overline{PQ} = [x - x_1, y - y_1, z - z_1]$ จะได้ $\overline{PQ}$ ขนานกับ $\vec{v}$

จะมีปริมาณสเกลาร์ t ที่ทำให้ $\overline{PQ} = t\vec{v}$

$$[x - x_1, y - y_1, z - z_1] = t[a, b, c]$$

$$[x - x_1, y - y_1, z - z_1] = [ta, tb, tc]$$

จะได้สมการ สมการอิงตัวแปรเสริม t คือ $x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$

Example 1 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ต่อไปนี้

ก. ผ่านจุด $(-3,1,5)$ และขนานกับ $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

Solution

กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1) = P(-3,1,5)$

และ $\vec{v} = [a,b,c] = [2,-4,3]$ นั่นคือ $a = 2, \quad b = -4, \quad c = 3$

และ จากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง $x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$

ดังนั้นสมการคือ $x = -3 + 2t, \quad y = 1 - 4t, \quad z = 5 + 3t$

Example 1 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ต่อไปนี้

ข. ผ่านจุดกำเนิดและขนานกับ $[1,1,1]$

Solution

กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1) = P(0,0,0)$

และ $\vec{v} = [a,b,c] = [1,1,1]$ นั่นคือ $a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

และ จากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง $x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$

ดังนั้นสมการคือ $x = t, \quad y = t, \quad z = t$

Example 2 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$ และ

เส้นตรงตัดระนาบ XY และระนาบ YZ ที่จุดใด

Solution

กำหนดให้ $P(2,4,-1)$ และ $Q(5,0,7)$

ดังนั้น $\overrightarrow{PQ}=[5-2,0-4,\ 7-(-1)]=[3,-4,8]$

นั่นคือเส้นตรง L จะขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และผ่านจุด $P(2,4,-1)$ และ $Q(5,0,7)$

ให้เส้นตรง L ขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ และผ่านจุด $P(2,4,-1)$

จะได้ $P(x_1,y_1,z_1)=P(2,4,-1)$

และ $\vec{v}=[a,b,c]=[3,-4,8]$ นั่นคือ $a=3,\ \ b=-4,\ \ c=8$

ดังนั้นสมการคือ $x=2+3t,\quad y=4-4t,\quad z=-1+8t$

Example 2

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$ และเส้นตรงตัดระนาบ XY และระนาบ YZ ที่จุดใด

Solution

จุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ XY เส้นตรงตัดกับระนาบ XY ที่จุดเมื่อ $z=0$ นั่นคือ

จากสมการ $x=2+3t,\ y=4-2t,\ z=-1+8t$

จะได้ $-1+8t=0$ นั่นคือ $t=\frac{1}{8}$

จุดตัดคือ $(x,y,z)=\left(2+3\left(\frac{1}{8}\right),4-4\left(\frac{1}{8}\right),\ -1+8\left(\frac{1}{8}\right)\right)=\left(\frac{19}{8},\frac{7}{2},\ 0\right)$

จุดตัดของเส้นตรงกับระนาบ XY เส้นตรงตัดกับระนาบ YZ ที่จุดเมื่อ $x=0$ นั่นคือ

จากสมการ $x=2+3t,\ y=4-2t,\ z=-1+8t$

จะได้ $2+3t=0$ นั่นคือ $t=-\frac{2}{3}$

จุดตัดคือ $(x,y,z)=\left(2+3\left(-\frac{2}{3}\right),4-4\left(-\frac{2}{3}\right),\ -1+8\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

$$(x,y,z)=\left(0,\frac{20}{3},\ -\frac{19}{3}\right)$$

Example 2 จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$ และเส้นตรงตัดระนาบ XY และระนาบ YZ ที่จุดใด

Solution

หรือให้เส้นตรง L ขนานกับ $\overline{PQ}$ และผ่านจุด $Q(5,0,7)$

จะได้ $Q(x_1,y_1,z_1)=Q(5,0,7)$

และ $\vec{v}=[a,b,c]=[3,-4,8]$ นั่นคือ $a=3,\ \ b=-4,\ \ c=8$

ดังนั้นสมการคือ $x=5+3t,\quad y=-4t,\quad z=7+8t$

$P(x_1,y_1,z_1)=P(2,4,-1) \Rightarrow x=2+3t,\quad y=4-4t,\quad z=-1+8t$

$Q(x_1,y_1,z_1)=Q(5,0,7) \Rightarrow x=5+3t,\quad y=-4t,\quad z=7+8t$

จะเห็นว่าถึงแม้ว่าสมการอิงตัวแปรเสริมที่พิจารณาจากจุด P และ Q จะเขียนแตกต่างกัน แต่สมการทั้งสองนี้สมมูลกัน โดยที่ L มีค่าเป็นจำนวนจริงใดๆ นั่นคือ $-\infty \le t \le \infty$

ส่วนของเส้นตรง

การหาสมการอิงตัวแปรเสริมบางกรณีอาจไม่สนใจเส้นตรงทั้งหมด โดยจะสนใจส่วนของเส้นตรง (line segment) เนื่องจากส่วนของเส้นตรงเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมของส่วนของเส้นตรงจะมีสมการเช่นเดียวกับสมการของเส้นตรง เพียงแต่ต้องกำหนดช่วงของค่า t เพื่อกำหนดโดเมนของส่วนของเส้นตรงนั้นๆ

Example 3

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$

Solution

สมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P(2,4,-1)$ และ $Q(5,0,7)$

ดังนั้นสมการคือ $x=2+3t, y=4-4t, z=-1+8t$

จะได้จุดใดๆ บนเส้นตรงคือ $(x,y,z)=\left(2+3t, 4-4t, -1+8t\right)$

เส้นตรงจะผ่านจุด $P(2,4,-1)$ เมื่อ $t=0$

และเส้นตรงจะผ่านจุด $Q(5,0,7)$ เมื่อ $t=1$

ดังนั้น จะได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$ มีสมการอิงตัวแปรเสริม ดังนี้

$$x=2+3t, y=4-4t, z=-1+8t \text{ เมื่อ } 0\le t\le 1$$

สมการเวกเตอร์ของเส้นตรง

จะกล่าวถึงรูปเวกเตอร์ที่แสดงในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นตรง เนื่องจากเวกเตอร์สองเวกเตอร์ใดๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนประกอบทั้งสองเท่ากัน ดังนั้น สมการ $x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$ เราทราบว่าถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด (x_1, y_1, z_1) และขนานกับเวกเตอร์ $[a, b, c]$ มีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ $x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$

จะได้เวกเตอร์

$$[x, y, z] = [x_1 + at,\ y_1 + bt,\ z_1 + ct]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + [at, bt, ct]$$

$$[x, y, z] = [x_1, y_1, z_1] + t[a, b, c]$$

ถ้ากำหนดให้ $\vec{r} = [x, y, z]$, $\vec{r_1} = [x_1, y_1, z_1]$ และ $\vec{v} = [a, b, c]$

$\vec{r} = \vec{r_1} + t\vec{v}$ → เป็นสมการเวกเตอร์ของเส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

Example 4

จงหาสมการเวกเตอร์ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(6,-3,5)$ และขนานกับเวกเตอร์ $[-4,3,2]$

Solution

กำหนดให้ $(x_1,y_1,z_1)=(6,-3,5)$ และ $[a,b,c]=[-4,3,2]$

จากสมการ $[x,y,z]=[x_1,y_1,z_1]+t[a,b,c]$ จะได้สมการเวกเตอร์ของเส้นตรงคือ

$$[x,y,z]=[6,-3,5]+t[-4,3,2]$$

Example 5 จงหาสมการเวกเตอร์ของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด $(2,4,-1)$ และ $(5,0,7)$

Solution

กำหนดให้ $P(2,4,-1)$ และ $Q(5,0,7)$

ดังนั้น $\overrightarrow{PQ} = [5-2, 0-4, 7-(-1)] = [3,-4,8]$

นั่นคือเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง $\vec{v} = [a,b,c] = [3,-4,8]$

ส่วน $\vec{r_1} = [x_1, y_1, z_1]$ เป็นเวกเตอร์จากจุดกำเนิดไปยังจุด $P(2,4,-1)$ หรือ จากจุดกำเนิดไปยังจุด $Q(5,0,7)$ ในที่นี้ใช้ $P(2,4,-1)$ จะได้ $\vec{r_1} = [x_1, y_1, z_1] = [2,4,-1]$

ดังนั้นจากสมการเวกเตอร์ $[x,y,z] = [x_1, y_1, z_1] + t[a,b,c]$

จะได้ $[x,y,z] = [2,4,-1] + t[3,4,-8]$

Example 6

จงพิจารณาว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันหรือไม่ เมื่อกำหนดให้

$$L_1 : x = 2 - 3t,\ y = 1 + 5t,\ z = 3 - t$$

$$L_2 : x = 4 + t,\ y = 3 - 2t,\ z = 4 + 6t$$

Solution

จะได้สมการเวกเตอร์ของ L_1 และ L_2 ดังนี้

สมการเวกเตอร์ของ L_1 คือ $[x, y, z] = [2,1,3] + t[-3,5,-1]$

สมการเวกเตอร์ของ L_2 คือ $[x, y, z] = [4,3,4] + t[1,-2,6]$

จะได้ เส้นตรง L_1 ขนานกับ $[-3,5,-1]$ และ

เส้นตรง L_2 ขนานกับ $[1,-2,6]$

เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันเมื่อ $[-3,5,-1]$ และ $[1,-2,6]$ ขนานกัน

Example 6 (ต่อ)

ซึ่ง เวกเตอร์ $[-3,5,-1]$ ขนานกับ $[1,-2,6]$ เมื่อมีค่า k ที่ทำให้ $[-3,5,-1]=k[1,-2,6]$

จะเห็นว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริงได้

ดังนั้น แสดงว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ไม่ขนานกัน

Example 7

กำหนดให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงดังนี้

$$L_1 : x = 1 + 4t,\ y = 5 - 4t,\ z = -1 + 5t$$

$$L_2 : x = 2 + 8t,\ y = 4 - 3t,\ z = 5 + t$$

ก. เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันหรือไม่

Solution

จะได้สมการเวกเตอร์ของ L_1 และ L_2 ดังนี้

สมการเวกเตอร์ของ L_1 คือ $[x, y, z] = [1, 5, -1] + t[4, -4, 5]$

สมการเวกเตอร์ของ L_2 คือ $[x, y, z] = [2, 4, 5] + t[8, -3, 1]$

จะได้ เส้นตรง L_1 ขนานกับ $[4, -4, 5]$ และ

เส้นตรง L_2 ขนานกับ $[8, -3, 1]$

Example 7 (ต่อ)

เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกันเมื่อ $[4,-4,5]$ และ $[8,-3,1]$ ขนานกัน

ซึ่ง เวกเตอร์ $[4,-4,5]$ ขนานกับ $[8,-3,1]$ เมื่อมีค่า k ที่ทำให้ $[4,-4,5]=k[8,-3,1]$

จะเห็นว่าไม่มีค่า k ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริงได้

ดังนั้น แสดงว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ไม่ขนานกัน

ข. เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่

Solution

Example 7 (ต่อ)

ข. เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่

Solution ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุดใดๆ (x_1, y_1, z_1) จุดนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการทั้งสอง หรือ

กล่าวได้ว่าจะมีค่าของ t_1 และ t_2 สำหรับตัวแปรเสริมดังนี้

$$x_1 = 1 + 4t,\ y_1 = 5 - 4t,\ z_1 = -1 + 5t \quad \text{และ}$$

$$x_1 = 2 + 8t,\ y_1 = 4 - 3t,\ z_1 = 5 + t$$

จะได้ 3 เงื่อนไขของ t_1 และ t_2 ดังนี้

$$1 + 4t_1 = 2 + 8t_2 \tag{9}$$

$$5 - 4t_1 = 4 - 3t_2 \tag{10}$$

$$-1 + 5t_1 = 5 + t_2 \tag{11}$$

Example 7 (ต่อ)

เส้นตรงทั้งสองตัดกัน ถ้าสามารถหาค่า t_1 และ t_2 ที่ทำให้สมการเป็นจริงทุกสมการ และ เส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกัน ถ้าไม่สามารถหาค่า t_1 และ t_2 ที่ทำให้สมการเป็นจริงทุกสมการ

สมการที่ (9) + สมการที่ (10) จะได้ $\quad 6 = 6 + 5t_2$

$$t_2 = 0$$

แทนค่า $t_2 = 0$ ในสมการที่ (9) จะได้ $\quad 1 + 4t_1 = 2 + 8(0)$

$$1 + 4t_1 = 2$$

$$t_1 = \frac{1}{4}$$

แทนค่า $t_1 = \frac{1}{4}$ และ $t_2 = 0$ ในสมการที่ (11) จะได้

$$-1 + 5\left(\frac{1}{4}\right) \neq 5 + (0)$$

จะเห็นว่า สมการไม่เป็นจริงทุกสมการ ดังนั้นเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกัน

Assignment 2

- ให้ทำคำถามท้ายบทที่ 1 ข้อ 11-13