

บทที่ 1

การวิเคราะห์เวกเตอร์

Vector Analysis

Arnon Isaramongkolrak

Department of Electrical Engineering
Nakhon pathom Rajabhat University

หัวข้อการบรรยาย

- การบวกและลบเวกเตอร์
- ส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์
- การคูณเวกเตอร์
- ระบบพิกัดทรงกระบอกและการแปลงระบบพิกัด
- ระบบพิกัดทรงกลมและการแปลงระบบพิกัด

สเกลาร์และเวกเตอร์

- ปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีเฉพาะขนาด หรือมีเฉพาะจำนวนจริง (+,-) นั้นเอง เช่น อุณหภูมิ เวลา ระยะทาง พื้นที่ น้ำหนัก ปริมาตร เป็นต้น
- ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง หรือมีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ เช่น ความเข้มสนามไฟฟ้า ความเข้มสนามแม่เหล็ก เป็นต้น
- ดังนั้น วิชาสนามแม่เหล็กไฟฟ้า จะมีความเกี่ยวข้องกับปริมาณเวกเตอร์เสมอ โดยในที่นี้จะแทนตัวแปรที่เป็นปริมาณเวกเตอร์ด้วยตัวหนา

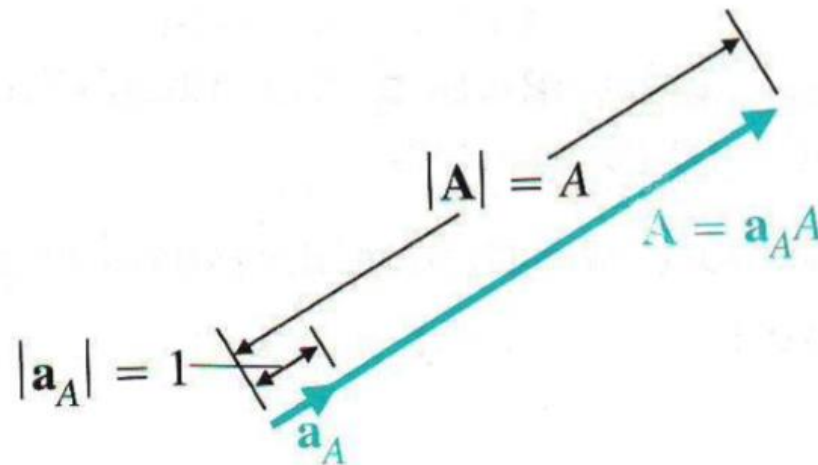
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ใดๆ ซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A} = a_A \mathbf{A}$$

เมื่อ A คือขนาดของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{a}_A$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector) ใช้สำหรับกำกับทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ซึ่งมีขนาดเป็น 1 เสมอและไม่มีหน่วย

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}$$



การบวกและการลบเวกเตอร์

เวกเตอร์ **A** และเวกเตอร์ **B** แสดงดังรูป สามารถบวกกันเป็นเวกเตอร์ **C** ได้

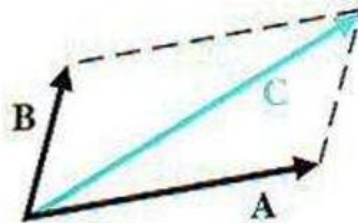
โดยการแทนด้วยรูปกราฟ 2 วิธีคือ

1. วิธีสี่เหลี่ยมด้านขนาน

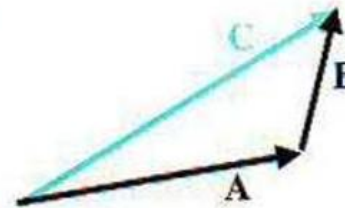
2. วิธีหางต่อหัว วิธีนี้ทำให้ทราบว่า $C = A + B = B + A$



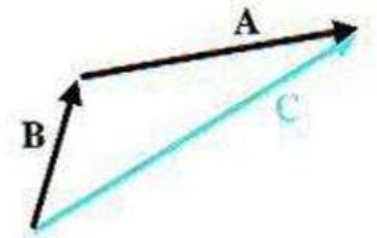
(a) Two vectors, A and B.



(b) Parallelogram rule.



(c) Head-to-tail rule,
 $A + B$.



(d) Head-to-tail rule,
 $B + A$.

การบวกและการลบเวกเตอร์

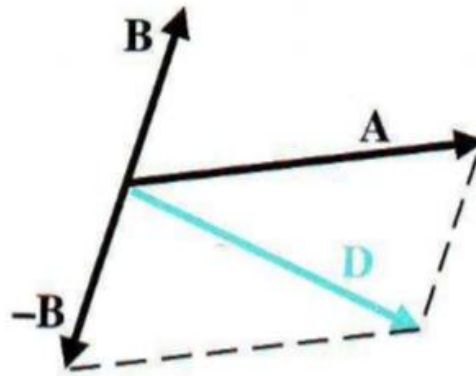
เวกเตอร์ **A** และเวกเตอร์ **B** แสดงดังรูป สามารถลบกันเป็นเวกเตอร์ **D** ได้

โดยอาศัยความรู้ของการบวกกันของเวกเตอร์ คือ $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$

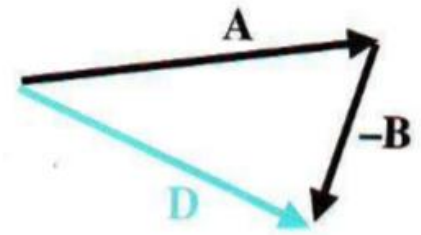
ในกรณีที่ $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ แสดงว่า $\mathbf{A} = \mathbf{B}$



(a) Two vectors, **A** and **B**.



(b) Parallelogram rule.



(c) Head-to-tail rule.

ส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์

เวกเตอร์ **A** ในระบบพิกัดฉาก หรือระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เขียนแสดงได้ด้วย

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z$$

โดยที่ a_x, a_y, a_z คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ

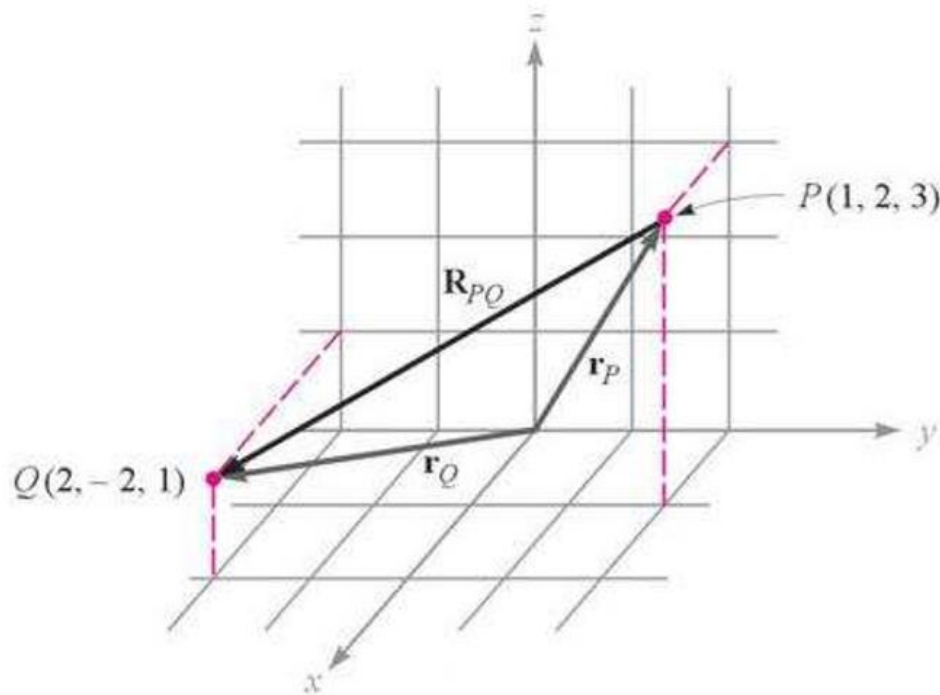
โดยที่ $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ คือส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ **A** ในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ

ส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์

เมื่อทราบถึงส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ จึงดำเนินการหาเวกเตอร์ระยะทางได้

ถ้าจุด P และ Q อยู่ที่ $(1,2,3)$ และ $(2,-2,1)$ ตามลำดับ ดังนั้นเวกเตอร์ระยะทาง

ก็คือ การกระจัดจากจุด P ไปยังจุด Q



$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$$

$$\mathbf{R}_{PQ} = (2-1)\mathbf{a}_x + (-2-2)\mathbf{a}_y + (1-3)\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R}_{PQ} = \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้เวกเตอร์ $G = 2a_x - 2a_y - a_z$ จงหาขนาดของเวกเตอร์ G และ
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

วิธีทำ ขนาดของ G

$$|G| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$a_G = \frac{G}{|G|} = \frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y - \frac{1}{3}a_z$$

และขนาดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $|a_G| = 1$

การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ด้วยปริมาณสเกลาร์ k ที่มีค่าเป็นบวก จะส่งผลให้ขนาดของ $\mathbf{A}$ เปลี่ยนค่าไป k เท่า (k อาจจะมากกว่าหรือน้อยกว่า 1)

$$k\mathbf{A} = a_A (k\mathbf{A})$$

ซึ่งการคูณกันแบบทั่วไป สำหรับกรณีการคูณกันของสองเวกเตอร์นั้น ผลคูณที่ปรากฏ จะมีอยู่ 2 แบบได้แก่ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product)
และ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลลัพธ์ของการคูณที่ปรากฏจะเป็นปริมาณสเกลาร์ แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta_{AB}$$

โดยที่ θ_{AB} คือมุมระหว่าง $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0-180

จากค่ามุมจะเห็นว่า ผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าสูงสุดเท่ากับผลคูณของขนาดทั้งสองเวกเตอร์

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ขึ้นกับมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นศูนย์เมื่อเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกัน

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A} \quad (\text{กฎการสลับที่})$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z$ และ $\mathbf{B} = b_x \mathbf{B}_x + b_y \mathbf{B}_y + b_z \mathbf{B}_z$

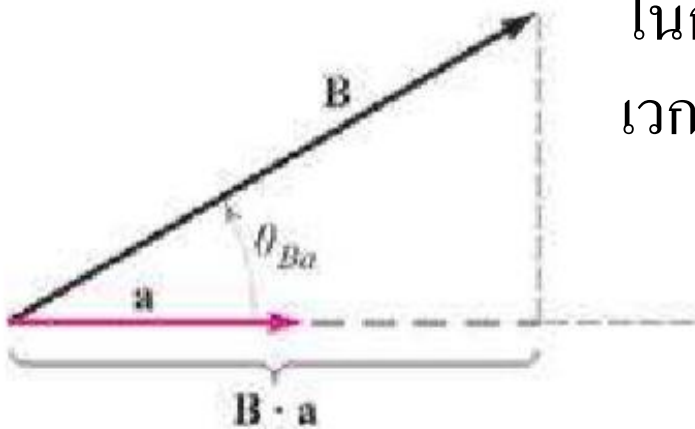
$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

เนื่องจาก $\cos 0^\circ = 1$ และ $\cos 90^\circ = 0$ เป็นที่มาของผลคูณแบบจุด

ประโยชน์ของผลคูณเชิงสเกลาร์จะทำให้ทราบถึงมุมระหว่างสองเวกเตอร์ได้

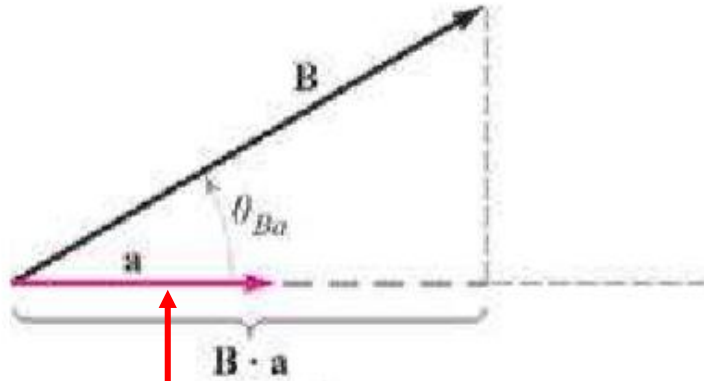
ประยุกต์ใช้กับปัญหาการหาส่วนประกอบของเวกเตอร์ในทิศทางที่กำหนดให้ได้

ในกรณีที่ต้องการทราบส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ ในทิศทางหนึ่งหน่วย



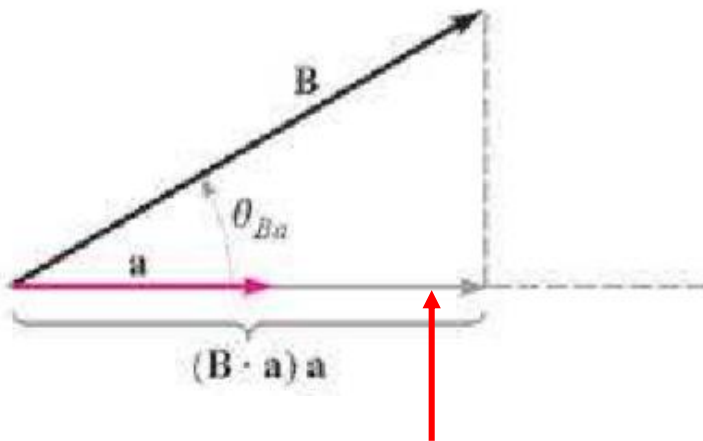
$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos \theta_{Ba}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์



$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{B}| |\mathbf{a}| \cos \theta_{Ba} = |\mathbf{B}| \cos \theta_{Ba}$$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ คือการฉาย (Projector) ของเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ ในทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{a}$



คือส่วนประกอบเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ ในทิศทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{a}$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้เวกเตอร์ $G = y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ และจุด $Q(4,5,2)$ จงหา

- 1) G ที่จุด $Q(4,5,2)$
- 2) ส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ G ที่จุด Q ในทิศทางของ $\mathbf{a}_N = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{1}{3}\mathbf{a}_y - \frac{2}{3}\mathbf{a}_z$
- 3) ส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ G ที่จุด Q ในทิศทางของ $\mathbf{a}_N$
- 4) มุม θ_{Ga} ระหว่าง $G(\mathbf{r}_Q)$ และ $\mathbf{a}_N$

วิธีทำ

$$1) \quad G(\mathbf{r}_Q) = 5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

$$2) \quad G \cdot \mathbf{a}_N = (5\mathbf{a}_x - 10\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z)$$

$$G \cdot \mathbf{a}_N = \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้เวกเตอร์ $G = y\mathbf{a}_x - 2.5x\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$ และจุด $Q(4,5,2)$ จงหา

- 1) G ที่จุด $Q(4,5,2)$
- 2) ส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ G ที่จุด Q ในทิศทางของ $\mathbf{a}_N = \frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{1}{3}\mathbf{a}_y - \frac{2}{3}\mathbf{a}_z$
- 3) ส่วนประกอบเชิงสเกลาร์ของ G ที่จุด Q ในทิศทางของ $\mathbf{a}_N$
- 4) มุม θ_{Ga} ระหว่าง $G(r_Q)$ และ $\mathbf{a}_N$

วิธีทำ

$$3) (G \cdot \mathbf{a}_N) \mathbf{a}_N = (-2) \left(\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{1}{3}\mathbf{a}_y - \frac{2}{3}\mathbf{a}_z \right) = -1.33\mathbf{a}_x - 0.67\mathbf{a}_y + 1.33\mathbf{a}_z$$

$$4) G \cdot \mathbf{a}_N = |G| \cos \theta_{Ga} \Rightarrow \theta_{Ga} = \cos^{-1} \frac{-2}{\sqrt{25+100+9}} = 99.9^\circ$$

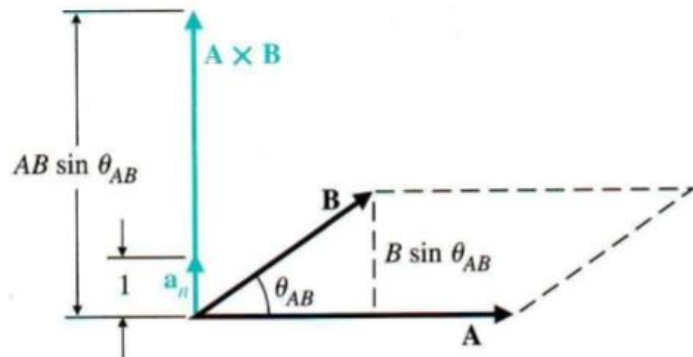
ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือผลคูณไขว้

ผลลัพธ์ของการคูณที่ปรากฏจะเป็นปริมาณเวกเตอร์ แสดงได้ดังนี้

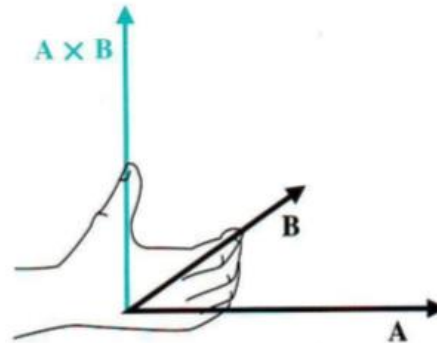
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_N |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB}$$

โดยที่ θ_{AB} คือมุมระหว่าง $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0-180 ซึ่งใช้กฎมือขวาในการพิจารณา

กฎมือขวา



(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_n AB \sin \theta_{AB}$.



(b) The right-hand rule.

นิ้วทั้งสี่กำจาก $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

นิ้วหัวแม่มือคือทิศทางของ
เวกเตอร์ลัพธ์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือผลคูณไขว้

ปริมาณ $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin \theta_{AB}$ จะไม่มีค่าเป็นลบ (เป็นบวกหรือศูนย์) ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ประกอบด้วยด้าน $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ จะได้

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ & + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ & + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

ซึ่ง $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$

ในกรณีที่ครอสไปอีกด้านหนึ่งจะมีค่าเป็นลบ เช่น $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$

ในกรณีที่ครอสตัวเอง จะมีค่าเป็นศูนย์ เช่น $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = 0$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือผลคูณไขว้

ดังนั้นสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & A_x B_x \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x + A_x B_y \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y + A_x B_z \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z \\ & + A_y B_x \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x + A_y B_y \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y + A_y B_z \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z \\ & + A_z B_x \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x + A_z B_y \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_y + A_z B_z \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z\end{aligned}$$



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z$$



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ และ $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ จงหา $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

วิธีทำ

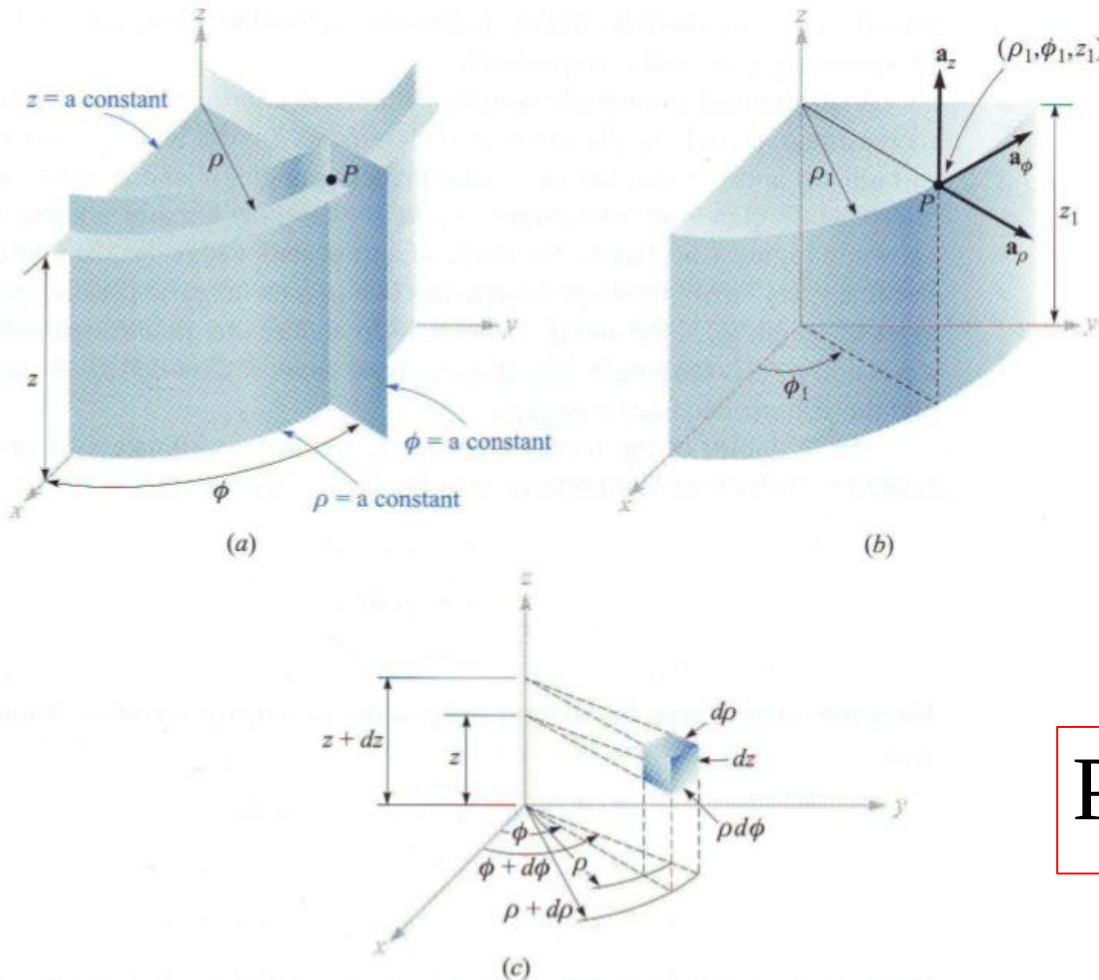
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(5) - (1)(-2)] \mathbf{a}_x - [(2)(5) - (1)(-4)] \mathbf{a}_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)] \mathbf{a}_z$$

$$= -13\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y - 16\mathbf{a}_z$$

ระบบพิกัดทรงกระบอกและการแปลงระบบพิกัด

เวกเตอร์ ณ จุดใดๆ ในระบบพิกัดทรงกระบอกจะประกอบไปด้วย 3 ระนาบคือ



ระนาบ ρ แทนรัศมีของ
ทรงกระบอก

ระนาบ ϕ แทนมุมที่วัด
จากระนาบ $X+$

ระนาบ z แทนความสูง
ของทรงกระบอก

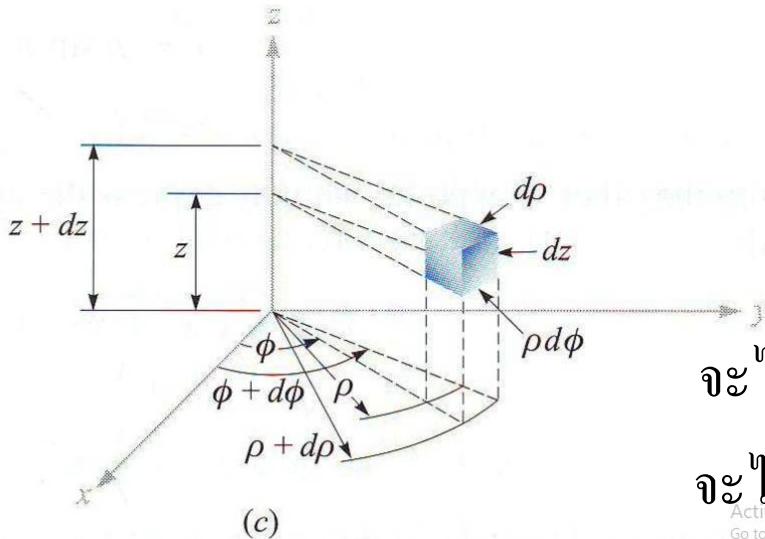
$$\mathbf{P} = \rho_1 \mathbf{a}_\rho + \phi_1 \mathbf{a}_\phi + z_1 \mathbf{a}_z$$

ระบบพิกัดทรงกระบอกและการแปลงระบบพิกัด

การคูณกันแบบคอต และ การคูณกันแบบครอสของระบบพิกัดทรงกระบอกจะมีลักษณะเหมือนระบบพิกัดฉากทุกประการ โดยที่

ในกรณีที่คูณกันแบบครอสให้เริ่มต้นที่ทิศทาง ρ ไปยัง ϕ และไปยัง z

$$\text{ดังนั้น } \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho \quad \text{และ} \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\phi$$



เมื่อระยะ ρ เพิ่มขึ้นเป็น $\rho + d\rho$

เมื่อระยะ ϕ เพิ่มขึ้นเป็น $\phi + d\phi$

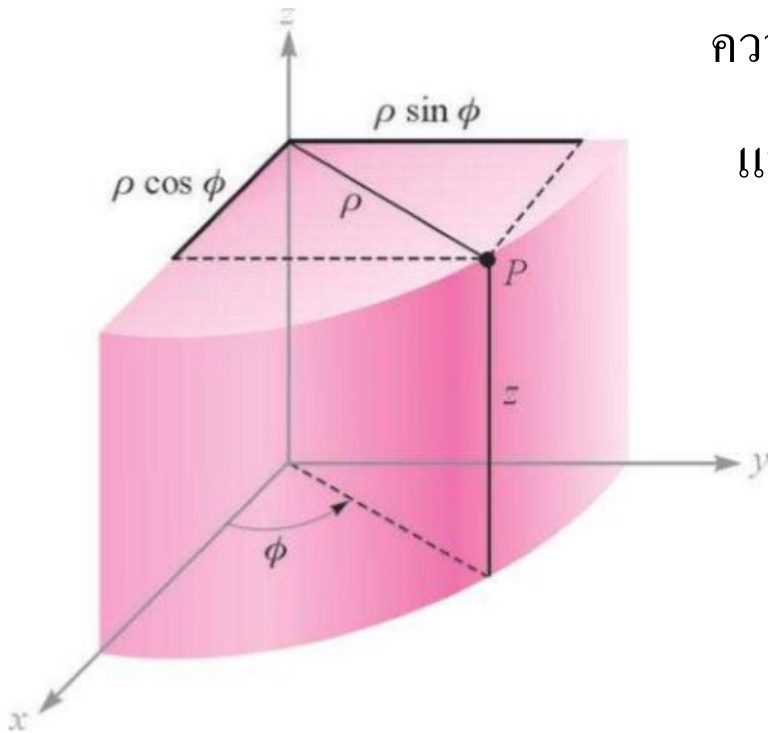
เมื่อระยะ z เพิ่มขึ้นเป็น $z + dz$

จะได้ความยาวทั้งสามระยะเป็น $d\rho, \rho d\phi, dz$

จะได้พื้นที่ทั้งสามระยะเป็น $\rho d\phi dz, d\rho dz, \rho d\rho dz$

และมีปริมาตรเป็น $\rho d\rho d\phi dz$

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระบบพิกัด



ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x, y, z ของระบบพิกัดฉาก
และตัวแปร ρ, ϕ, z ของระบบพิกัดทรงกระบอก

อ้างอิงระบบพิกัดฉากจะได้

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

$$z = z$$

อ้างอิงระบบพิกัดทรงกระบอกจะได้

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

ต้องพิจารณาควอดแรนต์ด้วย

การแปลงระบบพิกัด

ระบบพิกัดฉาก

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z$$

ระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\mathbf{A} = a_\rho \mathbf{A}_\rho + a_\phi \mathbf{A}_\phi + a_z \mathbf{A}_z$$

การแปลงระบบพิกัดจะใช้หลักการคูณกันแบบคอต มาพิจารณาดังนี้

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

$$A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_z = A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = A_z$$

ซึ่ง $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho$ และ $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi$ มีค่าเป็นศูนย์ (เนื่องจากตั้งฉากกัน) โดยที่การคูณกันแบบคอตจะขึ้นอยู่กับโคไซน์ของมุมระหว่างสองเวกเตอร์ ดังนั้นมุมระหว่าง $\mathbf{a}_x$ และ $\mathbf{a}_\rho$ คือ $\phi \therefore \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos \phi$ แต่มุมระหว่าง $\mathbf{a}_y$ และ $\mathbf{a}_\rho$ คือ $90^\circ - \phi \therefore \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ หรือสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

การแปลงระบบพิกัด

ตารางที่ 1.1 การคูณกันแบบดอทของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก

	$\mathbf{a}_\rho$	$\mathbf{a}_\phi$	$\mathbf{a}_z$
$\mathbf{a}_{x'}$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$\mathbf{a}_{y'}$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\mathbf{a}_{z'}$	0	0	1

ตัวอย่างที่ 4

จงแปลงเวกเตอร์ $\mathbf{B} = y\mathbf{a}_x - x\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$ ให้เป็นระบบพิกัดทรงกระบอก

วิธีทำ

$$B_\rho = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\rho = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho)$$

$$= y \cos \phi - x \sin \phi$$

$$= \rho \sin \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \sin \phi = 0$$

$$B_\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_\phi = y(\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi) - x(\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi)$$

$$= -y \sin \phi - x \cos \phi$$

$$= -\rho \sin^2 \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho$$

$$\text{จึงได้ } \mathbf{B} = -\rho \mathbf{a}_\phi + z \mathbf{a}_z$$

ตัวอย่างที่ 5

กำหนดให้เวกเตอร์ $A = (3\cos\phi)\mathbf{a}_\rho - 2\rho\mathbf{a}_\phi + z\mathbf{a}_z$ จงหา

- 1) A ที่ตำแหน่ง $P(4, 60^\circ, 5)$ 2) A_P ที่ P ในระบบพิกัดฉาก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathbf{A}_P &= (3\cos 60^\circ)\mathbf{a}_\rho - (2 \times 4)\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z \\ &= (3/2)\mathbf{a}_\rho - 8\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

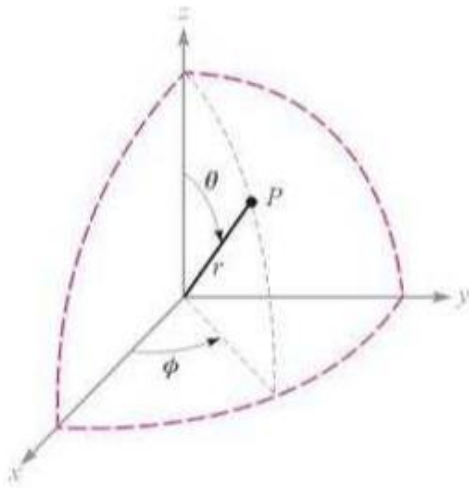
$$\begin{aligned} \text{(b) } A_x &= \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{a}_x = [(3/2)\mathbf{a}_\rho - 8\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z] \cdot \mathbf{a}_x \\ &= (3/2)\cos 60^\circ + 8\sin 60^\circ \\ &= 7.68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_y &= \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{a}_y = [(3/2)\mathbf{a}_\rho - 8\mathbf{a}_\phi + 5\mathbf{a}_z] \cdot \mathbf{a}_y \\ &= (3/2)\sin 60^\circ - 8\cos 60^\circ \\ &= -2.70 \end{aligned}$$

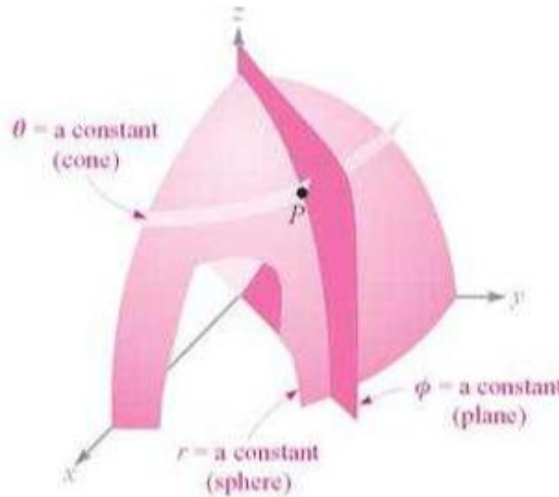
$$\text{จึงได้ } \mathbf{A}_P = 7.68\mathbf{a}_x - 2.70\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

ระบบพิกัดทรงกลมและการแปลงระบบพิกัด

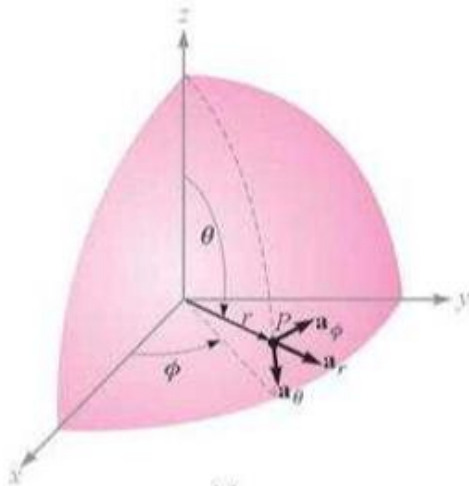
เวกเตอร์ ณ จุดใดๆ ในระบบพิกัดทรงกลมจะประกอบไปด้วย 3 ระนาบคือ



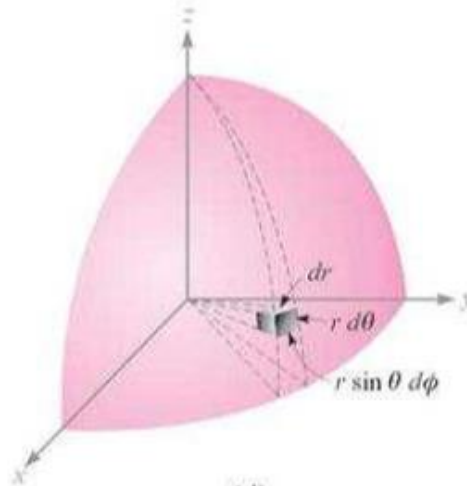
(a)



(b)



(c)



(d)

ระนาบ r แทนรัศมีของทรงกลม

ระนาบ θ แทนมุมระหว่างแกน Z กับรัศมีของจุด P

ระนาบ ϕ แทนมุมที่วัด

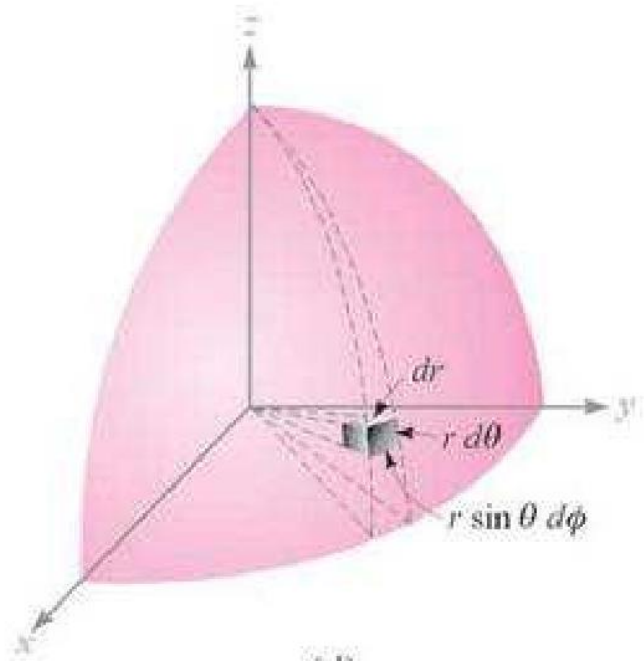
จากแกน $x +$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

ระบบพิกัดทรงกลมและการแปลงระบบพิกัด

การคูณกันแบบครอส ให้เริ่มต้นที่ทิศทาง r ไปยัง θ และไปยัง ϕ ตามลำดับ

ดังนั้น $\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$ $\mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_r$ และ $\mathbf{a}_\phi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta$



เมื่อระยะ r เพิ่มขึ้นเป็น $r + dr$

เมื่อระยะ θ เพิ่มขึ้นเป็น $\theta + d\theta$

เมื่อระยะ ϕ เพิ่มขึ้นเป็น $\phi + d\phi$

จะได้ความยาวทั้งสามระยะเป็น $dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi$

จะได้พื้นที่ทั้งสามระยะเป็น $r^2 \sin \theta d\theta d\phi,$
 $r \sin \theta dr d\phi,$
 $r dr d\theta$

และมีปริมาตรเป็น $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรระบบพิกัด

ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x, y, z ของระบบพิกัดฉาก
และตัวแปร r, θ, ϕ ของระบบพิกัดทรงกลม

อ้างอิงระบบพิกัดฉากจะได้

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

อ้างอิงระบบพิกัดทรงกลมจะได้

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\theta = (0 - 180^\circ)$$

การแปลงระบบพิกัด

ระบบพิกัดฉาก

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z$$

ระบบพิกัดทรงกลม

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

การแปลงระบบพิกัดยังใช้หลักการคูณกันแบบคอต มาพิจารณาเหมือนเดิม

$$A_r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r = A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi - A_z \sin \theta$$

$$A_\phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

หรือสรุปเป็นตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 1.2 การคูณกันแบบคอตของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม

	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_\theta$	$\mathbf{a}_\phi$
$\mathbf{a}_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$\mathbf{a}_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$\mathbf{a}_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

โจทย์ปัญหาที่ 1

กำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{M} = -10\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 8\mathbf{a}_z$ และ $\mathbf{N} = 8\mathbf{a}_x + 7\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$ จงหา

(a) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $-\mathbf{M} + 2\mathbf{N}$ (Ans: $0.92\mathbf{a}_x + 0.36\mathbf{a}_y + 0.14\mathbf{a}_z$)

(b) ขนาดของ $5\mathbf{a}_x + \mathbf{N} - 3\mathbf{M}$ (Ans: 48.6)

(a) $|\mathbf{M}|2\mathbf{N}(\mathbf{M} + \mathbf{N})$ (Ans: $-580.5\mathbf{a}_x + 3193\mathbf{a}_y - 2902\mathbf{a}_z$)

โจทย์ปัญหาที่ 2

สนามเวกเตอร์ $\mathbf{G} = [25/(x^2 + y^2)](x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y)$ จงหา

(a) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\mathbf{G}$ ที่จุด $P(3, 4, -2)$ (Ans: $0.6\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y$)

(b) มุมที่อยู่ระหว่าง $\mathbf{G}$ กับ $\mathbf{a}_x$ ที่จุด P (Ans: 53°)

โจทย์ปัญหาที่ 3

เวกเตอร์ 3 อันพุ่งออกจากจุดกำเนิด โดยมีค่า $\mathbf{r}_1 = (7, 3, -2)$, $\mathbf{r}_2 = (-2, 7, -3)$ และ $\mathbf{r}_3 = (0, 2, 3)$ จงหา

- (a) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ (Ans: (0.08, 0.41, 0.91))
- (b) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ และ $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3$ (Ans: (0.30, 0.81, 0.50))
- (c) พื้นที่สามเหลี่ยมที่เกิดจากเวกเตอร์ $\mathbf{r}_1$ และ $\mathbf{r}_2$ (Ans: 30.3)
- (d) พื้นที่สามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ และ $\mathbf{r}_3$ (Ans: 32.0)

โจทย์ปัญหาที่ 4

จงเขียนสมการให้เป็นส่วนประกอบในพิกัดทรงกระบอก

- (a) เวกเตอร์จาก $C(3, 2, -7)$ ไป $D(-1, -4, 2)$ (Ans: $-6.66\mathbf{a}_\rho - 2.77\mathbf{a}_\phi + 9\mathbf{a}_z$)
- (b) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยจาก D ไป C (Ans: $-0.59\mathbf{a}_\rho + 0.21\mathbf{a}_\phi - 0.78\mathbf{a}_z$)
- (c) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยจาก D ไปจุดกำเนิด (Ans: $-0.90\mathbf{a}_\rho - 0.44\mathbf{a}_z$)

โจทย์ปัญหาที่ 5

ถ้ากำหนดจุด $P(r = 0.8, \theta = 30^\circ, \phi = 45^\circ)$ และ $\mathbf{E} = 1/r^2 (\cos \phi \mathbf{a}_r + \sin \phi / \sin \theta \mathbf{a}_\phi)$ จงหา

(a) $\mathbf{E}$ ที่ P (Ans: $1.10\mathbf{a}_r + 2.21\mathbf{a}_\phi$)

(b) $|\mathbf{E}|$ ที่ P (Ans: 2.47)

(c) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\mathbf{E}$ ที่ P (Ans: $0.45\mathbf{a}_r + 0.89\mathbf{a}_\phi$)