การลดทอนระยะเวลาแก้สมการเชิงเส้นสำหรับการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าด้วยอัลกอรึทึมคัทฮิลล์ แมคกี

Time Reduction for Solving Linear Equation of Electric Field by Using Cuthill McKee Algorithm

อานนท์ อิศรมงคลรักษ์[1] และเผด็จ เผ่าละออ

[1]สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม anone_91@hotmail.com

[2]สำนักวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอประโยชน์จากการใช้เมตริกซ์มากเลขศูนย์ (sparse matrix) มาช่วยในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นสำหรับปัญหาสนามไฟฟ้าด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์ (Finite Difference method) ที่มีการกระจายในบริเวณกว้าง ซึ่งส่งผลให้เกิดจำนวนสมการเชิงเส้นในระบบเป็นจำนวนมาก โดยบทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ผลของการจัดเรียงลำดับหมายเลขโนดในเมตริกซ์รวมของระบบ โดยอาศัยอัลกอรึทึมคัทฮิลล์ แมคกี (Cuthill Mckee) เพื่อให้ได้ระยะช่วงความกว้างของแบนวิดท์ (Bandwidth) จากแนวทะแยงมุมของเมตริกซ์ระบบรวมซึ่งทำให้การพัฒนาโปรแกรมเพื่อลดทอนเวลาแก้สมการทำได้เร็วขึ้น บทความนี้ได้แบ่งขนาดของระบบโดยพิจารณาจากขนาดของเมตริกซ์ระบบรวมที่มีขนาดใหญ่ตั้งแต่ 300 ขึ้นไปและเปรียบเทียบผลกับระบบที่มีขนาดเล็กตั้งแต่ 300 โนดลงมา โดยนำผลการจัดเรียงมาประยุกต์กับปัญหาสนามไฟฟ้าในระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้าขนาด 22kV

คำสำคัญ: เมตริกซ์มากเลขศูนย์ คัทฮิลล์แมกกี ระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนจ์ การแก้สมการเชิงเส้น

Abstract

This paper presents the advantage of sparse matrix for solving linear equation in electric field problems via finite different method. The many linear equations are the main problem to program for solving. This paper focused on the arrangement of the node number of electric field system for reduction the time to solving linear equations and decrease the bandwidth of matrix system using Cuthill Mckee Algorithm. This paper divided the size of matrix system into two cases for consideration and comparison between 300 upper and lower. In addition, this algorithm applied to simulation the electric field in 22kV distribution system.

Keywords: Sparse matrix, Cuthill Mckee , Finite difference method, Linear Equation

1. บทนำ

ปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้มีการพัฒนาเพื่อให้มีสมรรถนะที่สูงขึ้นและการแก้สมการเชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรเป็นจำนวนมากจำเป็นต้องอาศัยการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาช่วยในการประมวลผล สำหรับปัญหาทางด้านไฟฟ้ากำลังที่มีขนาดใหญ่ เช่น ปัญหาสนามไฟฟ้า ปัญหาสนามแม่เหล็ก การแบ่งพื้นที่ของปัญหาจึงต้องกระทำอย่างละเอียดเพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุด แต่อย่างไรก็ตามก็ส่งผลต่อขนาดของเมตริกซ์ที่ได้ให้มีขนาดใหญ่ขึ้น อีกทั้งขีดจำกัดของหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ก็เป็นส่วนสำคัญในการแก้สมการเชิงเส้น เนื่องจากการหาผลเฉลยต้องใช้การดำเนินการทางพีชคณิตเป็นจำนวนมาก การนำประโยชน์จากเมตริกซ์มากเลขศูนย์เข้ามาช่วยจึงเป็นสิ่งสำคัญเพราะการดำเนินการส่วนใหญ่จะเป็นการคูณด้วยศูนย์ซึ่งไม่มีความหมาย สามารถละทิ้งได้โดยไม่มีผลกระทบต่อผลเฉลย และการละทิ้งนี้จะช่วยลดจำนวนการดำเนินการทางพีชคณิตได้อย่างมาก [1] และทำให้ลดทอนเวลาในการแก้ปัญหา บทความนี้จะมุ่งเน้นถึงการจัดเรียงลำดับโนดเพื่อให้ได้ขนาดแบนวิดท์ของเมตริกซ์รวมระบบมีค่าน้อยที่สุดโดยอาศัยอัลกอริทึมคัทฮิลล์ แมคกี [2]

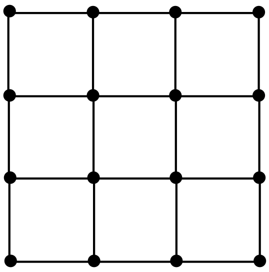
2. เทคนิคการคำนวณด้วยวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์

ปัญหาการคำนวณสนามไฟฟ้า โดยปกติเป็นไปได้ยากที่จะสามารถหาผลเฉลยแบบแม่นตรงได้ (exact solution) ดังนั้นการหาผลเฉลยแบบประมาณ (approximate solution) จึงได้รับการนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากสมรรถนะของเครื่องคอมพิวเตอร์สูงขึ้น เทคนิคการคำนวณด้วยวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนจ์ (finite difference method :FDM) จึงถูกพัฒนาขึ้นมาโดย A. Thom ประมาณปี 1920 ด้วยชื่อ ระเบียบวิธีสี่เหลี่ยม (method of squares) [3] จากนั้นได้พัฒนาต่อเนื่องจนถึงปัจจุบัน การนำ FDM มาใช้ประมาณผลเฉลยของปัญหาสนามไฟฟ้าเขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

2.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาออกเป็นโนด (node) และกริด (grid)

การกำหนดจุดผลเฉลยสำหรับปัญหาสนามไฟฟ้านั้นสามารถกำหนดได้ด้วยโนด และกริด โดยที่จำนวนโนดมีค่ามากจะทำให้ผลเฉลยแบบประมาณที่ได้มีค่าความผิดพลาดน้อยสำหรับวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์

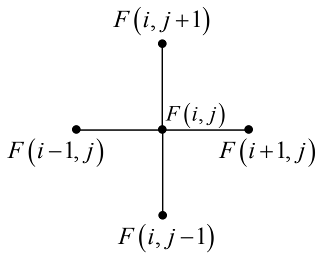
เรนท์นั้นจะมีลักษณะของกริดที่ได้เป็นสี่เหลี่ยม ซึ่ง 1 กริดนั้นจะประกอบไปด้วย 4 แขนงเชื่อมโนดเข้าด้วยกัน แสดงได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาออกเป็นโนดและกริด

2.2 การสร้างสมการประมาณค่าแบบเชิงเส้น

ในบทความนี้จะนำเสนอสูตรผลต่างกลาง (center difference formula) ในการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง สำหรับปัญหาในสองมิติ จะได้ว่า ค่าเวกเตอร์ศักย์ที่ตำแหน่งใดๆ จะเป็นผลรวมของเวกเตอร์ศักย์ ณ ตำแหน่งรอบข้าง [4] แสดงได้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 ผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ศักย์ที่ตำแหน่งรอบข้าง

จากสมการอนุพันธ์ของสนามไฟฟ้าในสายส่ง เมื่อกำหนดให้ตัวนำสายส่งเป็นจุด จะได้สมการอนุพันธ์ย่อยดังสมการที่ (1)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - \mu\sigma\omega^2 E = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{E_{i+1,j} - 2E_{i,j} + E_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}}{\Delta x^2} \tag{3}$$

แทนสมการที่ (2) และ (3) ลงในสมการที่ (1) จะได้ดังสมการที่ (4)

$$\frac{E_{i+1,j} - 2E_{i,j} + E_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}}{\Delta x^2} - \mu\sigma\omega^2 E = 0 \tag{4}$$

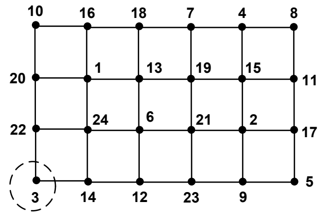
2.3 แก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยแบบประมาณ

การหาผลเฉลยแบบประมาณนั้นเป็นขั้นตอนที่สำคัญมาก ซึ่งขั้นตอนทั้งหมดที่คำนวณด้วยเทคนิควิธี FDM จะเกิดความล่าช้าเนื่องจากขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นแบบประมาณ ซึ่งมีอยู่หลายวิธีคือ วิธีเกรเดียนสังยุค (conjugate gradient) วิธีคิวอาร์ (QR) และวิธีแอลยู ดิคอมโพสิท (LU Decomposition) [5] บทความนี้เลือกใช้ประโยชน์จากวิธี LU เนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ใช้ได้กับรูปแบบเมตริกซ์ที่มีความสมมาตรและไม่สมมาตร และมีความง่ายในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์

3. อัลกอริทึมคัทฮิลล์ แมคกี (Cuthill Mckee Algorithm)

เป็นอัลกอรีทึมที่จัดให้เมตริกซ์จัดเรียงสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ไปรวมกันตามแนวทแยงมุมเกิดเป็นเมตริกซ์แถบทแยงมุมที่มีแบนวิดท์แน่นอน [8] มีหลักการจัดเรียงหมายเลขโนดตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: เลือกโนดเริ่มต้น โดยเลือกจากโนดที่มีองศาน้อยที่สุด (องศานับจากกิ่งที่เชื่อมต่อกัน) กำหนดให้เป็นโนดที่ 1 ถ้าโนดที่มีองศาน้อยที่สุดมีมากกว่า 1 โนดให้เรียงลำดับจากหมายเลขโนดจากน้อยไปมาก แสดงได้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 การเลือกโนดเริ่มต้นที่พิจารณาจากองศาที่น้อยที่สุด

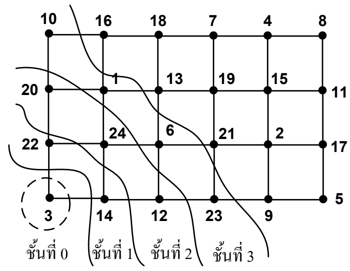
จากรูปที่ 3 สามารถพิจารณาองศาของแต่ละโนดได้ดังตารางที่ 1

<u>ตารางที่ 1</u> องศาของโนดต่างๆ

โนด	1	2	3	4	5	6	…	21	22	23	24
องศา	4	4	2	3	2	4	…	4	3	3	4

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่าองศาของโนดมีค่าน้อยที่สุดคือ 2 องศา ได้แก่ โนดหมายเลข 3 5 8 และ 10 ตามลำดับดังนั้นจึงเลือกโนดหมายเลข 3 เป็นโนดเริ่มต้น โดยเปลี่ยนหมายเลขโนดใหม่เป็นโนดหมายเลข 1

ขั้นตอนที่ 2: โนดที่เชื่อมต่อกับโนดเริ่มต้น (โนดหมายเลข 3 เดิม) จะให้มีลำดับหมายเลขถัดไปคือ 2 3 และ 4 … โดยเรียงลำดับตามหมายเลขโนดตามลำดับขององศาโนดจากน้อยไปมาก จนกระทั่งครบทุกโนด เรียกโนดในระดับนี้ว่า โนดชั้นที่ 1 แสดงได้ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 การกำหนดโนดในลำดับชั้นถัดไป

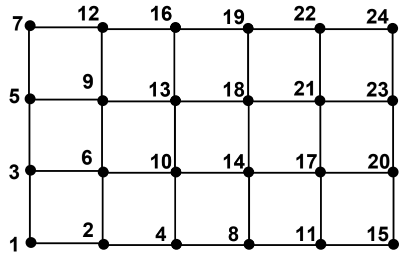
จากรูปที่ 4 สามารถพิจารณาโนดลำดับถัดไปในแต่ละชั้นได้ดังตารางที่ 2

<u>ตารางที่ 2</u> หมายเลขโนดลำดับถัดไปในแต่ละชั้น

ชั้น	0	1	2	3	4	…
โนด	3	14,22	12,20,24	1,6,10.23	9,13,16,21	…

จากตารางที่ 2 จะได้โนดหมายเลข 14 และ 22 อยู่ในชั้นที่ 1 ซึ่งเชื่อมต่อกับโนดที่มีองศาน้อยที่สุดคือ โนด3 ดังนั้นสามารถจัดเรียงให้โนดหมายเลข 14 และ 22 เป็นโนดลำดับที่ 2 และ 3 ตามลำดับ

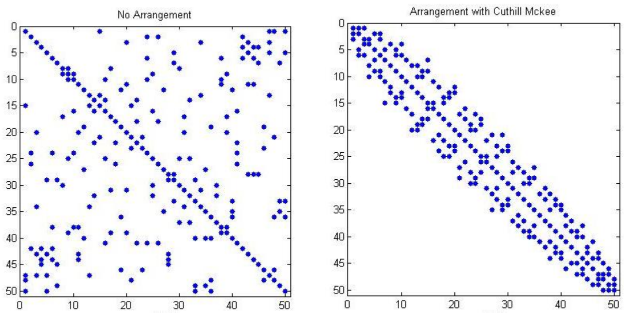
ขั้นตอนที่ 3: โนดในระดับต่อไปให้ใช้หลักการกำหนดหมายเลขตามขั้นที่ 2 ไปจนกระทั่งไม่มีโนดที่ไม่ถูกกำหนดหมายเลขเหลืออยู่ในระบบจะได้โนดที่เกิดจากการจัดเรียงลำดับโนดใหม่แสดงได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 โนดที่ได้รับการจัดเรียงใหม่ด้วยอัลกอริทึมคัทฮิลล์แมคกี

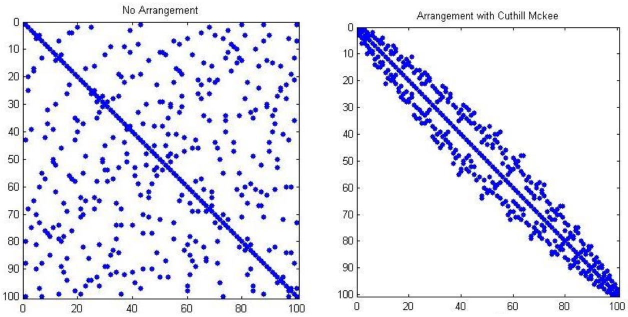
4. ผลการจัดเรียงสมาชิกในเมตริกซ์ระบบรวม

กำหนดให้การคำนวณสนามไฟฟ้าที่มีขนาดเมตริกซ์รวมระบบตั้งแต่ 300 โนดขึ้นไปเป็นเมตริกซ์ขนาดใหญ่ และเมตริกซ์รวมระบบตั้งแต่ 300 โนดลงมาเป็นระบบขนาดเล็ก โดยกำหนดให้โนดลำดับที่ 1 ก่อนทำการจัดเรียงเชื่อมต่อกับโนดลำดับสุดท้ายก่อนทำการจัดเรียง เพื่อให้เมตริกซ์ก่อนทำการจัดเรียงมีค่าเต็มแบนวิดท์ (full bandwidth) สำหรับเมตริกซ์ขนาดเล็กขนาด 50, 100 และ 225 โนด แสดงดังรูปที่ 6 - 8 ตามลำดับและระบบขนาดใหญ่ขนาด 625, 900 และ 2,500 โนด แสดงดังรูปที่ 9 – 11 ตามลำดับ



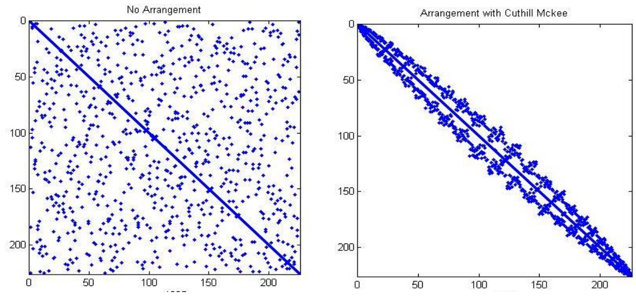
ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 6 เมตริกซ์ขนาด 5x10



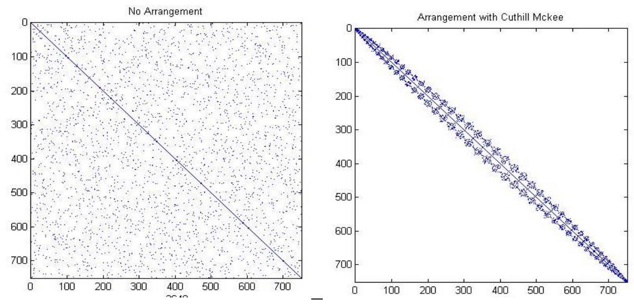
ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 7 เมตริกซ์ขนาด 10x10



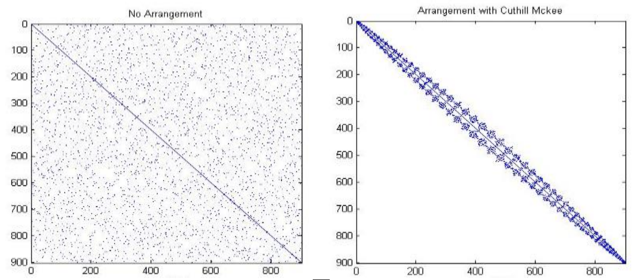
ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 8 เมตริกซ์ขนาด 15x15



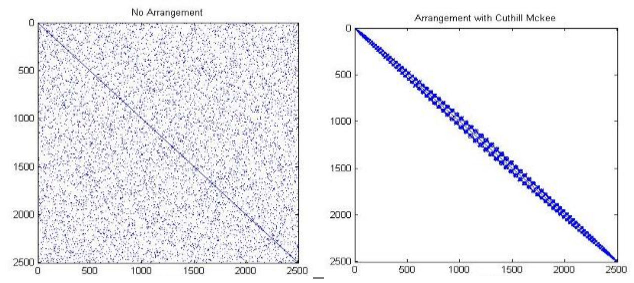
ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 9 เมตริกซ์ขนาด 25x30



ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 10 เมตริกซ์ขนาด 30x30



ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 11 เมตริกซ์ขนาด 50x50

ตารางที่ 3 ความกว้างของแบนวิดท์ที่ระยะห่างจากแนวทแยงมุมของเมตริกซ์ระบบรวม

ขนาดเมตริกซ์	ความกว้างแบนวิดท์ก่อนจัดเรียง	ความกว้างของแบนวิดท์หลังจัดเรียง
5x10	50	17
10x10	100	33

15x15	225	53
25x30	750	95
30x30	900	109
50x50	2,500	189

จากตารางที่ 3 ค่าขนาดของแบนวิดท์จะขึ้นอยู่กับการกำหนดหมายเลขโนด ถ้าไม่นำแบนวิดท์มาพิจารณาร่วมกับการพัฒนาโปรแกรมจะต้องเก็บข้อมูลซึ่งเป็นค่าของสมาชิกทั้งหมดในเมตริกซ์ระบบรวมถึง NxN โดนที่ N คือขนาดของเมตริกซ์ระบบรวม แต่เมื่อพิจารณาแบนวิดท์จะสามารถเก็บข้อมูลซึ่งเป็นค่าของสมาชิกเพื่อใช้ในการคำนวณดังสมการที่ (5)

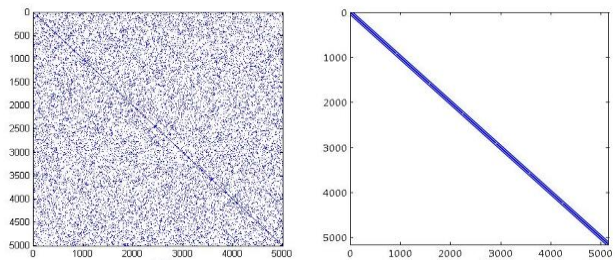
$$N(2\times BW+1)-BW\times(BW+1) \tag{5}$$

สำหรับปัญหาที่สำคัญสำหรับการวิเคราะห์ค่าสนามไฟฟ้าด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนซ์คือ ขั้นตอนการแก้สมการที่ใช้ระยะเวลานาน บทความนี้ได้ทำการเปรียบเทียบผลการจัดเรียงสมาชิกด้วยอัลกอริทึมคัทฮิลล์แมกคีแสดงได้ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ระยะเวลาที่ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้น

ขนาดเมตริกซ์	ระยะเวลาแก้สมการก่อนจัดเรียง (s)	ระยะเวลาแก้สมการหลังจัดเรียง (s)
5x10	0.014300	0.003300
10x10	0.076200	0.015100
15x15	0.584800	0.070300
25x30	18.254100	1.364400
30x30	31.665000	1.416700
50x50	747.519800	18.817700

จากผลการจำลองจะเห็นได้ว่า การจัดเรียงโนดด้วยอัลกอริทึมคัทฮิลแมกกี้ สามารถลดทอนเวลาและช่วงแบนวิดท์สำหรับการแก้สมการเชิงเส้น โดยจะเห็นได้ชัดเจนมากขึ้นเมื่อระบบมีจำนวนสมการที่มากขึ้น และบทความนี้ได้ประยุกต์ใช้อัลกอริทึมคัทฮิลแมกกี้กับปัญหาการกระจายตัวของสนามไฟฟ้าในระบบจำหน่ายไฟฟ้าขนาด 22kV โดยอาศัยระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์ และกำหนดให้มีขนาดเมตริกซ์เท่ากับ 5,200 โนด จะได้ผลของการจัดเรียงโนดและผลการกระจายสนามไฟฟ้าเป็นดังรูปที่ 12 และ 13 ตามลำดับ

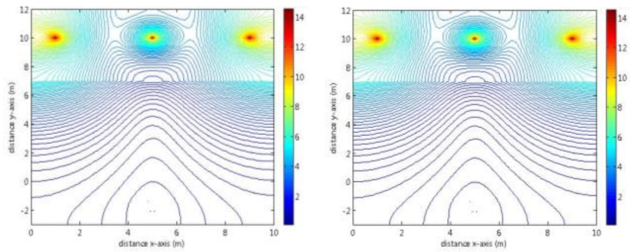


ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 12 แบนวิดท์ของปัญหาสนามไฟฟ้าระบบจำหน่าย 22kV

ตารางที่ 5 เปรียบเทียบระยะแบนวิดท์และระยะเวลาการแก้สมการเชิงเส้นของปัญหาสนามไฟฟ้าในระบบจำหน่ายขนาด 22kV

กรณี	ก่อนจัดเรียง	หลังจัดเรียง
ระยะแบนวิดท์	5,200	197
ระยะเวลาแก้สมการเชิงเส้น (s)	6592.0294	126.8690
ค่าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งความสูงจากระดับพื้นดิน 1 เมตร (kV/m)	3.98	4.01
ค่าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งความสูงจากระดับพื้นดิน 3 เมตร (kV/m)	4.24	4.25



ก) ก่อนการจัดเรียง ข) หลังการจัดเรียง

รูปที่ 13 ลักษณะการกระจายสนามไฟฟ้าของระบบจำหน่ายขนาด 22kV

5. สรุปผลการจำลอง

จากผลการจำลองจะเห็นได้ว่า การจัดเรียงโนดด้วยอัลกอริทึมคัทฮิลแมกกีจะทำให้ช่วยลดทอนระยะเวลาในการแก้สมการเชิงเส้นที่มีปริมาณตัวแปรมากให้แก้สมการได้เร็วขึ้น ซึ่งบทความนี้จะพิจารณาเพียงเวลาที่ใช้สำหรับการแก้สมการเท่านั้น ซึ่งการจำลองผลของสนามไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์เมื่ออาศัยการจัดเรียงโนดด้วยอัลกอริทึมคัทฮิลแมกกีจะทำให้ลดระยะเวลาในส่วนของการแก้สมการเชิงเส้นได้คิดเป็นร้อยละ 98.08

เอกสารอ้างอิง

[1] B. Neelima and P.S. Raghavendra., “Effective Sparse Matrix Representation for the GPU Architcture”. International Journal of Computer Science Engineering and Applications (IJCSEA). Vol. 2., No.2, 2012, pp. 151-165.

[2] E. Cuthill and J. Mckee. “Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices.” In Pro. 24th National Conference ACM. 1969., pp. 157-172.

[3] D.M. Causon and C.G.Mingham. “Introductory Finite Difference Method for PDEs.” Ventus Publishing. 2010.,

[4] T.J. Kyng, S. Purcal and J. C. Zhang., “Excel Implementation of finite difference methods for option pricing”. Spreadsheets in Education (eJSiE)., Vol. 9., Issue.3., pp 7-20.

[5] M.V.K. Chari and S.J. Salon., “Numerical Methods in Electromagnetism”. Academic Press., USA., 2000.