Vector Function
ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

By ARNON ISARAMONGKOLRAK
ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
NAKHONPATHOM RAJABHAT UNIVERSITY

Contents

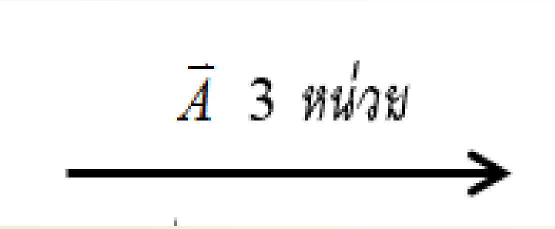
- ปริมาณทางกายภาพ
- เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
- ผลคูณเชิงสเกล่าร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ
- เส้นตรงและระนาบใน 3 มิติ

ปริมาณทางกายภาพ

- ปริมาณสเกลาร์
  - บ่งบอกเพียงขนาดอย่างเดียวก็ทำให้ได้ใจความที่สมบูรณ์
  - นิยมเขียนสัญลักษณ์ด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษหรือกรีก
  - สามารถดำเนินการทางด้านพีชคณิตได้โดยตรง
  - มวล ความยาว ความหนาแน่น อุณหภูมิ งาน พลังงาน ปริมาตร เป็นต้น

ปริมาณทางกายภาพ (ต่อ)

- ปริมาณเวกเตอร์
  - จำเป็นต้องบ่งบอกทั้งขนาดและทิศทางเพื่อให้ได้ใจความที่สมบูรณ์
  - สัญลักษณ์จะใช้ความยาวเส้นแทนขนาด และหัวลูกศรแทนทิศทาง
  - แรง ความเร็ว ความเร่ง สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้า เป็นต้น



หมายถึง เวกเตอร์ A มีขนาด 3 หน่วยทิศทางไปทางขวา

ปริมาณทางกายภาพ (ต่อ)

ตอบได้หรือไม่ ภาพดังกล่าวบ่งบอกถึงปริมาณสเกล่าร์ หรือปริมาณเวกเตอร์ใดบ้าง ?????

Example 1

- นายมาริโอ้มีน้ำหนัก 70 kg และมีส่วนสูง 1.80 m ถ้าโลกนี้มีนายมาริโอ้อยู่ 7 คน อยากทราบว่าผลรวมของน้ำหนักและผลรวมของส่วนสูงของมาริโอ้ทั้ง 7 คนจะเป็นเท่าไหร่

- Solution : มาริโอ้ 1 คนหนัก 70 kg มาริโอ้ 7 คนจะหนัก 7x70 = 490 kg

  มาริโอ้ 1 คนสูง 1.80 m มาริโอ้ 7 คนจะสูง 7x1.80 = 12.60 m

ดังนั้น ผลรวมของน้ำหนักของมาริโอ้ทั้ง 7 คนเป็น 490kg

ผลรวมของส่วนสูงของมาริโอ้ทั้ง 7 คนเป็น 12.60 m

*** หมายเหตุ การบวกลบทางพีชคณิตของปริมาณสเกล่าร์ สามารถกระทำได้เลย

เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

- กำหนดให้เวกเตอร์ A ซึ่งอยู่ในปริภูมิ 3 มิติมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและมีจุดปลายที่จุด(a_1, a_2, a_3)

$$\overrightarrow{A} = [a_1, a_2, a_3]$$ เรียกว่าเวกเตอร์ตำแหน่ง (Position Vector)

$$\overrightarrow{A} = [0, 0, 0]$$ เรียกว่าเวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector)

- ในกรณีที่เวกเตอร์ไม่ได้มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด เช่น $P(x_1, y_2, z_3)$ และจุดปลายที่จุด $Q(x_1, y_2, z_3)$ สามารถเขียนสัญลักษณ์แทนได้เป็น $\overrightarrow{PQ}$

การบวกและการคูณด้วยสเกล่าร์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง

- กำหนดให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{A}=[a_1,a_2,a_3]$ และ $\overrightarrow{B}=[b_1,b_2,b_3]$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติแล้ว

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=[a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3]$$

$$\overrightarrow{kA}=[ka_1,ka_2,ka_3]$$

- เวกเตอร์ $\overrightarrow{A}=[a_1,a_2,a_3]$ และ $\overrightarrow{B}=[b_1,b_2,b_3]$ จะเป็นเวกเตอร์ที่เท่ากันหรือเวกเตอร์เดียวกันเมื่อ

$$a_1=b_1 \qquad a_2=b_2 \qquad a_3=b_3$$

สมบัติบางประการที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณด้วยสเกล่าร์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง

- ถ้า $\vec{A}$ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ และ k m เป็นสเกล่าร์แล้วจะได้

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

$$\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$$

$$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$$

$$k(m\vec{A})=(km)\vec{A}$$

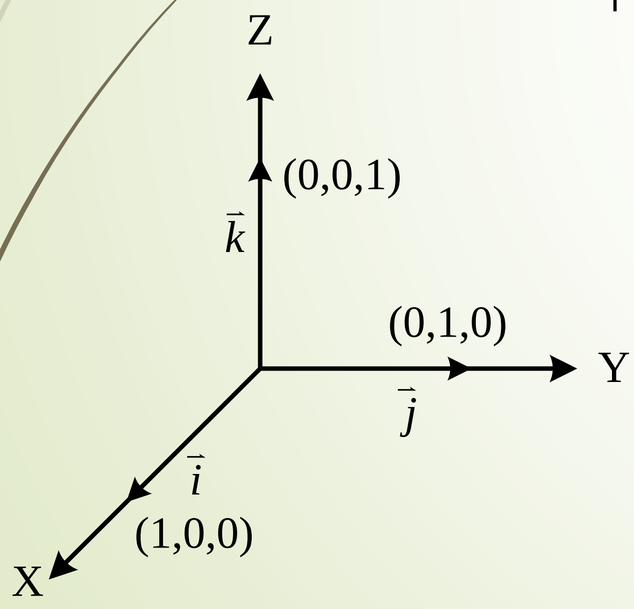
$$k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}$$

$$(k+m)\vec{A}=k\vec{A}+m\vec{A}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

- ให้ $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติเรียกระยะทางจากจุดกำเนิดถึงจุด (a_1,a_2,a_3) ว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแทนด้วย $|\vec{A}|$

$$|\vec{A}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$



เรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกล่าร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

- การนำเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์มาคูณกันจะเกิดผลลัพธ์ได้ 2 แบบคือ
  - ผลลัพธ์เป็นสเกล่าร์ เรียกว่า ผลคูณเชิงสเกล่าร์ (dot product)
  - ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ เรียกว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product)
- บทนิยาม 4 ผลคูณเชิงสเกล่าร์

ให้ $\vec{A}$ และ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ โดยที่ $0 \le \theta \le 180$

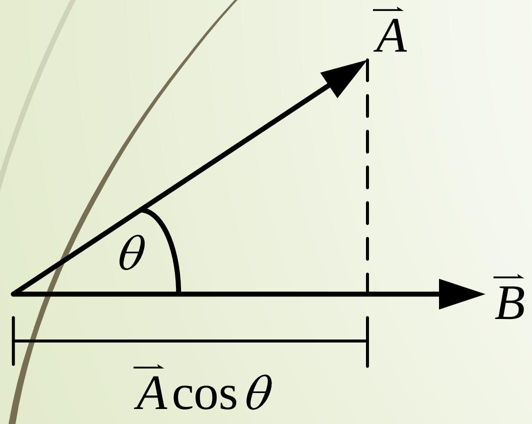
ผลคูณเชิงสเกล่าร์ของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เขียนแทนด้วย $\vec{A} \bullet \vec{B}$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \begin{cases} \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta & , \quad \vec{A} \neq \vec{0} \;\&\&\; \vec{B} \neq \vec{0} \\ 0 & , \quad \vec{A} = \vec{0} \;\|\; \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

ผลคูณเชิงสเกล่าร์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง

- กำหนดให้ $\vec{A}=[a_1,a_2,a_3]$ และ $\vec{B}=[b_1,b_2,b_3]$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งในปริภูมิ 3 มิติแล้วจะได้ว่า

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

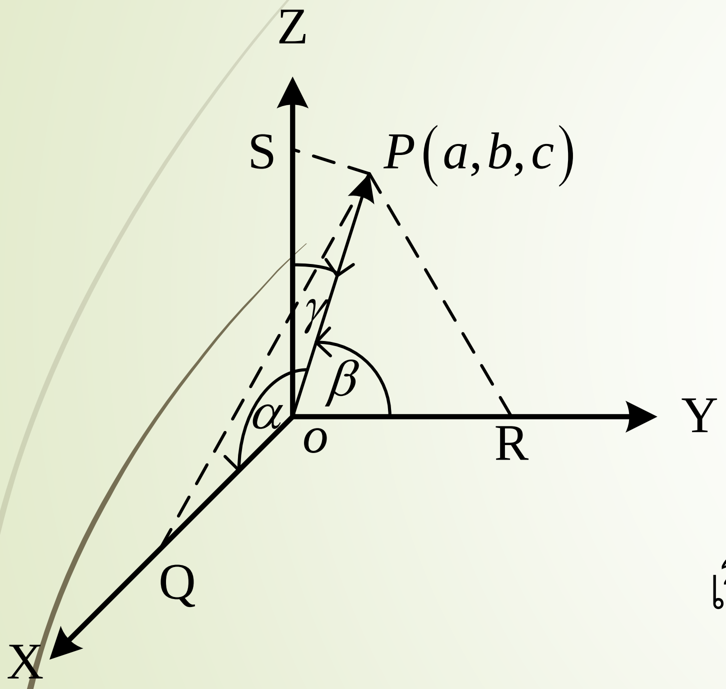


***ผลคูณเชิงสเกล่าร์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันจะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่เป็นศูนย์แล้วมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ สามารถหาได้จากโคไซน์กำหนดทิศทาง

โคไซน์กำหนดทิศทาง

ถ้า $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ไม่เป็นศูนย์แล้วมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ สามารถหาได้จากโคไซน์กำหนดทิศทาง



กำหนดจุด $\vec{O}=[0,0,0]$ และ $\vec{P}=[a,b,c]$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

และให้ $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in [0,\pi]$ เป็นมุมที่วัดจากพิกัดด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{OP}$

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a}{|\overrightarrow{OP}|} \qquad \cos\beta = \frac{OR}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{b}{|\overrightarrow{OP}|} \qquad \cos\gamma = \frac{OS}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{c}{|\overrightarrow{OP}|}$$

เรียก $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ว่ามุมกำหนดทิศทางของ $\overrightarrow{OP}$

เรียก $\cos\gamma,\ \cos\beta,\ \cos\alpha$ ว่าโคไซน์กำหนดทิศทางของ $\overrightarrow{OP}$

Example 2

- จงหาโคไซน์กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P(0,3,5)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(1,5,2)$
- Solution : $\overrightarrow{PQ} = [1-0,\ 5-3,\ 2-5]$ ➡ $\overrightarrow{PQ} = [1,\ 2,\ -3]$

หาขนาดเวกเตอร์จะได้ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1+4+9}$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{14}$$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{14}},\ \dfrac{2}{\sqrt{14}},\ \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$

นิยาม

เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกันและจะมีทิศทางตรงข้ามกันก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

Example 3

- จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้คู่ใดขนานกันโดยใช้โคไซน์แสดงทิศทาง

1. เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P(1,2,3)$ และสิ้นสุดที่ $Q(2,-3,5)$

2. $\vec{a}=[2,\ -10,\ 4]$

3. เวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ $R(-3,15,6)$

- Solution : พิจารณาข้อที่ 1

$$\overrightarrow{PQ}=[2-1,\ -3-2,\ 5-3] \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=[1,\ -5,\ 2]$$

Example 3

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} \rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1+25+4} \rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{30}$$

ดังนั้นโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{30}}, \dfrac{-5}{\sqrt{30}}, \dfrac{2}{\sqrt{30}}$

- Solution : พิจารณาข้อที่ 2

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 4^2} \rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{4+100+16} \rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

ดังนั้นโคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$ คือ $\dfrac{2}{2\sqrt{30}}, \dfrac{-10}{2\sqrt{30}}, \dfrac{4}{2\sqrt{30}}$

Example 3

- Solution : พิจารณาข้อที่ 3

$$\overrightarrow{OR} = [-3-0,\ 15-0,\ 6-0] \Rightarrow \overrightarrow{OR} = [-3,\ 15,\ -6]$$

$$\left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 15^2 + (-6)^2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{9+225+36} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{270} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right| = 3\sqrt{30}$$

ดังนั้นโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{OR}$ คือ $\dfrac{-3}{3\sqrt{30}}, \dfrac{15}{3\sqrt{30}}, \dfrac{-6}{3\sqrt{30}}$

Example 3

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$ คือ $\frac{2}{2\sqrt{30}}, \frac{-10}{2\sqrt{30}}, \frac{4}{2\sqrt{30}}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{OR}$ คือ $\frac{-3}{3\sqrt{30}}, \frac{15}{3\sqrt{30}}, \frac{-6}{3\sqrt{30}}$

จะเห็นว่า $\overrightarrow{PQ}$ $\vec{a}$ $\overrightarrow{OR}$ ต่างก็ขนานกัน โดยที่ $\overrightarrow{PQ}$ $\vec{a}$ มีทิศทางเดียวกัน

$\overrightarrow{PQ}$ $\overrightarrow{OR}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ตำแหน่ง

- สามารถกระทำได้กับเวกเตอร์ชนิด 3 มิติเท่านั้น
- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\times\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$$

บางคนนิยมท่องว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$$

- ถ้า $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ขนานกัน จะได้ $\vec{u}\times\vec{v}=0$
- ในกรณีที่ $\vec{u}$ ครอสตัวเองจะได้ $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0}$ เสมอ

Example 4

ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ถ้าให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จงหา $\sin\theta$

- Solution : เนื่องจาก $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

ดังนั้น $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1)-(1)(2) \\ (1)(-1)-(2)(1) \\ (2)(2)-(1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

แทนในสูตร $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ จะได้ $\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}\sin\theta$

$$\sqrt{35} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}\sin\theta$$

ดังนั้น $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$

การบ้าน #1

- ให้ทำคำถามท้ายบทที่ 1 ข้อ 1-10