แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1
พื้นฐานการคำนวณปริมาณทางไฟฟ้า กฎของโอห์ม และการต่อเซลล์ไฟฟ้า

หัวข้อเนื้อหา

1.1 ระบบหน่วย
- 1.1.1 ระบบหน่วยอังกฤษ
- 1.1.2 ระบบหน่วยเมตริก
- 1.1.3 ระบบหน่วยระหว่างชาติ

1.2. คำอุปสรรค

1.3. การเปลี่ยนหน่วย

1.4. ปริมาณทางไฟฟ้า
- 1.4.1 ประจุไฟฟ้า
- 1.4.2 กระแสไฟฟ้า
- 1.4.3 แรงดันไฟฟ้า
- 1.4.4 กำลังไฟฟ้า
- 1.4.5 ความต้านทาน

1.5. กฎของโอห์ม
- 1.5.1 สมการกฎของโอห์ม
- 1.5.2 การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรอนุกรม
- 1.5.3 การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรขนาน
- 1.5.4 การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรผสม

1.6. เซลล์ไฟฟ้า
- 1.6.1 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรม
- 1.6.2 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนาน
- 1.6.3 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสม

1.7. สรุป

1.8 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1 ระบบหน่วย และคำนวณการเปลี่ยนหน่วยในระบบหน่วยประเภทต่าง ๆ

2 คำนวณหาปริมาณทางไฟฟ้า

3 กฎของโอห์มและประยุกต์ใช้กับวงจรไฟฟ้าประเภทต่าง ๆ ได้

4 หลักการทำงานของเซลล์ไฟฟ้าและการต่อเซลล์ไฟฟ้าประเภทต่าง ๆ ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่างๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 1

พื้นฐานการคำนวณปริมาณทางไฟฟ้า กฎของโอห์มและการต่อเซลล์ไฟฟ้า

การศึกษาวงจรไฟฟ้ากระแสตรงและกระแสสลับที่ประกอบด้วยปริมาณทางไฟฟ้าจำนวนมาก นั้นจำเป็นที่จะต้องศึกษาถึงหน่วยของปริมาณต่างๆ รวมทั้งคำนิยามของปริมาณทางไฟฟ้า และรวมถึงฐานตัวเลขต่างๆ ที่เป็นจำนวนนับของปริมาณไฟฟ้าด้วย

1.1. ระบบหน่วย

ระบบหน่วยเป็นระบบที่มีความสำคัญเป็นอย่างมากเพื่อบ่งบอกให้ทราบถึงความมากน้อยของปริมาณต่างๆ อีกทั้งยังเป็นการแยกประเภทของปริมาณต่าง ๆ โดยระบบหน่วยสามารถแบ่งได้ดังนี้

1.1.1. ระบบหน่วยอังกฤษ

ระบบหน่วยอังกฤษ (british system) เป็นระบบที่เกิดขึ้นเป็นเวลานาน มีวัตถุประสงค์เพื่อใช้ในการค้าขาย มีหน่วยพื้นฐานคือ ความยาว (ft) มวล (lb) และเวลา (s) โดยจากหน่วยพื้นฐานสามารถทำให้เกิดหน่วยของปริมาณอื่น ๆ ได้ดังตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 หน่วยพื้นฐานในระบบหน่วยอังกฤษ

ปริมาณ	หน่วย
ความหนาแน่น	lb/ft^3
ความเร่ง	ft/s^2
แรงดัน	lb/ft^2
แรง	lbs
ปริมาตร	ft^3

1.1.2. ระบบเมตริก

ปี 1790 รัฐบาลฝรั่งเศสสนับสนุนให้มีการศึกษาค้นคว้า และจัดตั้งระบบเพื่อใช้แทนระบบมาตราชั่งตวงวัดให้มีมาตรฐานเป็นที่ยอมรับและใช้ร่วมกัน โดยกำหนดพื้นฐานไว้ 3 ประการคือ

1.1.2.1 เป็นระบบการชั่ง ตวง ใช้ได้ทั่วโลก ไม่ขึ้นกับการเอาบุคคลมาเป็นมาตรฐานขึ้นอยู่กับการวัดที่แน่นอนตามธรรมชาติ

1.1.2.2 หน่วยอื่น ๆ ควรสืบทอดมาจากหน่วยฐานทั้ง 3 โดยกำหนดหน่วยเป็น เมตร กรัม และ วินาที

1.1.2.3 ตั้งระบบการเขียนแทนด้วยเลขยกกำลัง ในกรณีที่หน่วยเป็นทศนิยม

1.1.3. ระบบหน่วยระหว่างชาติ

ระบบหน่วยระหว่างชาติ (international system of units) มีความสำคัญอย่างมากต่อระบบการวัดทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ปัจจุบันพบว่าระบบการวัดแบบเมตริกเป็นที่ยอมรับทางการค้าระหว่างประเทศทั่วโลก ดังนั้นหน่วยงาน The American Nation Institute of Standards and Technology (NIST) จึงได้จัดทำหนังสือ guide for the use of the international system units (SI) ซึ่งเป็นคู่มือแนะนำการใช้งานระบบหน่วย SI อย่างถูกต้องและเป็นสากล โดยหน่วย SI ประกอบด้วย หน่วยฐาน หน่วยอนุพันธ์และคำอุปสรรค

1.1.3.1 หน่วยฐาน (base units) เป็นหน่วยหลักของระบบเอสไอ ซึ่งสามารถสอบกลับได้ (traceability) มีอยู่ด้วยกันทั้งหมด 7 หน่วยแสดงดังตารางที่ 1.2

ตารางที่ 1.2 หน่วยฐานในระบบหน่วยระหว่างชาติ

ปริมาณ	หน่วย	สัญลักษณ์
ความยาว	เมตร (meter)	m
มวล	กรัม (gram)	g
เวลา	วินาที (second)	s
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์ (ampere)	A
อุณหภูมิ	เคลวิน (kelvin)	K
ปริมาณสาร	โมล (mole)	mol
ความเข้มของการส่องสว่าง	แคนเดลา (candela)	cd

1.1.3.2 หน่วยอนุพันธ์ (derived units) เกิดจากการพิสูจน์ทางพีชคณิตระหว่างหน่วยพื้นฐานหรือระหว่างหน่วยอนุพันธ์ เช่น

พื้นที่ = เกิดจากการคูณกันของความยาว x ความยาว = m^2

ปริมาตร = เกิดจากการคูณกันของ พื้นที่ x ความยาว = m^3

อัตราเร็ว, ความเร็ว = เกิดจากการหารกันของ ความยาว/เวลา = m/s

ความเร่ง, ความหน่วง = เกิดจาก อัตราเร็ว, ความเร็วหารด้วยเวลา = m/s^2

ความหนาแน่นกระแส = เกิดจากการหารกันของ กระแส/ปริมาตร = A/m^3

1.2 คำอุปสรรค

คำอุปสรรค (prefixes) คือสัญลักษณ์ที่ถูกนำมาวางไว้หน้าหน่วย เพื่อให้การแสดงปริมาณมีความกะทัดรัดมากขึ้น นิยมใช้เมื่อค่าในหน่วยฐานหรือหน่วยอนุพันธ์มีค่ามากเกินไปหรือน้อยเกินไป สามารถเขียนให้อยู่ในรูปพหุคูณได้ ซึ่งจะมีคำนำหน้าหน่วย สัญลักษณ์ และตัวประกอบการคูณแสดงดังตารางที่ 1.3

ตารางที่ 1.3 ค่าตัวประกอบการคูณ สัญลักษณ์ และคำนำหน้าหน่วยของคำอุปสรรคต่าง ๆ

ตัวประกอบ	ชื่อคำนำหน้าหน่วย	สัญลักษณ์	ตัวประกอบ	ชื่อคำนำหน้าหน่วย	สัญลักษณ์
10^{1}	เดคะ (deka)	da	10^{-1}	เดซิ (deci)	d
10^{2}	เฮกโต (hecto)	h	10^{-2}	เซนติ (centi)	c
10^{3}	กิโล (kilo)	k	10^{-3}	มิลลิ (milli)	m
10^{6}	เมกะ (mega)	M	10^{-6}	ไมโคร (micro)	μ
10^{9}	กิกะ (giga)	G	10^{-9}	นาโน (nano)	n
10^{12}	เทระ (tera)	T	10^{-12}	พิโก (pico)	p
10^{15}	เพตะ (peta)	P	10^{-15}	เฟมโต (femto)	f
10^{18}	เอกซะ (exa)	E	10^{-18}	อัตโต (atto)	a
10^{21}	เซตตะ (zetta)	Z	10^{-21}	เซปโต (zepto)	z
10^{24}	ยอตตะ (yotta)	Y	10^{-24}	ยอกโต (yocto)	y

ตัวอย่างที่ 1.1 ระยะทาง 0.002 เมตร สามารถเขียนโดยใช้คำอุปสรรคได้เป็น $2x10^{-3}$ เมตร
หรือ คำอุปสรรคที่ใช้แทนคือ 10^{-3} คือ มิลลิ (m)
หรือ สามารถเขียนได้ว่า ระยะทาง 2 mm ก็ได้

1.3. การเปลี่ยนหน่วย

การรายงานผลเพื่อสื่อความหมายของปริมาณทางวิทยาศาสตร์และทางไฟฟ้า หลายครั้งที่จำเป็นต้องเปลี่ยนหน่วย (conversion of unit) จากระบบหนึ่งไปสู่อีกระบบ สิ่งที่ควรเข้าใจคือ dimensional formula prefixes รวมถึงความสัมพันธ์ของปริมาณในระบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 1.2 รถยนต์วิ่งด้วยอัตราเร็ว 108 กิโลเมตรต่อชั่วโมงคิดเป็นอัตราเร็วเท่าใดในหน่วยเมตร/วินาที

วิธีทำ อัตราเร็วรถ 108 km/hr

เปลี่ยนเศษและส่วนตามที่โจทย์ต้องการ (โจทย์ต้องการ km --> m และ hr --> s) จะได้ว่า

$$\frac{108\times10^3\,m}{60\times60\,s} = \frac{108\times5}{18} = 30\ m/s$$

ตัวอย่างที่ 1.3 พื้นที่ของห้องเรียนขนาด 30 ฟุต x 24 ฟุต ซึ่งเป็นหน่วยในระบบอังกฤษต้องการทราบพื้นที่ในหน่วย SI ว่าเป็นเท่าใด

วิธีทำ ความยาว 1 ฟุต มีค่าเท่ากับ 0.3048 เมตร จะได้ว่า

พื้นที่ = กว้าง x ยาว

= 30ft x 24ft

= 720 ft^2 (british system unit)

แปลงจากระบบอังกฤษเป็นระบบ SI จะได้ว่า

พื้นที่ = (720 ft2)x(0.3048 m/1ft) x (0.3048 m/1ft)

= 67.592 m^2 (SI unit)

ตัวอย่างที่ 1.4 ความเร็วของแสงในอวกาศอิสระมีค่า 2.997295x10^8 m/s ต้องการทราบความเร็วของแสงเป็น km/hr

วิธีทำ ความเร็วของแสงมีค่า $\left(2.997295\times10^8\right)\times\left(\frac{1km}{1000\,m}\right)$

$= 2.997295\times10^5\ km/s$

เปลี่ยนหน่วยจาก วินาที เป็นชั่วโมงจะได้ว่า $\left(2.997295\times10^5\right)\times\left(\frac{3600\,s}{1hr}\right)$

= 10790.262x10^5 km/hr หรือ 1.07903 x 10^9 km/hr

1.4. ปริมาณทางไฟฟ้า

การศึกษาเกี่ยวกับวงจรไฟฟ้าคือพื้นฐานในการศึกษาต่อทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้า และอาจจะนำไปใช้ประโยชน์ได้เป็นอย่างดีในสาขาวิชาอื่น ๆ ทักษะทางวงจรไฟฟ้าไม่เพียงแต่สามารถนำไปใช้งานทางด้านวิศวกรรมไฟฟ้าทั้งสาขาวิชา อิเล็กทรอนิกส์ สื่อสาร ไมโครเวฟ ควบคุม และไฟฟ้ากำลังเท่านั้น แต่ยังนำไปใช้กับสาขาอื่น ๆ ที่เหมือน ๆ กันได้อีก

วงจรไฟฟ้าคือ การรวมกันของอุปกรณ์ไฟฟ้าเช่น แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้า ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ ตัวเก็บประจุ หม้อแปลงไฟฟ้าและทรานซิสเตอร์ เป็นต้น ที่ถูกเชื่อมต่อกันในลักษณะต่าง ๆ และเพื่อให้เข้าใจถึงพื้นฐานของวงจรไฟฟ้าและนำไปสู่การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าจึงขอกล่าวถึงกฎของโอห์มและปริมาณทางไฟฟ้าต่าง ๆ คือ แรงดันไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า ความต้านทาน กำลังไฟฟ้า และพลังงานไฟฟ้าดังนี้

1.4.1. ประจุไฟฟ้า

ประจุไฟฟ้าคือ อนุภาคที่เล็กๆ ทางไฟฟ้าซึ่งประกอบด้วยอิเล็กตรอนและโปรตอน โดยที่อิเล็กตรอนจะเรียกว่า “ประจุลบ” ส่วนโปรตอนเรียกว่า “ประจุบวก” จากคุณสมบัติทางฟิสิกส์ที่ว่า อะตอมเป็นหน่วยเล็ก ๆ ของสสารประกอบด้วยโปรตอนกับนิวตรอนซึ่งมีจำนวนเท่า ๆ กันรวมกันอยู่ในนิวเคลียสตรงกลาง วงนอกรอบ ๆ นิวเคลียสจะมีอิเล็กตรอนโคจรอยู่โดยรอบ เมื่อมีพลังงานภายนอกไปกระทำให้อิเล็กตรอนวงนอกหลุดจากวงโคจร จะทำให้อิเล็กตรอนกลายเป็นอิเล็กตรอนอิสระแสดงประจุไฟฟ้าลบ และอะตอมที่ขาดอิเล็กตรอนก็จะแสดงประจุไฟฟ้าบวก ประจุไฟฟ้ามีหน่วยเป็น “คูลอมบ์ (coulomb)” เพื่อเป็นเกียรติแก่ ชาร์ล เอ คูลอมบ์ (Charles Augustin Coulomb) นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศสที่ค้นพบแรงระหว่างประจุไฟฟ้าในปี ค.ศ. 1818 - 1889 และมีสัญลักษณ์ Q

ประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์ คือการเปลี่ยนแปลงหรือการชาร์จของอิเล็กตรอนขนาด 6.25×10^{18} อิเล็กตรอน (e) ดังนั้น 1 C = 6.25×10^{18} e

1.4.2. กระแสไฟฟ้า

กระแสไฟฟ้า (current) คือ การไหลของประจุไฟฟ้าต่อเวลาหนึ่ง ๆ สามารถเขียนได้ดังสมการที่ 1.1

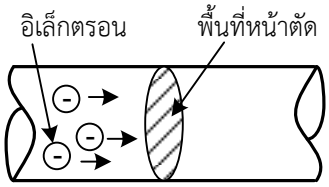
$$I = \frac{Q}{t} \tag{1.1}$$

จากสมการที่ (1.1) สามารถใช้สัญลักษณ์ I ที่แทนค่ากระแสไฟฟ้าซึ่งมีหน่วยเป็นแอมแปร์ และสัญลักษณ์ Q แทนประจุไฟฟ้าที่ไหลในภายในวงจรมีหน่วยเป็นคูลอมป์และสัญลักษณ์ t แทนเวลาที่ประจุไฟฟ้าไหลผ่านในวงจรมีหน่วยเป็นวินาที และเมื่อแทนค่าประจุไฟฟ้า 1 คูลอมป์ที่เคลื่อนที่ผ่านพื้นที่หน้าตัดของขดลวดในเวลา 1 วินาทีจะได้ดังสมการที่ (1.2)

$$1A = \frac{1C}{1s} = 6.25 \times 10^{18} \text{ e/s} \tag{1.2}$$

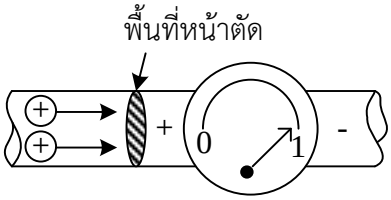
จากสมการที่ (1.2) สามารถอธิบายได้ว่า 1 แอมแปร์คือ ประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์เคลื่อนที่ผ่านพื้นที่หน้าตัดของขดลวดในเวลา 1 วินาที และหน่วยของกระแสไฟฟ้าเป็นแอมแปร์ เพื่อให้เกียรติแก่ อองเดร เอ็ม แอมแปร์ (Andre Marie Ampere) นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส โดยทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้าและอิเล็กตรอนมีหลายรูปแบบดังนี้

1.4.2.1 อิเล็กตรอนจะไหลจากขั้วลบไปยังขั้วบวก จะมีลักษณะการไหลของกระแสไฟฟ้าและอิเล็กตรอนดังภาพที่ 1.1



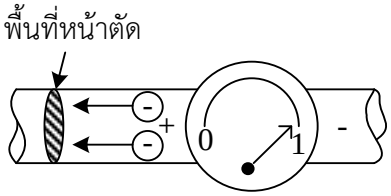
ภาพที่ 1.1 อิเล็กตรอนไหลจากขั้วลบไปขั้วบวก

1.4.2.2 กระแสไฟฟ้าจะไหลไปในทางเดียวกับประจุบวกกรณีนี้ประจุบวกจะเคลื่อนที่ตัดผ่านพื้นที่หน้าตัดซึ่งมีลักษณะการไหลของกระแสไฟฟ้าเป็นดังภาพที่ 1.2



ภาพที่ 1.2 กระแสไฟฟ้าไหลไปทางเดียวกับประจุบวก

1.4.2.3 กระแสไฟฟ้าจะไหลสวนทางกับประจุลบกรณีนี้ประจุลบจะเคลื่อนที่ตัดผ่านพื้นที่หน้าตัดซึ่งมีลักษณะการไหลของกระแสไฟฟ้าเป็นดังภาพที่ 1.3



ภาพที่ 1.3 กระแสไฟฟ้าไหลสวนทางกับประจุลบ

1.4.3. แรงดันไฟฟ้า

แรงดันไฟฟ้า (voltage) คือ งานที่ได้จากการเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าต่อจำนวนประจุไฟฟ้านั้น มีหน่วยเป็นโวลต์ (V) หรือ จูลต่อคูลอมบ์ (J/C) ดังสมการที่ (1.3) ซึ่งค้นพบโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวอิตาลีชื่อ อะเลส ซานโดร โวลตา (Alessando Volta) ในปี ค.ศ.1745 – 1827 จะใช้ตัวย่อว่า V หรือ E โดยที่ V จะใช้แทนแรงดันไฟฟ้าตกคร่อม ส่วน E แทนแรงดันไฟฟ้าของแหล่งจ่าย

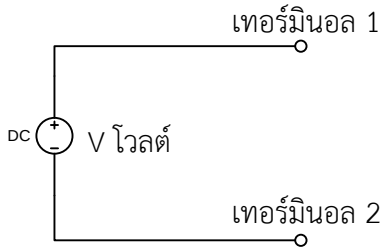
$$V = \frac{W}{Q} \tag{1.3}$$

จากสมการที่ (1.3) สามารถใช้สัญลักษณ์ V หรือ E ที่แทนค่าแรงดันไฟฟ้าซึ่งมีหน่วยเป็นโวลต์ และสัญลักษณ์ Q แทนประจุไฟฟ้าที่ไหลในภายในวงจรมีหน่วยเป็นคูลอมป์และ

สัญลักษณ์ W แทนงานที่ประจุไฟฟ้าใช้ในการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นจูล และเมื่อแทนค่างานจำนวน 1 จูลที่ทำให้ประจุไฟฟ้าขนาด 1 คูลอมบ์เคลื่อนที่ได้ นั่นคือแรงดันไฟฟ้า 1 โวลต์แสดงได้ดังสมการที่ (1.4)

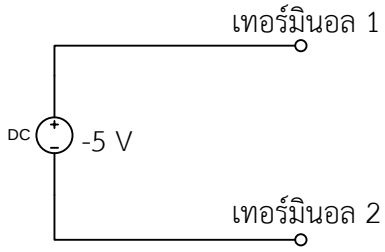
$$1V = \frac{1J}{1C} \tag{1.4}$$

จากสมการที่ (1.4) จะได้แรงดันไฟฟ้า 1 โวลต์ คืองานจำนวน 1 จูลที่ทำให้ประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง และหน่วยของแรงดันไฟฟ้าเป็นโวลต์เพื่อให้เป็นเกียรติแก่ อะเลส ซานโดร โวลตา แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าทางอุดมคติจะมีลักษณะดังภาพที่ 1.4 ซึ่งมีค่าแรงดันไฟฟ้าเท่ากับ V โวลต์ คร่อมเทอร์มินอล 1 และ 2 โดยที่เทอร์มินอล 1 จะถูกกำหนดเป็นบวกและเทอร์มินอล 2 จะถูกกำหนดเป็นลบ ซึ่งหมายความว่าเทอร์มินอล 1 มีความต่างศักย์ไฟฟ้าสูงกว่าความต่างศักย์ไฟฟ้าของเทอร์มินอล 2 อยู่ V โวลต์หรือเทอร์มินอล 2 มีความต่างศักย์ไฟฟ้าต่ำว่าเทอร์มินอล 1 อยู่ V โวลต์



ภาพที่ 1.4 สัญลักษณ์ของแรงดันไฟฟ้าทางอุดมคติ

ปริมาณของแรงดันไฟฟ้า V โวลต์สามารถมีค่าได้ทั้งบวกและลบ เมื่อ V มีค่าเท่ากับ -5 โวลต์ ดังภาพที่ 1.5 จะหมายความว่า เทอร์มินอล 1 มีความต่างศักย์ไฟฟ้าสูงกว่าเทอร์มินอล 2 อยู่ -5 โวลต์หรือเทอร์มินอล 1 มีความต่างศักย์ไฟฟ้าต่ำกว่าเทอร์มินอล 2 อยู่ 5 โวลต์



ภาพที่ 1.5 แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเสมือนขนาด -5V

ขนาดแรงดันไฟฟ้าของแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าทางอุดมคติจะมีค่าคงที่และไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ถ้านำมาสร้างกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันไฟฟ้าและเวลาจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง บางครั้งเราจะเรียกแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าว่าแบตเตอรี่

1.4.4. กำลังไฟฟ้า

กำลังไฟฟ้า (power) คือ อัตราการทำงานต่อหนึ่งหน่วยเวลาสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (1.5) และสามารถเขียนความสัมพันธ์ของกำลังไฟฟ้าที่มีความสัมพันธ์กับค่าแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าได้ดังสมการที่ (1.6)

$$P = \frac{W}{t} \tag{1.5}$$

$$= \frac{VQ}{t}$$

$$= V\left(\frac{Q}{t}\right)$$

$$P = VI \tag{1.6}$$

จากสมการที่ (1.6) สามารถใช้สัญลักษณ์ P แทนค่ากำลังไฟฟ้าซึ่งมีหน่วยเป็นวัตต์ (W) เมื่อกำหนดให้งานจำนวน 1 จูลต่อเวลา 1 วินาทีนั่นคือ กำลังไฟฟ้าที่ได้ 1 วัตต์แสดงได้ดังสมการที่ (1.7)

$$1W = \frac{1J}{1s} \tag{1.7}$$

จากสมการที่ (1.7) กำลังไฟฟ้า 1 วัตต์ คือการทำงานที่ได้งานจำนวน 1 จูลต่อเวลา 1 วินาทีและหน่วยของกำลังไฟฟ้าเป็นวัตต์ เพื่อให้เกียรติแก่ เจมส์ วัตต์ (James Watt) นักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษ โดยที่ กำลังไฟฟ้า 746 วัตต์ เท่ากับ 1 แรงม้า (horsepower: Hp)

1.4.5. ความต้านทาน

ความต้านทาน (resistance) คือ ความต้านทานการไหลของกระแสไฟฟ้าซึ่งจะถูกกำหนดด้วยคุณสมบัติของวัสดุ ถ้าวัสดุใดมีคุณสมบัติเป็นตัวนำดี เช่น เงิน ทองแดง และอะลูมิเนียม เป็นต้น กระแสไฟฟ้าจะไหลได้มากในวัสดุเหล่านั้น ถ้าวัสดุใดมีคุณสมบัติเป็นตัวนำที่ไม่ดีหรือฉนวนเช่น เบเกอร์ไรท์ ไมก้า แก้ว ยาง พีวีซี และไม้แห้ง เป็นต้น กระแสไฟฟ้าจะไหลได้น้อยมากหรืออาจจะไม่ไหลเลย ความต้านทานมีหน่วยเป็นโอห์ม ซึ่งได้มาจากนักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ George Ohm ได้ค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้า แรงดันไฟฟ้า และความต้านทาน ซึ่งกล่าวไว้ว่าในวงจรไฟฟ้าใดๆ กระแสไฟฟ้าจะแปรผันตรงกับแรงดันไฟฟ้าและจะแปรผกผันกับความต้านทานหรืออาจกล่าวได้ว่าความต้านทานของตัวนำ 1 โอห์มจะยอมให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านมัน 1 แอมแปร์เมื่อแรงดันตกคร่อมมัน 1 โวลต์ โดยค่าความต้านทานของตัวนำจะขึ้นอยู่กับปัจจัยดังต่อไปนี้คือ

- ค่าความต้านทานจะเปลี่ยนแปลงในลักษณะแปรผันตรงกับความยาวของตัวนำ

- ค่าความต้านทานจะเปลี่ยนแปลงในลักษณะแปรผกผันกับพื้นที่หน้าตัดของตัวนำ
- ค่าความต้านทานจะขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุ
- ค่าความต้านทานจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของตัวนำ

ถ้าไม่คำนึงถึงอุณหภูมิของตัวนำ ความต้านทานจะมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (1.8)

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{1.8}$$

จากสมการที่ (1.8) สามารถใช้สัญลักษณ์ R แทนค่าความต้านทานซึ่งมีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) และใช้สัญลักษณ์ l แทนความยาวของตัวนำซึ่งมีหน่วยเป็นเมตร และใช้สัญลักษณ์ A แทนพื้นที่หน้าตัดของตัวนำที่มีหน่วยเป็นตารางเมตร และใช้สัญลักษณ์ ρ แทนค่าสภาพความต้านทานเฉพาะมีหน่วยเป็นโอห์มเมตร (Ω m)

ตัวอย่างที่ 1.5 ความต้านทานของตัวนำตัวหนึ่งที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 2 mm^2 และมีความยาว 25 m มีค่าเท่ากับ 0.425 Ω ให้หาค่าความต้านทานจำเพาะของตัวนำตัวนี้

วิธีทำ จากสมการที่ (1.8) $R = \rho \frac{l}{A}$

ดังนั้น $\rho = \frac{RA}{l}$

แทนค่าจะได้ $\rho = \frac{(0.425)\left(2\times10^{-6}\right)}{25}$

ดังนั้น $\rho = 3.4\times10^{-8}\ \Omega m$

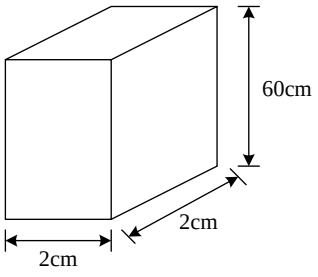
ตัวอย่างที่ 1.6 กล่องคาร์บอนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดเท่ากับ $2cm\times2cm\times60cm$ ให้หาค่า

ก) ความต้านทานที่วัดระหว่างปลาย 2 ด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ข) ความต้านทานที่วัดระหว่างปลาย 2 ด้านของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เมื่อความต้านทานจำเพาะของคาร์บอนมีค่าเท่ากับ $\rho = 4.0\times10^{-5}\ \Omega m$

วิธีทำ กล่องคาร์บอนมีลักษณะดังภาพที่ 1.6



ภาพที่ 1.6 ลักษณะของกล่องคาร์บอน

ก) จากสมการที่ (1.8) $R = \rho \frac{l}{A}$

$$A = 2\times10^{-2} \times 2\times10^{-2} = 4\times10^{-4}\ m^2$$

ดังนั้น $$R = \frac{\left(4.0\times10^{-5}\right)\left(60\times10^{-2}\right)}{4\times10^{-4}} = 0.06\Omega$$

ข) $$A = 2\times10^{-2} \times 60\times10^{-2} = 1.2\times10^{-2}\ m^2$$

ดังนั้น $$R = \frac{\left(4.0\times10^{-5}\right)\left(60\times10^{-2}\right)}{1.2\times10^{-2}} = 0.002\Omega$$

ตัวอย่างที่ 1.7 ให้คำนวณหาค่าความต้านทานของสายเคเบิลยาว 900 m ซึ่งประกอบด้วยทองแดง 21 เส้น และแต่ละเส้นมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.50 mm ค่าความต้านทานเฉพาะของทองแดงมีค่าเท่ากับ $1.72\times10^{-8}\ \Omega m$

วิธีทำ พื้นที่หน้าตัดรวมของตัวนำ (A) $= 21\times\pi\frac{d^2}{4}$

$$= 21\times\pi\frac{\left(1.50\times10^{-3}\right)^2}{4}$$

ดังนั้นจะได้ $A = 3.711\times10^{-5}\ m^2$

คำนวณค่าความต้านทานได้ $R = \rho\frac{l}{A}$

แทนค่าจะได้ $$R = 1.72\times10^{-8}\frac{900}{3.711\times10^{-5}}$$

$$R = 0.417\ \Omega$$

ตัวอย่างที่ 1.8 สายไฟเงิน 1 เส้นมีความต้านทาน 2Ω ให้หาค่าความต้านทานของสายไฟแมงกานิสที่มีความยาวน้อยกว่าสายไฟเงิน $\frac{1}{3}$ เท่า และมีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยกว่าสายไฟเงิน $\frac{1}{2}$ เท่า ถ้าความต้านทานเฉพาะของแมงกานีสมีค่าเท่ากับ 20 เท่าของเงิน

วิธีทำ สายไฟเงิน $R_1 = \rho_1\frac{l_1}{A_1}$ (1.9)

สายไฟแมงกานีส $R_2 = \rho_2\frac{l_2}{A_2}$ (1.10)

นำสมการที่ (1.9) หารสมการที่ (1.10) จะได้

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{l_2}{l_1}\times\frac{A_1}{A_2}$$

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

ดังนั้น

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{l_2}{l_1} \times \frac{\left(\frac{\pi d_1^2}{4}\right)}{\left(\frac{\pi d_2^2}{4}\right)}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{l_2}{l_1} \times \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

จากโจทย์จะได้ว่า $R_1 = 2\Omega$

และ $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

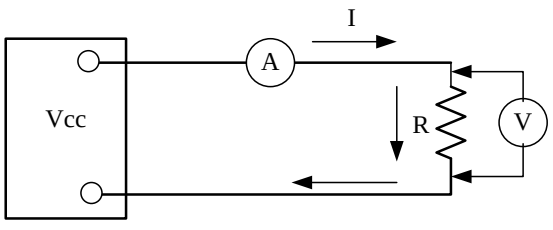
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 20$$

ดังนั้น $\frac{R_2}{2} = 20 \times \frac{1}{3} \times 4$

$$R_2 = 2 \times 20 \times \frac{1}{3} \times 4 = 53.33\Omega$$

1.5 กฎของโอห์ม

ในวงจรไฟฟ้าใดๆ ก็ตาม ย่อมมีตัวแปรพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับกฎของโอห์ม (Ohm's Law) นั่นคือจะต้องมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านในวงจรกระแสไฟฟ้าได้ โดยหน่วยของกระแสไฟฟ้ามีหน่วยเป็นแอมแปร์ ขณะเดียวกันจะต้องมีความต้านทานทำหน้าที่เป็นภาระให้กับวงจรซึ่งค่าความต้านทานนั้นมีหน่วยเป็นโอห์ม และประการสุดท้ายต้องมีแหล่งจ่ายแรงเคลื่อนไฟฟ้าจากภายนอกมาจ่ายให้กับระบบของวงจรไฟฟ้า โดยหน่วยของแรงเคลื่อนไฟฟ้ามีหน่วยเป็นโวลต์แสดงดังภาพที่ 1.7 ทั้งสามสิ่งดังที่กล่าวมาแล้วทำให้เกิดงานด้านไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ เช่น หลอดไฟทำให้เกิดความสว่างแก่บ้านเรือนและที่พักอาศัย พัดลมหมุนได้เนื่องจากมอเตอร์ได้รับกระแสไฟฟ้า เครื่องรับโทรทัศน์ทำให้เกิดระบบภาพและเสียงขึ้น เป็นต้น



ภาพที่ 1.7 วงจรไฟฟ้าเบื้องต้นเกี่ยวกับกฎของโอห์ม

กฎของโอห์มนั้นถูกคิดค้นขึ้นโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมันที่ชื่อ จอร์จ ไซมอน โอห์ม (Grorge Simon Ohm) ดังภาพที่ 1.8 กล่าวไว้ว่า อัตราส่วนของความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุด 2 จุดใด ๆ บนตัวนำตัวหนึ่งต่อกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านมันจะมีค่าคงที่ เมื่ออุณหภูมิของตัวนำไม่เปลี่ยนแปลง หากกำหนดให้ความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุด 2 จุดมีค่าสูงขึ้น ปริมาณการไหลของกระแสไฟฟ้าย่อมสูงขึ้นตามไปด้วย แต่ถ้าหากว่าความต่างศักย์ไฟฟ้ามีค่าต่ำลง ลักษณะนี้ย่อมทำให้กระแสไฟฟ้ามีค่าต่ำลงนั่นเอง

ภาพที่ 1.8 นักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน จอร์จ ไซมอน โอห์ม
ที่มา (Charles K. Alexander and Mtthew N.O. Sadiku, 2000, p.27)

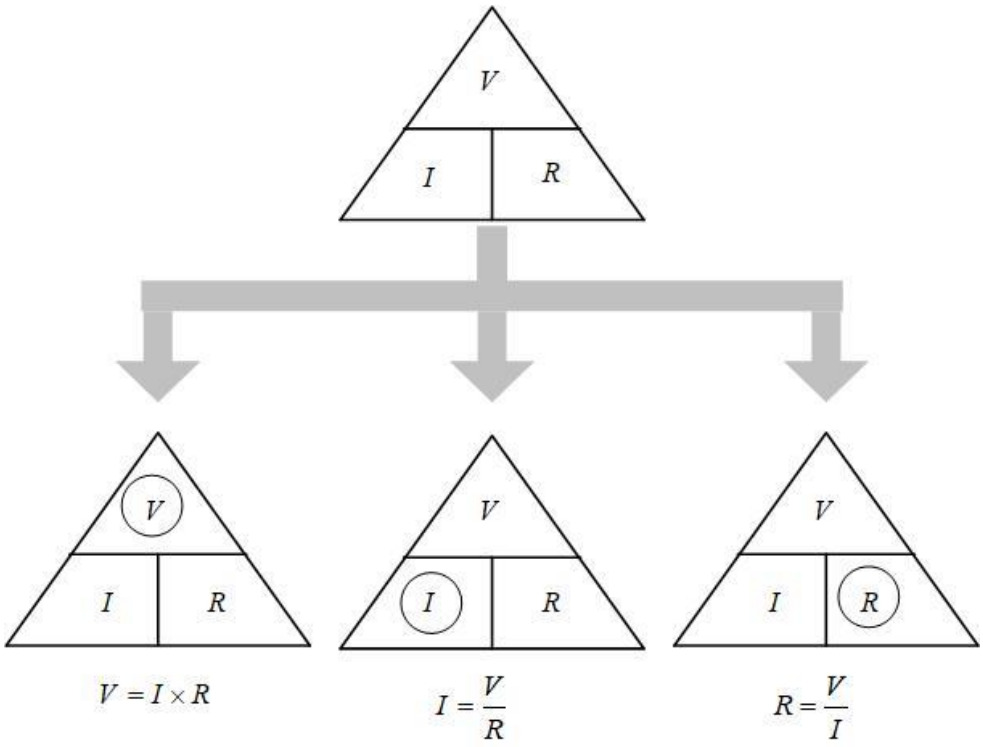
1.5.1 สมการกฎของโอห์ม

เมื่อกำหนดให้แรงดันไฟฟ้าเป็นแหล่งจ่ายพลังงานจากภายนอกที่ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้า ส่วนโหลดคือภาระที่ทำให้เกิดความต้านทานไฟฟ้าซึ่งเป็นปฏิภาคผกผักกับค่ากระแสไฟฟ้า กล่าวคือ หากค่าความต้านทานของค่าโหลดมีค่าต่ำย่อมทำให้ค่าของกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านนั้นมีค่าสูงขึ้น ในทำนองตรงกันข้ามเมื่อค่าความต้านทานของโหลดมีค่าสูงขึ้น ลักษณะเช่นนี้ย่อมทำให้ค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดนั้นมีค่าลดลง และกระแสไฟฟ้าหมายถึงอัตราส่วนระหว่างค่าของแรงดันไฟฟ้าที่มีต่อความต้านทานไฟฟ้า หากกำหนดให้แรงดันไฟฟ้ามีค่าสูงขึ้นปริมาณการไหลของกระแสไฟฟ้าย่อมสูงขึ้นตามไปด้วย แต่ถ้าหากว่าแรงดันไฟฟ้ามีค่าต่ำลง ลักษณะนี้ย่อมทำให้กระแสไฟฟ้ามีค่าต่ำลงนั่นเอง ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (1.11)

$$R = \frac{V}{I} \tag{1.11}$$

จากสมการที่ (1.11) สามารถใช้สัญลักษณ์ R แทนค่าความต้านทานซึ่งมีหน่วยเป็นโอห์ม (Ω) และใช้สัญลักษณ์ I แทนกระแสไฟฟ้าซึ่งมีหน่วยเป็นแอมแปร์ และใช้สัญลักษณ์ V แทนแรงดันไฟฟ้าที่มีหน่วยเป็นโวลต์

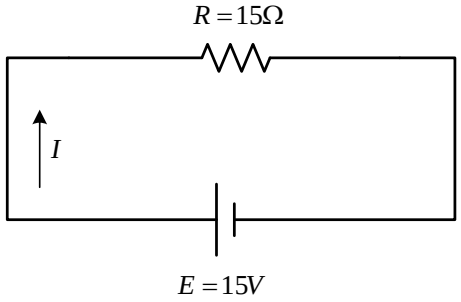
จากสมการที่ (1.11) สามารถเขียนเป็นแผนผังความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ ตามกฎของโอห์มในรูปของสามเหลี่ยมความสัมพันธ์ได้ดังภาพที่ 1.9



ภาพที่ 1.9 สามเหลี่ยมความสัมพันธ์ของสมการกฎของโอห์ม

จากความสัมพันธ์ของกฎของโอห์มจะเห็นว่ากฎของโอห์มเป็นกฎเบื้องต้นที่สำคัญที่ควรจะรู้เนื่องจากกฎของโอห์มนี้มักจะเป็นพื้นฐานด้านวิศวกรรมไฟฟ้าเพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับกฎอื่น ๆ และวงจรไฟฟ้าในรูปแบบต่าง ๆ เสมอ

ตัวอย่างที่ 1.9 ให้คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าในวงจรดังภาพที่ 1.10



ภาพที่ 1.10 การคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าของวงจร

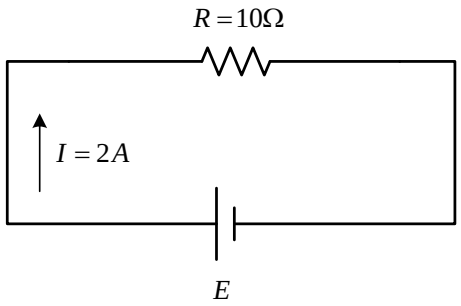
วิธีทำ จากกฎของโอห์ม คำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรได้ดังนี้

$$I = \frac{V}{R}$$

แทนค่าจะได้ $$I = \frac{15}{15}$$

$$I = 1A$$

ตัวอย่างที่ 1.10 ให้คำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าของวงจรดังภาพที่ 1.11



ภาพที่ 1.11 การคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าของวงจร

วิธีทำ จากกฎของโอห์ม คำนวณหาแรงดันไฟฟ้าในวงจรได้ดังนี้

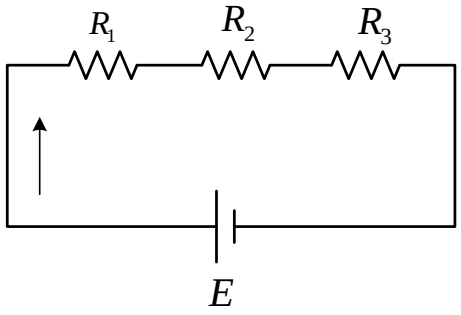
$$V = IR$$

แทนค่าจะได้ $$V = 2 \times 10$$

$$V = 20V$$

1.5.2 การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรอนุกรม

การที่เอาความต้านทานมากกว่าหนึ่งตัวขึ้นไปมาต่ออันดับหรืออนุกรมกับแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง เรียกว่า วงจรอนุกรมดังภาพที่ 1.12



ภาพที่ 1.12 วงจรอนุกรม

จากภาพที่ 1.12 จะได้ว่า $$E = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3}$$

$$IR_T = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$IR_T = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

นำ I หารตลอดจะได้ $$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

เมื่อ R_T คือ ความต้านทานรวมของวงจร

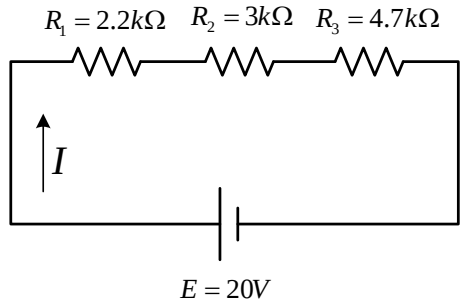
สรุปในวงจรอนุกรมจะได้ว่า

1) กระแสไหลเท่ากันตลอด

2) แรงดันตกคร่อมความต้านแต่ละตัวจะแตกต่างกันไปตามกฎของโอห์มกล่าวคือ ความต้านทานตัวใดที่มีค่ามากจะมีแรงดันตกคร่อมมาก

3) ผลรวมของแรงดันตกคร่อมความต้านทานแต่ละตัวจะเท่ากับแรงดันที่จ่ายให้แก่วงจร

ตัวอย่างที่ 1.11 จากวงจรดังภาพที่ 1.13 ประกอบด้วยตัวต้านทาน R_1=2.2kΩ ต่ออนุกรมกับตัวต้านทาน R_2=3kΩ และ R_3=4.7kΩ มีแหล่งจ่ายไฟตรง 20V จงหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อม ตัวต้านทานแต่ละตัว กระแสไฟฟ้าไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัว กระแสไฟฟ้ารวม และความต้านทานรวมในวงจร



ภาพที่ 1.13 วงจรสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 1.11

วิธีทำ จากคุณสมบัติของวงจรอนุกรมหาค่าความต้านทานรวม R_T จะได้ว่า

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

แทนค่าจะได้ $R_T = 2.2k\Omega + 3k\Omega + 4.7k\Omega$

ดังนั้นจะได้ความต้านทานรวม $R_T = 9.9k\Omega$

คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจรจะได้ว่า

$$I = \frac{V}{R_T}$$

แทนค่าจะได้ $I = \frac{20}{9.9k} = 2.02mA$

ดังนั้นจะได้กระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจร $I = 2.02mA$

จากคุณสมบัติของวงจรอนุกรมจะได้ว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรจะมีค่าเท่ากันตลอด

ดังนั้นจะได้กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวเป็น $I = 2.02mA$

คำนวณแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานแต่ละตัวได้ดังนี้

คร่อมตัวต้านทาน $R = 2.2k\Omega$;

$$V = IR_1$$

แทนค่าจะได้ $$V = \left(2.02\times10^{-3}\right)\times\left(2.2\times10^{3}\right)$$

$$V = 4.444V$$

คร่อมตัวต้านทาน $R = 3k\Omega$;

$$V = IR_2$$

แทนค่าจะได้ $$V = \left(2.02\times10^{-3}\right)\times\left(3\times10^{3}\right)$$

$$V = 6.06V$$

คร่อมตัวต้านทาน $R = 4.7k\Omega$;

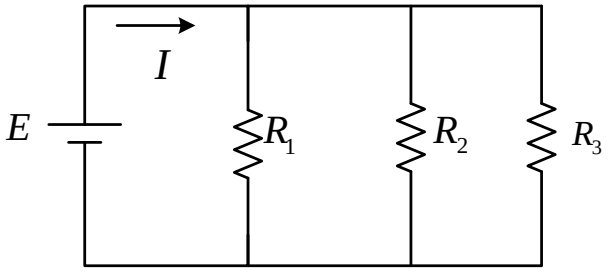
$$V = IR_3$$

แทนค่าจะได้ $$V = \left(2.02\times10^{-3}\right)\times\left(4.7\times10^{3}\right)$$

$$V = 9.494V$$

1.5.3. การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรขนาน

การที่เอาความต้านทานมากกว่าหนึ่งตัวขึ้นไปมาต่อขนานหรือคร่อมกับแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง เรียกว่าวงจรขนานดังภาพที่ 1.14



ภาพที่ 1.14 วงจรขนาน

จากรูปจะเห็นได้ชัดว่า $I_T = I_1 + I_2 + I_3$ (เมื่อ I_T คือกระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจร)

$$\frac{E}{R_T} = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}$$

$$\frac{E}{R_T} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$ (คูณด้วย $\frac{1}{E}$ ทั้งสองข้าง)

$$\left(\frac{E}{R_T}\right)\times\left(\frac{1}{E}\right) = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)\times\left(\frac{1}{E}\right)$$

ดังนั้นจะได้ $$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

สรุปคุณสมบัติในวงจรขนานจะได้ว่า

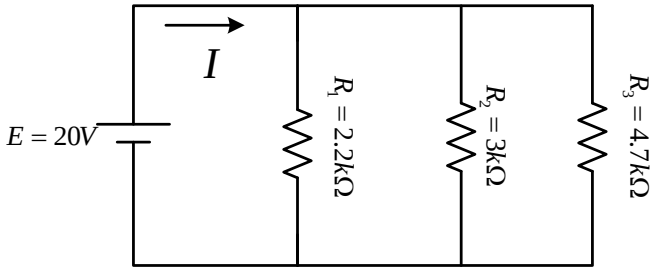
1) แรงดันจะเท่ากันตลอดทั้งวงจร นั่นคือ $E = V_1 = V_2 = V_3 = ... = V_n$

2) กระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวจะไม่เท่ากัน กล่าวคือ เป็นไปตามกฎของโอห์ม (ถ้าความต้านทานเท่ากัน กระแสในสาขาย่อย ๆ แต่ละตัวจะเท่ากัน) นั่นคือ

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$$

3) ถ้าโหลดในวงจรขนานตัวใดตัวหนึ่งเกิดขัดข้อง โหลดตัวอื่น ๆ ก็ยังคงใช้ได้ ถ้าโหลดเป็นหลอดไฟฟ้าก็จะเทียบเคียงได้ง่าย เช่น ไฟหน้าบ้านเราดับแต่ในบ้าน (ในห้องต่าง ๆ) ไม่ดับยังคงใช้งานได้ปกติ ดังนั้น วงจรไฟฟ้าในบ้านอยู่อาศัยเป็นวงจรขนาน

ตัวอย่างที่ 1.12 จากวงจรดังภาพที่ 1.15 ประกอบด้วยตัวต้านทาน R_1=2.2kΩ ต่อขนานกับตัวต้านทาน R_2=3kΩ และ R_3=4.7kΩ มีแหล่งจ่ายไฟตรง 20 V จงหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานแต่ละตัว กระแสไฟฟ้าไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัว กระแสไฟฟ้ารวม และความต้านทานรวมในวงจร



ภาพที่ 1.15 วงจรสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 1.12

วิธีทำ จากคุณสมบัติของวงจรขนานจะได้ว่า แรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทานแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นจะได้แรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทานแต่ละตัวเป็นดังนี้

$$E = V_{R_1} = V_{R_2} = V_{R_3} = 20V$$

คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวจะได้ว่า

กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_1;

$$I_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1}$$

แทนค่าจะได้ $$I_{R_1} = \frac{20V}{2.2k\Omega} = 9.091mA$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_1 คือ 9.091 mA

กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_2;

$$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2}$$

แทนค่าจะได้ $$I_{R_1} = \frac{20V}{3k\Omega} = 6.667mA$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_2 คือ 6.667 mA

กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_3;

$$I_{R_3} = \frac{V_{R_3}}{R_3}$$

แทนค่าจะได้ $$I_{R_3} = \frac{20V}{4.7k\Omega} = 4.255mA$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_3 คือ 4.255 mA

และค่ากระแสไฟฟ้ารวมในวงจรขนานเกิดจากผลรวมของค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวจะได้

$$I_T = I_{R_1} + I_{R_2} + I_{R_3}$$

แทนค่าจะได้ $$I_T = 9.091 + 6.667 + 4.255 = 20.01mA$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้ารวมในวงจรคือ 20.01 mA

คำนวณหาค่าความต้านทานรวมในวงจรขนานจะได้ว่า

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

แทนค่าจะได้ $$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{2.2k\Omega} + \frac{1}{3k\Omega} + \frac{1}{4.7k\Omega}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{(3k\Omega)\times(4.7k\Omega) + (2.2k\Omega)\times(4.7k\Omega) + (2.2k\Omega)\times(3k\Omega)}{(2.2k\Omega)\times(3k\Omega)\times(4.7k\Omega)}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{31.04M\Omega}{31020M\Omega}$$

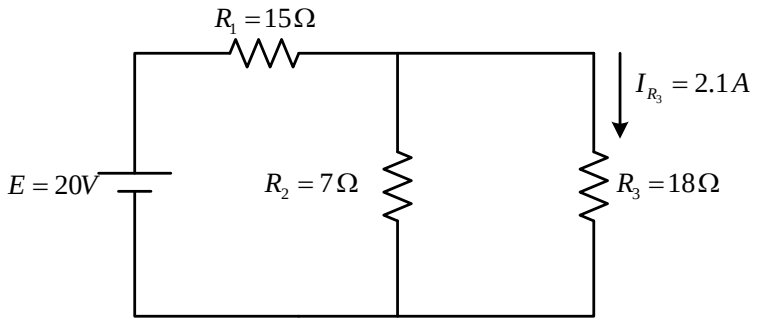
$$R_T = 999.36\Omega$$

ดังนั้นจะได้ค่าความต้านทานรวมเป็น 999.36 Ω

1.5.4 การประยุกต์กฎของโอห์มมาแก้ปัญหาในวงจรผสม

คุณสมบัติของวงจรผสมก็คือ คุณสมบัติในวงจรอนุกรมรวมกับคุณสมบัติของวงจรขนานนั่นเอง ถ้าวงจรส่วนใดเป็นวงจรอนุกรมก็ให้ใช้หลักการวงจรอนุกรมมาแก้ปัญหา ถ้าวงจรส่วนใดเป็นวงจรขนานก็ให้ใช้หลักการวงจรขนานมาแก้ปัญหา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.13 จากวงจรดังภาพที่ 1.16 ถ้ากระแสไหลผ่าน R_3 เท่ากับ 2.1 A จงคำนวณหาค่าของแรงดันไฟฟ้าที่แหล่งกำเนิด



ภาพที่ 1.16 วงจรสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 1.13

วิธีทำ จากกฎของโอห์มคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทาน R_3 จะได้ว่า

$$V_{R_3} = I_{R_3} \times R_3$$

แทนค่าจะได้ $$V_{R_3} = 2.1 \times 18$$

$$V_{R_3} = 37.8V$$

จากคุณสมบัติของวงจรขนานคือแรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทานที่ขนานกันมีค่าเท่ากันตลอด

ดังนั้น $$V_{R_3} = V_{R_2} = 37.8V$$

จากกฎของโอห์มคำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_2 จะได้ว่า

$$I_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2}$$

แทนค่าจะได้ $$I_{R_2} = \frac{37.8}{7}$$

$$I_{R_2} = 5.4\,A$$

จากคุณสมบัติของวงจรขนาน คือกระแสที่ไหลในวงจรรวมจะมีค่าเท่ากับผลรวมของกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวที่ขนานกันจะได้

$$I_T = I_{R_2} + I_{R_3} = 5.4\,A + 2.1\,A = 7.5\,A$$

จากคุณสมบัติของวงจรอนุกรม คือผลรวมของแรงดันตกคร่อมความต้านทานแต่ละตัวจะเท่ากับแรงดันที่จ่ายให้แก่วงจร(E)ดังนั้นจะได้ว่า

$$E = I_T R_1 + V_{R_2}$$

แทนค่าจะได้ $$E = (7.5 \times 15) + 37.8$$

$$E = 112.5 + 37.8 = 150.3V$$

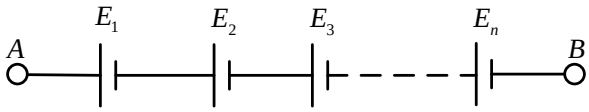
ดังนั้นจะได้แรงดันไฟฟ้าที่แหล่งกำเนิดคือ 150.3 V

1.6 เซลล์ไฟฟ้า

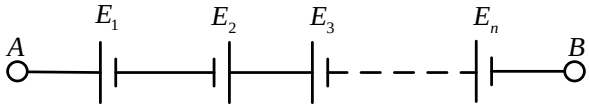
เซลล์ไฟฟ้าคือ แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าโดยทำหน้าที่เปลี่ยนแปลงพลังงานเคมีให้เป็นพลังงานไฟฟ้า เช่น ถ่านไฟฉาย แบตเตอรี เป็นต้น

1.6.1. การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรม

เมื่อนำเอาแหล่งจ่ายแรงดันที่มีแรงดัน E โวลต์มาต่อกันเป็นแถวหรือเป็นลำดับ โดยเอาขั้วใดขั้วหนึ่งของแหล่งจ่ายแรงดันตัวที่ 1 ต่อกับขั้วใดก็ได้ของแหล่งจ่ายแรงดันตัวที่ 2 และขั้วที่เหลือของตัวที่ 2 ต่อไปยังขั้วใดขั้วหนึ่งของตัวที่ 3 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เรียกว่า การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมซึ่งจะมีรูปแบบการต่ออนุกรมทั้งหมด 2 รูปแบบคือ การต่อเซลล์ไฟฟ้าอนุกรมรูปแบบเสริมกันแสดงดังภาพที่ 1.17 เป็นการต่อเซลล์อนุกรมที่มีทิศทางของแรงดันไฟฟ้าทางเดียวกัน การต่อเซลล์ไฟฟ้ารูปแบบนี้จะทำให้แรงดันไฟฟ้ารวมเพิ่มมากขึ้น และรูปแบบที่ 2 เป็นการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมรูปแบบหักล้างกันแสดงดังภาพที่ 1.18 เป็นการต่อเซลล์อนุกรมที่มีทิศทางของแรงดันไฟฟ้าสวนทางกัน การต่อรูปแบบนี้จะทำให้แรงดันไฟฟ้ารวมลดน้อยลงไป

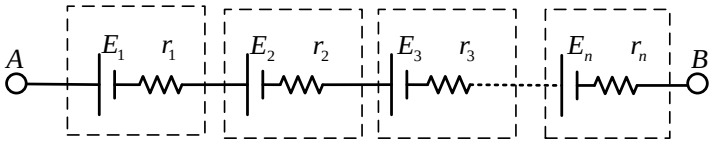


ภาพที่ 1.17 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมเสริมกัน



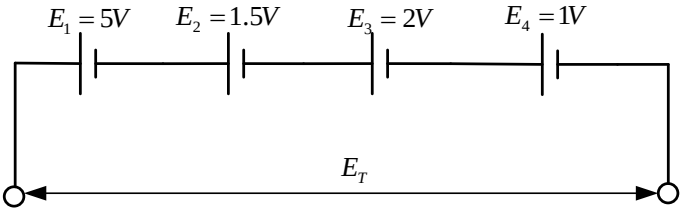
ภาพที่ 1.18 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมหักล้างกัน

โดยทั่วไปเซลล์ไฟฟ้าจะประกอบไปด้วยข้อต่อภายในและผลของสารเคมีต่าง ๆ เช่น การเกิดโพลาไรเซชัน (polarization) ทำให้กระแสไฟฟ้าในวงจรมีค่าน้อยกว่าในความเป็นจริงก่อให้เกิดค่าความต้านทานภายใน (internal resistance) ดังนั้นการต่อเซลล์ไฟฟ้าเมื่อพิจารณาค่าความต้านทานภายในจะสามารถแสดงได้ดังภาพที่ 1.19



ภาพที่ 1.19 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมและมีความต้านทานภายใน

ตัวอย่างที่ 1.14 ให้หาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมเมื่อนำเซลล์ไฟฟ้า 4 ตัวมาต่ออนุกรมกันดังภาพที่ 1.20



ภาพที่ 1.20 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมจำนวน 4 เซลล์

วิธีทำ เนื่องจากเป็นการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมที่มีรูปแบบเสริมกันดังนั้นทิศทางของแรงดันไฟฟ้าจะมีทิศทางเดียวกันสามารถคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมได้ดังนี้

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

แทนค่าจะได้

$$E_T = 5 + 1.5 + 2 + 1$$

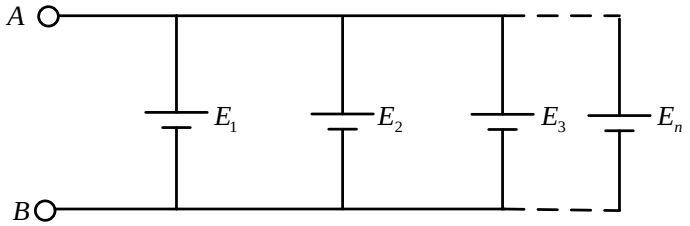
$$E_T = 9.5V$$

ดังนั้นแรงดันไฟฟ้ารวมคือ 9.5V

โดยทั่วไปการหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมของเซลล์ไฟฟ้าที่ต่อแบบอนุกรมจะอ้างอิงจากด้านขั้วบวกหรือพิจารณาจากอิทธิพลของขั้วบวกเป็นหลักก่อน เนื่องจากกระแสไฟฟ้าจะเคลื่อนที่ออกจากขั้วบวกไปยังขั้วลบเสมอ ส่วนความต้านทานภายในจะไม่ส่งผลกระทบแต่อย่างใดเนื่องจากมีการเชื่อมต่อแบบอนุกรมกันอยู่แล้วสามารถนำมาบวกกันได้ตามคุณสมบัติของวงจรอนุกรม

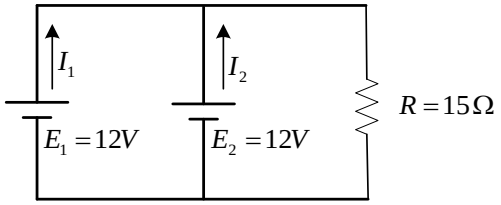
1.6.2. การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนาน

การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนานคือ การนำเอาขั้วของเซลล์ไฟฟ้าที่มากกว่า 1 เซลล์ที่เหมือนกันมาเชื่อมต่อกันหรือนำมารวมกันเป็นกระจุกเดียวกัน ซึ่งจะต้องคำนึงถึงขนาดแรงดันไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าแต่ละเซลล์จะต้องมีขนาดที่เท่ากันจึงจะสามารถนำมาต่อกันแบบขนานได้ ซึ่งการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนานนี้จะทำให้แรงดันรวมของเซลล์ไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับแรงดันของเซลล์ไฟฟ้าตัวใดตัวหนึ่ง แต่ปริมาณกระแสที่ไหลภายในจะมีปริมาณเพิ่มมากขึ้นเนื่องจากเซลล์ไฟฟ้าจะช่วยกันจ่ายกระแสออกมาและจะได้กำลังไฟฟ้าในวงจรเพิ่มมากขึ้นเช่นกันซึ่งลักษณะการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนานแสดงได้ดังภาพที่ 1.21



ภาพที่ 1.21 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนาน

ตัวอย่างที่ 1.15 จงคำนวณหาค่า I_1, I_2 และแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานขนาด 15 Ω



วิธีทำ อาศัยคุณสมบัติของวงจรขนานจะได้ว่า

แรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานขนาด 15Ω คือ 12 V

คำนวณหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทาน 15Ω จะได้ว่า

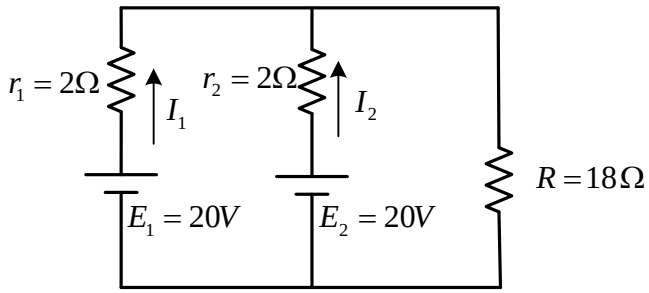
$$I_R = \frac{V_R}{R}$$

แทนค่าจะได้ $$I_R = \frac{12}{15} = 0.8A$$

เนื่องจากเซลล์ไฟฟ้ามีขนาดเท่ากันต่อขนานกัน 2 ตัวและเมื่อไม่คิดค่าความต้านทานภายในจะได้กระแสไฟฟ้าที่ไหลจากเซลล์ไฟฟ้ามีค่าเท่ากัน นั่นคือกระแสไฟฟ้า I_1, I_2 เมื่อรวมกันแล้วจะทำให้ได้กระแสไฟฟ้าเท่ากับ 0.8 A

ดังนั้น กระแสไฟฟ้า I_1, I_2 มีค่าเท่ากับ 0.4 A

ตัวอย่างที่ 1.16 จงคำนวณหาค่า I_1, I_2 และแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานขนาด 18 Ω



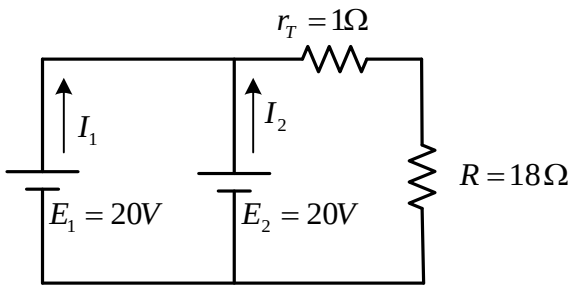
วิธีทำ เนื่องจากตัวอย่างนี้พิจารณาค่าความต้านทานภายในของเซลล์ไฟฟ้า ดังนั้นจึงส่งผลให้ค่าแรงดันไฟฟ้าที่เซลล์ไฟฟ้าไม่เท่ากับแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทาน 18 Ω

พิจารณาที่ตัวต้านทานภายในจะได้ว่า r_1 ขนานกับ r_2 สามารถหาค่าความต้านทานภายในรวมได้ดังนี้

$$r_T = \frac{(r_1)\times(r_2)}{(r_1)+(r_2)}$$

แทนค่าจะได้ $$r_T = \frac{(2)\times(2)}{(2)+(2)} = 1\Omega$$

สามารถเขียนวงจรใหม่ได้ดังนี้



จากวงจรที่เขียนขึ้นใหม่ จะได้ความต้านทานรวมของวงจรคือ 19Ω และมีแรงดันตกคร่อมเป็น 20 V สามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจรได้ดังนี้

$$I_T = \frac{V_R}{R_T}$$

แทนค่าจะได้ $$I_T = \frac{20V}{19\Omega} = 1.053A$$

คำนวณหาค่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทาน 18 Ω ได้โดยอาศัยคุณสมบัติของวงจรอนุกรมที่กล่าวว่า กระแสที่ไหลในวงจรที่ต่ออนุกรมกันจะเท่ากันตลอดดังนั้น

$$V_{R18\Omega} = I_T \times R_{18\Omega}$$

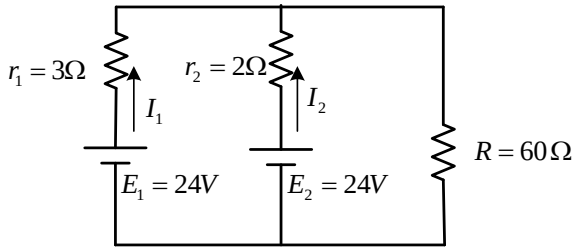
แทนค่าจะได้ $$V_{R18\Omega} = 1.053 \times 18 = 18.954V$$

ดังนั้น จะได้แรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทาน 18 Ω เท่ากับ 18.954V

เนื่องจากเซลล์ไฟฟ้ามีขนาดเท่ากันต่อขนานกัน 2 ตัวจะได้กระแสไฟฟ้าที่ไหลจากเซลล์ไฟฟ้ามีค่าเท่ากัน นั่นคือกระแสไฟฟ้า I_1, I_2 เมื่อรวมกันแล้วจะทำให้ได้กระแสไฟฟ้าเท่ากับ 1.053 A

ดังนั้น กระแสไฟฟ้า I_1, I_2 มีค่าเท่ากับ 0.527 A

ตัวอย่างที่ 1.17 จงคำนวณหาค่า I_1, I_2 และแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานขนาด 60 Ω



วิธีทำ เนื่องจากตัวอย่างนี้พิจารณาค่าความต้านทานภายในของเซลล์ไฟฟ้า ดังนั้นจึงส่งผลให้ค่าแรงดันไฟฟ้าที่เซลล์ไฟฟ้าไม่เท่ากับแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทาน 60 Ω

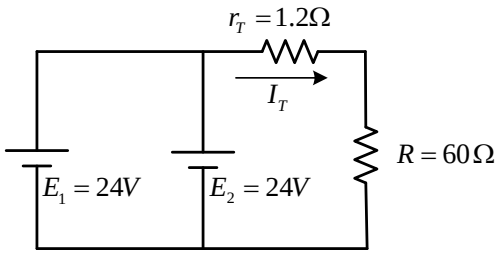
พิจารณาที่ตัวต้านทานภายในจะได้ว่า r_1 ขนานกับ r_2 สามารถหาค่าความต้านทานภายในรวมได้ดังนี้

$$\frac{1}{r_T} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

แทนค่าจะได้ $$\frac{1}{r_T} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{3\times 2}$$

$$r_T = \frac{6}{5} = 1.2\Omega$$

สามารถเขียนวงจรใหม่ได้ดังนี้



คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจรจะได้ว่า

$$I_T = \frac{V_R}{R_T}$$

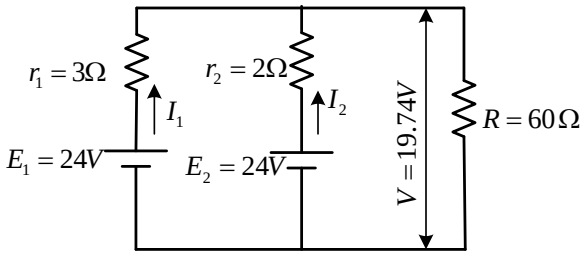
แทนค่าจะได้ $$I_T = \frac{24V}{61.2\Omega} = 0.392A$$

คำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทาน 60 Ω ได้ดังนี้

$$V_{R60\Omega} = I_T \times R_{60\Omega}$$

แทนค่าจะได้ $$V_{R60\Omega} = 0.329 \times 60 = 19.74V$$

สำหรับตัวอย่างนี้จะเห็นว่าค่าความต้านทานภายในของเซลล์ไฟฟ้าไม่เท่ากัน จึงทำให้กระแสของ I_1, I_2 จะไม่เท่ากันโดยสามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าของแต่ละเซลล์ไฟฟ้าได้โดยพิจารณาจากภาพที่ 1.22



ภาพที่ 1.22 วงจรเซลล์ไฟฟ้าแบบขนานที่มีค่าความต้านทานภายในไม่เท่ากัน

พิจารณาหาค่ากระแสไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าที่ 1 จะได้ว่า

$$I_1 = \frac{E_1 - V}{r_1}$$

แทนค่าจะได้ $$I_1 = \frac{24 - 19.74}{3} = 1.42A$$

ดังนั้นจะได้กระแสไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าที่ 1 เป็น 1.42 A

พิจารณาหาค่ากระแสไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าที่ 2 จะได้ว่า

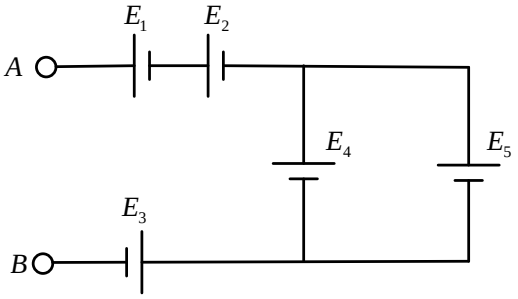
$$I_2 = \frac{E_2 - V}{r_2}$$

แทนค่าจะได้ $$I_2 = \frac{24 - 19.74}{2} = 2.13A$$

ดังนั้นจะได้กระแสไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าที่ 2 เป็น 2.13 A

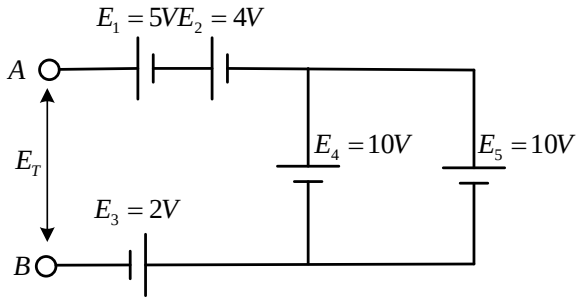
1.6.3 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสม

การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสมคือ การนำเอาเซลล์ไฟฟ้ามาต่อในลักษณะอนุกรมและขนานมารวมกันทำให้เซลล์ไฟฟ้าจ่ายทั้งแรงดันและกระแสไฟฟ้าได้เพิ่มมากขึ้นซึ่งมีลักษณะดังภาพที่ 1.23 และการรวมความต้านทานภายในของเซลล์ก็เป็นไปตามหลักการต่อความต้านทานแบบผสมทุกประการ โดยการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสมนั้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 กลุ่มคือ การต่อแบบอนุกรมกันแล้วนำมาขนานกัน และ การต่อขนานกันก่อนแล้วนำมาอนุกรมกัน โดยทั้ง 2 กลุ่มนี้จะมีเงื่อนไขการต่อซึ่งจะได้อธิบายในหัวข้อถัดไป



ภาพที่ 1.23 การต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสม

ตัวอย่างที่ 1.18 จงคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมของเซลล์ไฟฟ้าที่ต่อกันแบบผสม



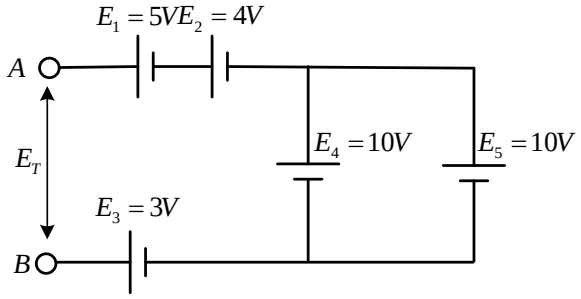
วิธีทำ เนื่องจาก $E_4 = E_5$ ดังนั้นสามารถคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมได้ดังนี้

$$E_T = E_1 + E_2 + E_4 + E_3$$

แทนค่าจะได้ $$E_T = 5 + 4 + 10 + 2$$

$$E_T = 21V$$

ตัวอย่างที่ 1.19 จงคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมของเซลล์ไฟฟ้าที่ต่อกันแบบผสม



วิธีทำ เนื่องจาก $E_4 = E_5$ ดังนั้นสามารถคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้ารวมได้ดังนี้

$$E_T = E_1 + E_2 + E_4 + E_3$$

แทนค่าจะได้ $$E_T = 5 + 4 + 10 + (-3)$$

$$E_T = 16V$$

1.6.3.1 การต่อแบบอนุกรมกันแล้วนำมาขนานกัน การต่อแบบผสมชนิดนี้มีเงื่อนไขคือเมื่อต่ออนุกรมกันแล้วก่อนนำมาขนานกันนั้น วงจรที่ได้จากการอนุกรมกันจะต้องมีแรงดันไฟฟ้าของเซลล์ไฟฟ้าอนุกรมเท่ากับค่าแรงดันไฟฟ้าที่จะนำไปขนานกัน แต่ค่าความต้านทานภายในเซลล์ไฟฟ้านั้นไม่จำเป็นต้องเท่ากันก็สามารถนำไปต่อขนานกันได้

1.6.3.2 การต่อแบบขนานกันแล้วนำมาอนุกรมกันอีกครั้งหนึ่ง การต่อแบบผสมชนิดนี้เป็นการต่อขนานกันก่อนดังนั้นแรงดันที่ต่อขนานกันต้องเท่ากัน เมื่อนำมาอนุกรมก็จะทำให้แรงดันไฟฟ้ารวมมีค่าเพิ่มมากขึ้นหรือลดลง ขึ้นอยู่กับลักษณะการต่ออนุกรมและประเภทการนำไปใช้งาน

1.7 สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงการคำนวณพื้นฐานทางไฟฟ้าเพื่อให้นักศึกษาได้เข้าใจพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณทางไฟฟ้าซึ่งประกอบด้วย ระบบหน่วย การแปลงหน่วย การศึกษากฎของโอห์มเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่มีการเชื่อมต่อในรูปแบบต่างๆ รวมทั้งการต่อเซลล์ไฟฟ้าในรูปแบบต่างๆ เพื่อเป็นพื้นฐานการนำไปสู่การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าต่อไป

1.8 คำถามท้ายบท

1. จงเปลี่ยนหน่วยต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

1.1) ระยะทาง 1 km =.....mm.

1.2) ระยะทาง 1.5 nm = ...m

1.3) แรง 4.5 kN =.....mN

1.4) ความถี่ 1.8 MHz =.....kHz

1.5) ความเร็ว 120 km/hr =.....m/s

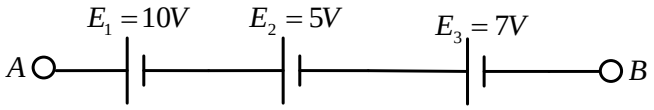
1.6) กระแสไฟฟ้า 0.00001 A =.....mA

2. ความต้านทานของตัวนำตัวหนึ่งที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 4 mm^2 และมีความยาว 50 m มีค่าเท่ากับ 0.625 Ω ให้หาค่าความต้านทานจำเพาะของตัวนำตัวนี้

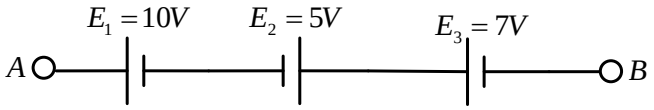
3. จงหาค่าความต้านทานของตัวนำตัวหนึ่งที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ 4 mm^2 และมีความยาว 50 m และมีค่าความต้านทานจำเพาะของตัวนำตัวนี้เป็น $\rho = 6.25\times10^{-8}\Omega m$

4. จงหาค่าความต้านทานของสายเคเบิลที่มีความยาว 100 m และมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 mm และมีค่าความต้านทานจำเพาะของตัวนำตัวนี้เป็น $\rho = 1.72\times10^{-8}\Omega m$

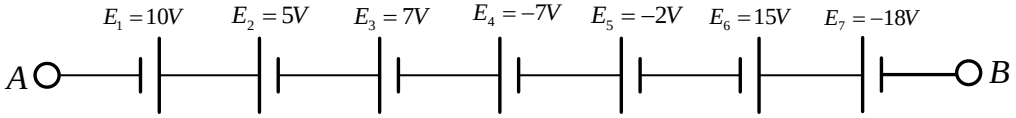
5. จงหาขนาดของแรงดันไฟฟ้า AB ที่เกิดจากการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมดังภาพ



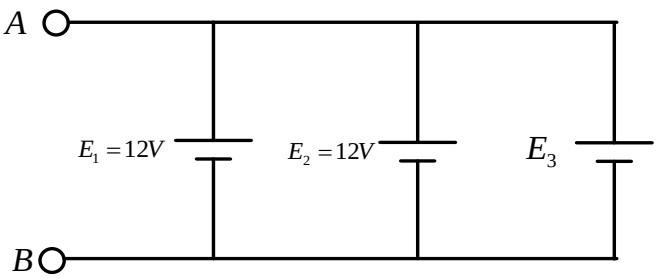
6. จงหาขนาดของแรงดันไฟฟ้า AB ที่เกิดจากการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมดังภาพ



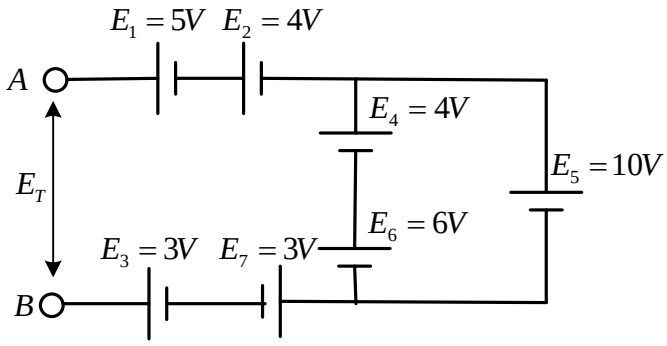
7. จงหาขนาดของแรงดันไฟฟ้า AB ที่เกิดจากการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบอนุกรมดังภาพ



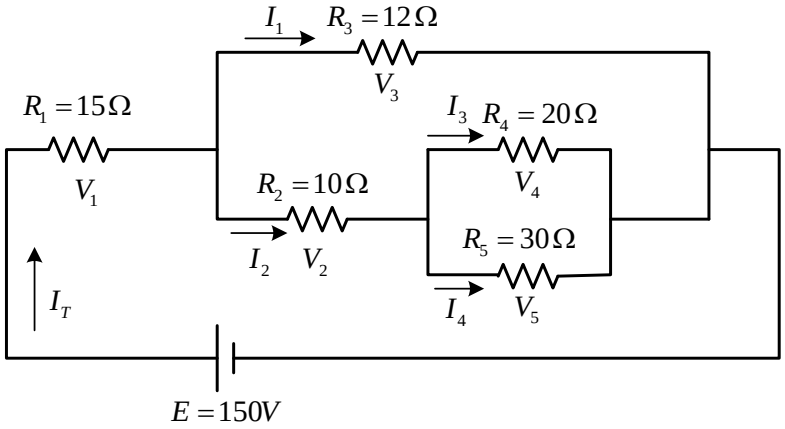
8. จงหาขนาดของแรงดันไฟฟ้า AB และแรงดันที่เซลล์ไฟฟ้า E_3 ที่เกิดจากการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบขนานดังภาพ



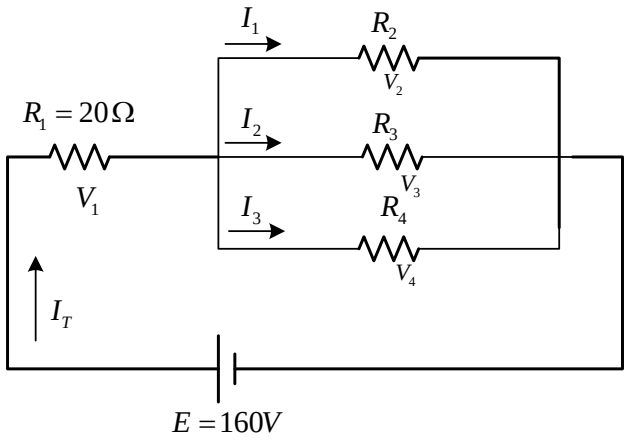
9. จงหาขนาดของแรงดัน AB ที่เกิดจากการต่อเซลล์ไฟฟ้าแบบผสมดังภาพ



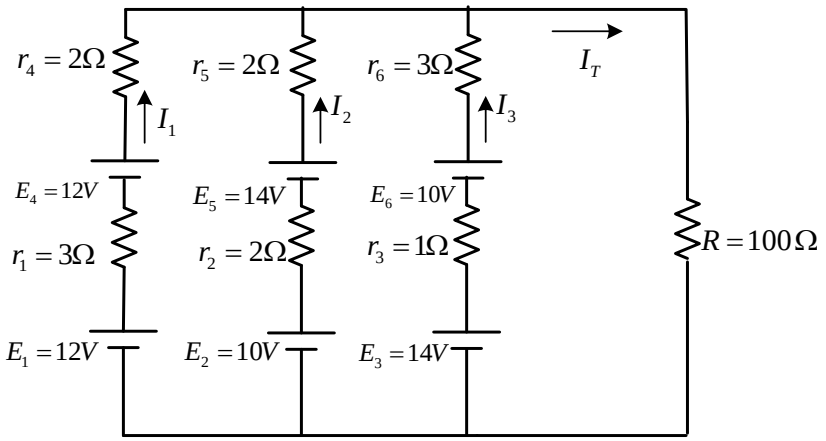
10. จงหาค่าของ I_1, I_2, I_3, I_4, I_T และ ขนาดแรงดัน V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ของวงจรดังภาพ



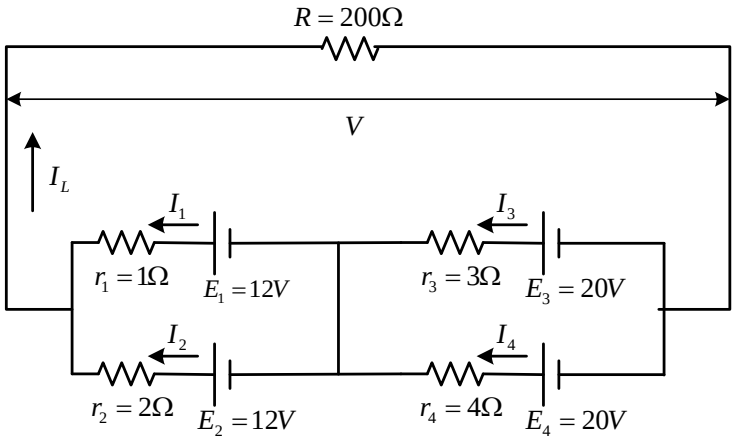
11. กำหนดให้ค่าความต้านทานรวมของวงจรดังภาพเท่ากับ 100Ω มีค่า I_2, I_3 เป็น 2A และ 2.5A ตามลำดับจงคำนวณหาค่า R_2, R_3, R_4



12. จากภาพ จงคำนวณหาค่า I_T, I_1, I_2, I_3



13. จากภาพ จงคำนวณหาค่า I_L, I_1, I_2, I_3, I_4 และ แรงดันไฟฟ้าที่คร่อมตัวต้านทาน 200Ω



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2
กฎของเคอร์ชอฟฟ์ และการวิเคราะห์แบบโนดและเมช

หัวข้อเนื้อหา

2.1. แหล่งจ่ายแรงดัน แหล่งจ่ายกระแส
   1.1.1 แหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง
   1.1.2 แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้ากระแสตรง
2.2 การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายไฟ
2.3. วงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้า
2.4. วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้า
2.5. กฎของเคอร์ชอฟฟ์
   2.5.1 กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์
   2.5.2 กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์
2.6. การวิเคราะห์วงจรด้วยวิธีกระแสวงรอบของแมกซ์เวลล์
2.7. การวิเคราะห์วงจรโดยใช้สมการโนด
   2.7.1 การใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า
   2.7.2 การใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้า
2.8. ซูเปอร์โนดของแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ
2.9. ซูเปอร์โนดของแหล่งจ่ายกระแสอิสระ
2.10. สรุป
2.11 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. ประเภท โครงสร้างและแบบจำลองสมมูลของแหล่งจ่ายแรงดัน และแหล่งจ่ายกระแส
2. การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายกระแสตรงเพื่อให้เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า
3. วงจรแบ่งแรงดันและวงจรแบ่งกระแส และการประยุกต์ใช้สำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า
4. คำนวณและวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าโดยใช้การวิเคราะห์แบบโนดและเมช
5. ประยุกต์ใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

6. คำนวณและวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเมื่อมีแหล่งจ่ายแรงดันหรือแหล่งจ่ายกระแสอิสระอยู่ในวงจร

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 2
กฎของเคอร์ชอฟฟ์ และการวิเคราะห์แบบโนดและเมช

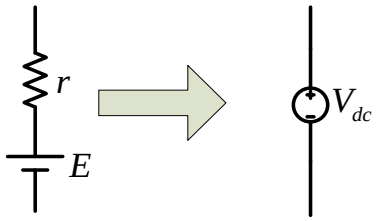
บทนี้เป็นการศึกษาการคำนวณหาปริมาณไฟฟ้าในเบื้องต้นโดยอาศัยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ ซึ่งจะเป็นเนื้อหาสำคัญสำหรับการนำไปสู่การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยวิธีโนดและเมช โดยเนื้อหาในบทนี้มีความต่อเนื่องจากบทก่อนหน้านี้ หลังจากที่ได้ศึกษาปริมาณพื้นฐานทางไฟฟ้า การต่อวงจรไฟฟ้าในรูปแบบอนุกรม แบบขนานและแบบผสมไปแล้ว รวมทั้งการคำนวณปริมาณทางไฟฟ้าด้วยกฎของโอห์ม ดังนั้นเพื่อให้การศึกษาเนื้อหาในบทนี้จำเป็นต้องศึกษาในส่วนของแหล่งจ่ายไฟฟ้าที่ประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดันกระแสตรง แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าดังต่อไปนี้

2.1. แหล่งจ่ายแรงดัน แหล่งจ่ายกระแส

แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสตรง (direct current sources) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ แหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง (voltage source) และแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้ากระแสตรง (current source) โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1.1 แหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง

เมื่อเครื่องกำเนิดไฟฟ้ากระแสตรงหรือแบตเตอรี่ทำงานจ่ายแรงดันออกมาเท่ากับ V โวลต์ เกิดเป็นแหล่งจ่ายแรงดันขึ้น และภายในแหล่งจ่ายแรงดันนี้จะมีความต้านทานภายใน (internal resistance) อยู่เสมอ ซึ่งปกติจะมีค่าน้อยมากในการคำนวณบางครั้งจึงสามารถทำงานละทิ้งได้ ซึ่งค่าความต้านทานภายในนี้จะต้องต่ออนุกรมกับแหล่งจ่ายแรงดันแสดงดังภาพที่ 2.1

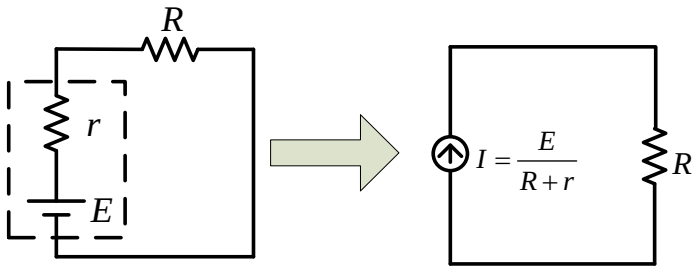


ภาพที่ 2.1 แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง

บางครั้งการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสตรง จะไม่คำนึงถึงค่าของความต้านทานภายในของแหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสตรงเนื่องจากมีค่าน้อยมาก และให้การเขียนไดอะแกรมของวงจรเกิดความเข้าใจง่ายและไม่ซับซ้อนจึงพิจารณาแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงเป็นสัญลักษณ์วงกลมที่มีเครื่องหมายบวกและลบอยู่ภายในเพื่อระบุว่าเป็นระบบไฟฟ้ากระแสตรง

2.1.2. แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้ากระแสตรง

แหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้ากระแสตรงนั้นจะมีความแตกต่างจากแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้าคือ แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าจะมีค่าก็ต่อเมื่อมีแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเกิดขึ้นก่อน และมีโหลดต่อที่ขั้วต่อของแหล่งจ่ายแรงดันด้วย หรืออธิบายได้ว่า รูปวงจรของแหล่งจ่ายแรงดันจะต้องครบรอบ จึงจะสามารถทำให้กระแสไฟฟ้าไหลได้ การที่จะนำวงจรกำเนิดแรงดันไฟฟ้ามาต่อให้ครบวงจรนั้นไม่สามารถกระทำได้เนื่องจากจะทำให้กระแสไฟฟ้ามีค่าสูงมากเกินไป เนื่องจากค่าความต้านทานภายในมีค่าน้อยมาก อาจจะส่งผลเสียหายต่อแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้าได้ แต่สามารถกระทำได้โดยนำโหลดที่มีค่าต้านทานที่เหมาะสมมาต่ออนุกรมกับแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเพื่อให้ครบวงจร จะทำให้เกิดเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าขึ้นมาได้ดังภาพที่ 2.2



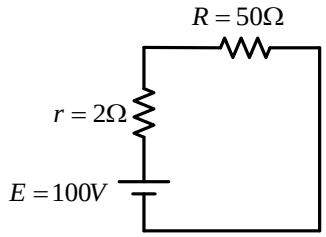
ภาพที่ 2.2 แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรง

จากภาพที่ 2.2 จะเห็นได้ว่า แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงนั้นสามารถเปลี่ยนเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงได้ หรือแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงนั้นก็สามารถเปลี่ยนเป็นแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงได้เช่นกัน โดยอาศัยกฎของโอห์มในการเปลี่ยนแปลงแหล่งจ่ายไฟฟ้าทั้งสอง

2.2. การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายไฟ

การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายไฟ (sources transformation) จะช่วยทำให้การคำนวณหาค่าปริมาณทางไฟฟ้าต่าง ๆ ในวงจรบางกรณีทำได้ง่ายขึ้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงของแหล่งจ่ายไฟฟ้าใน 2 ลักษณะคือ การเปลี่ยนจากแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าที่ต่ออนุกรมกับความต้านทานไปเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าและ การเปลี่ยนจากแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าที่ต่อขนานกับความต้านทานไปเป็นแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าซึ่งสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างที่ 2.1 และตัวอย่างที่ 2.2

ตัวอย่างที่ 2.1 จากภาพที่ 2.3 จงเปลี่ยนแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงให้เป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงพร้อมทั้งระบุค่าของแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงให้ถูกต้อง



ภาพที่ 2.3 แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงขนาด 100V

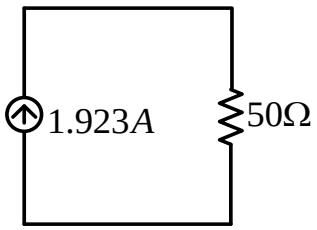
วิธีทำ จากกฎของโอห์มสามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าของแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงได้

$$I = \frac{E}{R + r}$$

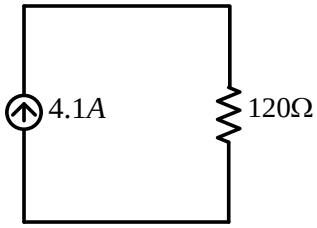
แทนค่าจะได้ $$I = \frac{100V}{50\Omega + 2\Omega}$$

$$I = 1.923A$$

จะได้วงจรแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงดังนี้



ตัวอย่างที่ 2.2 จากภาพที่ 2.4 จงเปลี่ยนแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงให้เป็นแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงเมื่อกำหนดให้ค่าความต้านทานภายในของแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงเป็น $1\,\Omega$



ภาพที่ 2.4 แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงขนาด 4.1A

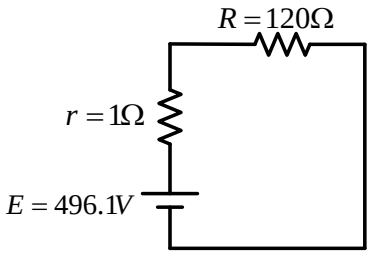
วิธีทำ จากกฎของโอห์มสามารถคำนวณหาค่าแรงดันไฟฟ้าของแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ากระแสตรงได้

$$E = I \times (R + r)$$

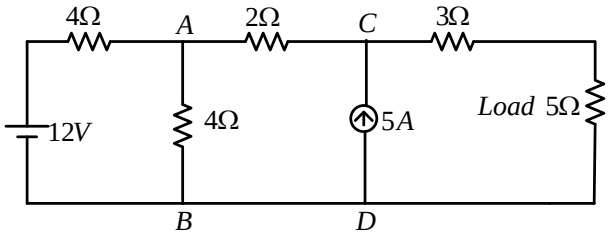
แทนค่าจะได้ $$E = 4.1 \times (120 + 1)$$

$$E = 496.1V$$

จะได้วงจรแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้ากระแสตรงดังนี้



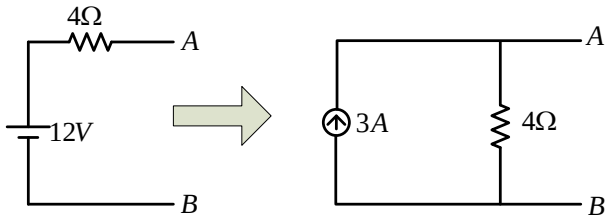
ตัวอย่างที่ 2.3 ให้ใช้วิธีการเปลี่ยนรูปแหล่งจ่ายไฟเพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดความต้านทาน 5Ω ของวงจรดังภาพที่ 2.5



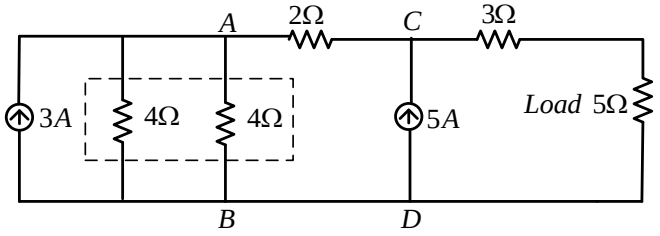
ภาพที่ 2.5 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 2.3

วิธีทำ จากภาพที่ 2.5 พิจารณาด้านซ้ายของวงจรซึ่งเป็นแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าอนุกรมกับความต้านทานขนาด 4Ω สามารถแปลงเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าได้ดังนี้

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{4} = 3A$$

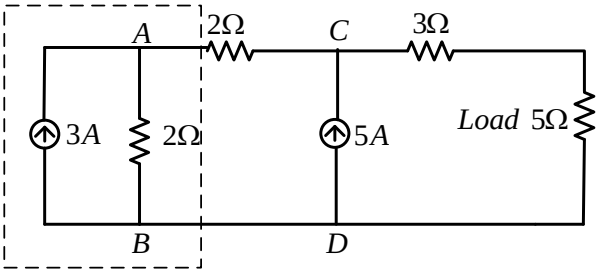


ดังนั้น สามารถเขียนวงจรในภาพที่ 2.5 เมื่อแทนรูปวงจรที่ได้จากการแปลงแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าจะได้ดังนี้



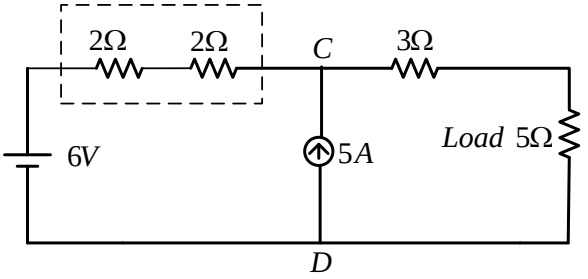
พิจารณาค่าความต้านทานที่อยู่ในกรอบเส้นประ ซึ่งขนานกันสามารถยุบรวมกันได้ดังนั้น สามารถเขียนวงจรใหม่ได้ดังนี้

$$4\Omega // 4\Omega = \frac{4\times 4}{4+4} = 2\Omega$$

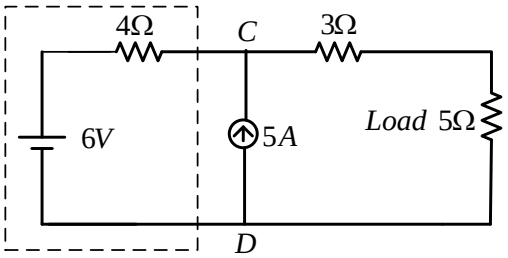


พิจารณาแหล่งกำเนิดกระแสไฟฟ้าในกรอบเส้นประ สามารถคำนวณค่าแรงดันไฟฟ้าสำหรับแปลงเป็นแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้าได้ดังนี้

$$V = IR = 3\times 2 = 6V$$

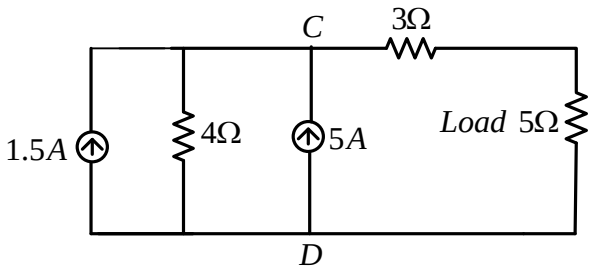


พิจารณาค่าความต้านทานในกรอบเส้นประที่ต่ออนุกรมกัน สามารถยุบรวมกันได้ ทำให้สามารถวาดวงจรใหม่ได้ดังนี้

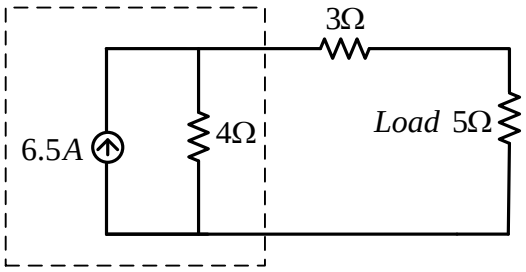


พิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันในกรอบเส้นประซึ่งต่ออนุกรมกับความต้านทานขนาด 4Ω สามารถแปลงเป็นแหล่งจ่ายกระแสได้ดังนี้

$$I = \frac{V}{R} = \frac{6}{4} = 1.5A$$

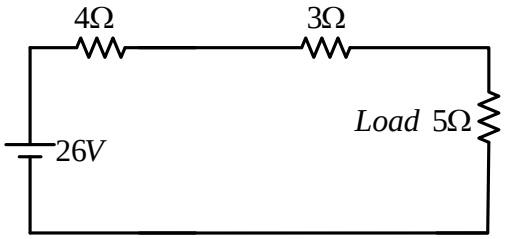


จากวงจรด้านบนนี้สามารถรวมค่ากระแสที่ไหลในวงจรได้เท่ากับ 1.5A+5A = 6.5A และสามารถเขียนวงจรใหม่ได้เป็น



จากวงจรในกรอบเส้นประ สามารถแปลงแหล่งจ่ายกระแสเป็นแหล่งจ่ายแรงดันได้ดังนี้

$$V = IR = 6.5 \times 4 = 26V$$



เนื่องจากวงจรที่ได้จากการแปลงแหล่งจ่ายไฟฟ้านี้ได้เป็นวงจรอนุกรม ดังนั้นค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรจะมีค่าเท่ากับค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลด สามารถหาค่ากระแสที่ไหลผ่านโหลดได้โดยอาศัยกฎของโอห์มคือ

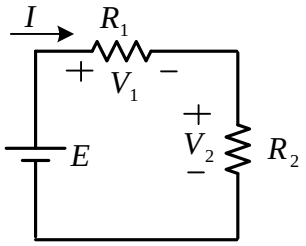
$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{26}{4+3+5} = 2.17A$$

ดังนั้นจะได้ค่ากระแสที่ไหลผ่านโหลดความต้านทานเท่ากับ 2.17 A

ในวงจรไฟฟ้าที่มีแหล่งจ่ายไฟฟ้าเพียงแหล่งจ่ายเดียว แต่หากต้องการแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าหลายระดับ วิธีการแบ่งแรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าด้วยการใช้ค่าความต้านทานที่มีอยู่ในแต่ละส่วนของวงจรเป็นตัวแบ่งได้ โดยอาศัยกฎของโอห์มมาประยุกต์ในการคำนวณค่าต่าง ๆ ในวงจร

2.3 วงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้า

วงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้า (voltage divider circuit) เป็นวงจรที่ประยุกต์ใช้กับวงจรอนุกรม เนื่องจากวงจรอนุกรมมีแรงดันตกคร่อมโหลดไม่เท่ากัน ซึ่งโดยทั่วไปแล้ววงจรแบ่งแรงดันได้รับการพัฒนามาจากกฎของโอห์ม แต่ได้รับการประยุกต์ให้สามารถคำนวณได้รวดเร็วมากขึ้นและสะดวกกว่ากฎของโอห์ม ลักษณะของวงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้ามีลักษณะเป็นวงจรอนุกรมดังภาพที่ 2.6



ภาพที่ 2.6 วงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้ามีลักษณะเป็นวงจรอนุกรม

จากภาพที่ 2.6 อาศัยกฎของโอห์ม สามารถหาค่าแรงดันที่ตกคร่อมค่าความต้านทาน R_1 ได้

$$V_1 = IR_1 \tag{2.1}$$

และ สามารถหาค่าแรงดันที่ตกคร่อมค่าความต้านทาน R_2 ได้

$$V_2 = IR_2 \tag{2.2}$$

นำสมการที่ (2.1) หารด้วยสมการที่ (2.2) จะได้ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1}$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1} \times V_1 \tag{2.3}$$

$$E = V_1 + V_2 \tag{2.4}$$

นำค่า V_2 ในสมการที่ (2.3) แทนค่าในสมการที่ (2.4) จะได้

$$E = V_1 + \frac{R_2}{R_1} \times V_1$$

$$E = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times V_1$$

$$E = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) \times V_1$$

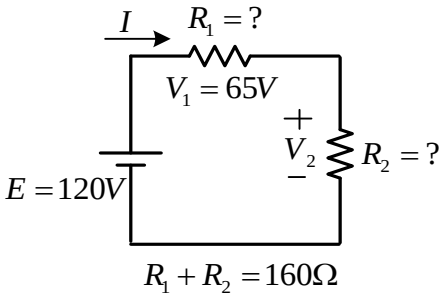
ดังนั้น $$V_1 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \times E \qquad (2.5)$$

นำค่า V_1 ในสมการที่ (2.5) แทนค่าในสมการที่ (2.3) จะได้

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1} \times \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \times E$$

$$V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \times E \qquad (2.6)$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จากวงจรดังภาพที่ 2.7 จงคำนวณหาค่า R_1, R_2 และ V_2



ภาพที่ 2.7 วงจรแบ่งแรงดันไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 2.4

วิธีทำ จากสมการที่ (2.5) สามารถคำนวณหาค่า R_1 ได้

$$R_1 = \left(\frac{R_1 + R_2}{E} \right) \times V_1$$

แทนค่าจะได้ $$R_1 = \left(\frac{160\Omega}{120V} \right) \times 65V$$

$$R_1 = 86.67\Omega$$

จากสมการที่ (2.4) สามารถคำนวณหาค่า V_2 ได้

$$E = V_1 + V_2$$

$$V_2 = E - V_1$$

แทนค่าจะได้ $$V_2 = 120V - 65V = 55V$$

สามารถคำนวณหาค่า R_2 ได้โดยอาศัยสมการที่ (2.6) จะได้

$$V_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \times E$$

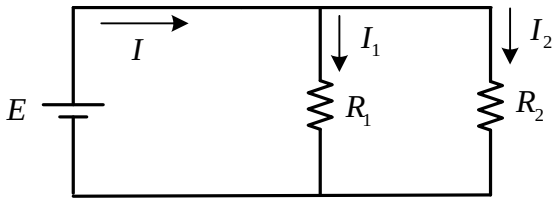
จัดรูปแบบสมการใหม่จะได้ $$R_2 = \left(\frac{R_1 + R_2}{E}\right) \times V_2$$

แทนค่าจะได้ $$R_2 = \left(\frac{160\Omega}{120V}\right) \times 55V$$

$$R_2 = 73.33\Omega$$

2.4 วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้า

วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้า (current divider circuit) นี้นำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในวงจรขนาน เนื่องจากในวงจรขนานมีจำนวนกระแสที่ไหลไม่เท่ากัน โดยกระแสจะแบ่งไหลตามพิกัดความต้านทานของโหลดนั้น ๆ การคำนวณด้วยกฎของโอห์มจะทำให้เกิดความล่าช้า และมีความยุ่งยากมากขึ้น ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยการแบ่งกระแสไฟฟ้ามาช่วยในการแก้ไขปัญหานี้ และในบางครั้งก็สามารถนำวงจรแบ่งกระแสนี้ไปแก้ปัญหาในวงจรผสมหรือวงจรแบ่งแรงดันที่มีโหลดด้วย ลักษณะของวงจรแบ่งกระแสไฟฟ้ามีลักษณะดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้ามีลักษณะเป็นวงจรขนาน

จากภาพที่ 2.8 จะเห็นว่า แรงดันที่ตกคร่อมความต้านทาน R_1, R_2 มีค่าเท่ากัน อาศัยกฎของโอห์มหาค่ากระแสที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน R_1 จะได้

$$I_1 = \frac{E}{R_1} \tag{2.7}$$

อาศัยกฎของโอห์มหาค่ากระแสที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน R_2 จะได้

$$I_2 = \frac{E}{R_2} \tag{2.8}$$

นำสมการที่ (2.7) หารด้วยสมการที่ (2.8) จะได้

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{E}{R_2} \times \frac{R_1}{E} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} \times I_1 \tag{2.9}$$

จากคุณสมบัติของวงจรขนานคือ กระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรจะมีค่าเท่ากับผลรวมของกระแสไฟฟ้าที่แยกไหลในแต่ละกิ่งจะได้ว่า

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.10}$$

แทนค่า I_2 จากสมการที่ (2.9) ลงในสมการที่ (2.10) จะได้

$$I = I_1 + \frac{R_1}{R_2} \times I_1$$

$$I = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \times I_1$$

$$I = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) \times I_1$$

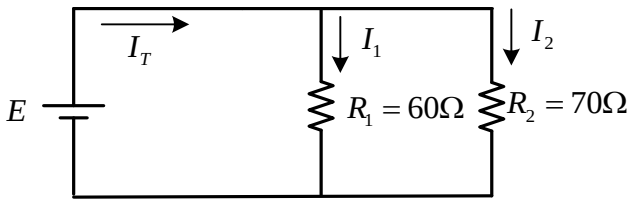
จะได้กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน R_1 $\quad I_1 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \times I$ (2.11)

แทนค่า I_1 จากสมการที่ (2.11) ลงในสมการที่ (2.9) จะได้

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2} \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \times I$$

จะได้กระแสไฟฟ้าไหลผ่าน R_1 $\quad I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) \times I$ (2.12)

ตัวอย่างที่ 2.5 จงคำนวณหาค่า I_1, I_2 และ E เมื่อมี I_T ไหลเท่ากับ 2A ในวงจรตามภาพที่ 2.9



ภาพที่ 2.9 วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้าสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 2.5

วิธีทำ จากสมการที่ (2.11) สามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1 ได้

$$I_1 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \times I$$

แทนค่าจะได้ $\quad I_1 = \left(\frac{70\Omega}{60\Omega + 70\Omega}\right) \times 2A$

$$I_1 = 1.077A$$

จากสมการที่ (2.12) สามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_2 ได้

$$I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \times I$$

แทนค่าจะได้ $$I_2 = \left(\frac{60\Omega}{60\Omega + 70\Omega} \right) \times 2A$$

$$I_2 = 0.923A$$

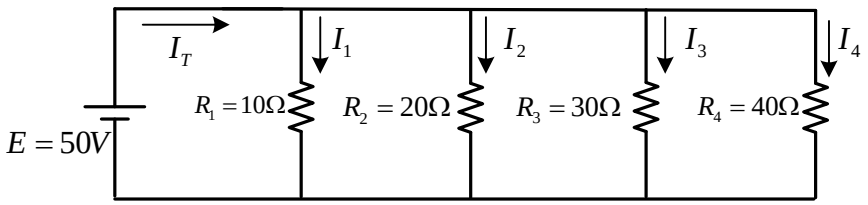
จากคุณสมบัติของวงจรขนานจะได้ว่าขนาดแรงดันที่ตกคร่อม R_1 จะเท่ากับแรงดันที่ตกคร่อม R_2 และจะมีค่าเท่ากับแรงดันที่แหล่งกำเนิดไฟฟ้าดังนั้นสามารถคำนวณแรงดัน E ได้เท่ากับ

$$E = I_1 \times R_1 = I_2 \times R_2$$

แทนค่าจะได้ $$E = 1.077 \times 60 = 64.615V$$

หรือ $$E = 0.923 \times 70 = 64.615V$$

ตัวอย่างที่ 2.6 จากวงจรดังภาพที่ 2.10 จงคำนวณหาค่า I_1, I_2, I_3, I_4 และ I_T โดยใช้วิธีการแบ่งกระแสไฟฟ้า



ภาพที่ 2.10 วงจรแบ่งกระแสไฟฟ้าสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 2.6

วิธีทำ ในกรณีที่มี R ขนานกันมากกว่า 2 ตัวขึ้นไปจะต้องยุบ R ให้เหลือเพียง 2 ตัวและคำนวณไปเรื่อย ๆ จบครบ โดยสามารถหาความต้านทานรวมได้ดังนี้

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

แทนค่าจะได้ $$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{R_T} = 0.208$$

ดังนั้นจะได้ $$R_T = 4.808\Omega$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแสรวมที่ไหลในวงจรจะได้

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{50}{4.808} = 10.399A$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแส I_1 ด้วยวิธีการแบ่งกระแสไฟฟ้าจะได้

$$I_1 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}}{R_1 + \left(\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} \right)} \right) \times I_T$$

แทนค่าจะได้

$$I_1 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}}}{10 + \left(\frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}} \right)} \right) \times 10.399A$$

$$I_1 = 5A$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแส I_2 ด้วยวิธีการแบ่งกระแสไฟฟ้าจะได้

$$I_2 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}}}{R_2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} \right)} \right) \times I_T$$

แทนค่าจะได้

$$I_2 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}}}{20 + \left(\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}} \right)} \right) \times 10.399A$$

$$I_2 = 2.5A$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแส I_3 ด้วยวิธีการแบ่งกระแสไฟฟ้าจะได้

$$I_3 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}}}{R_3 + \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}} \right)} \right) \times I_T$$

แทนค่าจะได้ $$I_3 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}}}{30 + \left(\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}} \right)} \right) \times 10.399A$$

$$I_3 = 1.664A$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแส I_4 ด้วยวิธีการแบ่งกระแสไฟฟ้าจะได้

$$I_4 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}}{R_4 + \left(\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} \right)} \right) \times I_T$$

แทนค่าจะได้ $$I_4 = \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}}{40 + \left(\frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} \right)} \right) \times 10.399A$$

$$I_4 = 1.25A$$

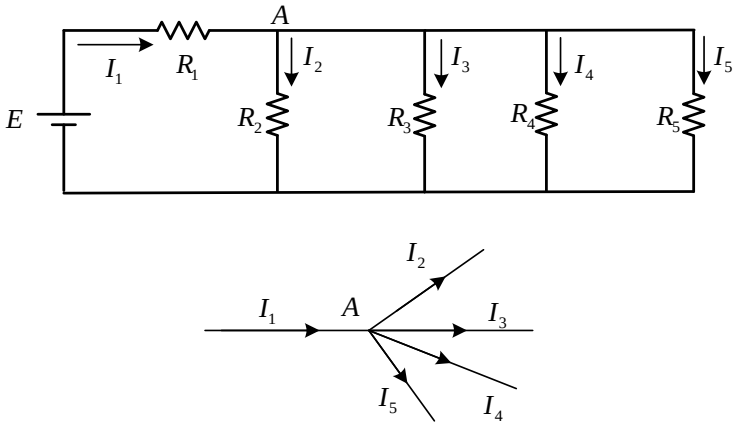
2.5 กฎของเคอร์ชอฟฟ์

กฎของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchoff's Law) จะใช้สำหรับแก้ปัญหาในการคำนวณทางไฟฟ้าที่มีความซับซ้อนมากขึ้น และกฎของโอห์มไม่สามารถแก้ปัญหาทั้งหมดได้ โดยกฎนี้จะใช้ประโยชน์ในการหาค่าความต้านทานเสมือนของวงจรที่ซับซ้อนของตัวนำ และใช้สำหรับคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหล

ผ่านตัวนำต่าง ๆ กฎเคอร์ชอฟฟ์นี้คิดค้นขึ้นโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันชื่อ กุสตาฟ โรเบิร์ต เคอร์ชอฟฟ์ (Gustav Robert Kirchhoff) โดยจะกล่าวถึงกฎของเคอร์ชอฟฟ์เป็น 2 กฎคือ กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์และกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ เพื่อช่วยในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า อีกทั้งในการแก้สมการจะนิยมนำเรื่องดีเทอร์มิแนนซ์มาช่วยในการหาค่าต่าง ๆ ในวงจรไฟฟ้าด้วย

2.5.1 กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์

กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (kirchoff's current law : KCL) ในบางครั้งเรียกว่ากฎเกี่ยวกับพีชคณิตของกระแสจุดต่อ (node law) โดยมีหลักการว่า "ในวงจรไฟฟ้าใดๆ ผลรวมทางพีชคณิตของกระแสที่จุด ๆ หนึ่งจะเท่ากับศูนย์" หรืออีกความหมายหนึ่งคือ "ผลรวมของกระแสที่ไหลเข้าจุดหรือโนดจะเท่ากับผลรวมของกระแสที่ไหลออกจากจุดหรือโนดนั้น ๆ" การใช้กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าสามารถทำได้โดยพิจารณาจากภาพที่ 2.11 ซึ่งสามารถทำได้ดังนี้คือ



ภาพที่ 2.11 ตัวอย่างการใช้กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์

จากภาพที่ 2.11 เมื่อพิจารณากระแสที่จุด A จะได้ว่า

กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าจุด A = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุด A

แทนค่าจะได้ $$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

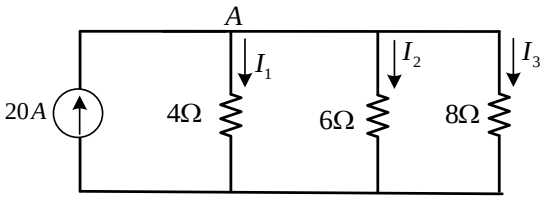
หรืออาจจะกล่าวได้ว่า ผลรวมของกระแสไฟฟ้าที่จุดใด ๆ ในวงจรไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากับศูนย์โดยที่กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าจุดจะถูกกำหนดให้เป็นเครื่องหมายบวก และกระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุดจะถูกกำหนดให้เป็นเครื่องหมายลบ ดังนั้นจากภาพที่ 2.11 สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\sum I_A = 0$$

$$I_1 + (-I_2) + (-I_3) + (-I_4) + (-I_5) = 0$$

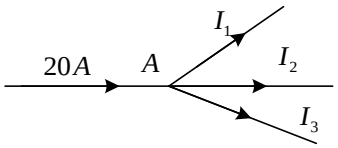
หรือ $$I_1 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

ตัวอย่างที่ 2.7 จงใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์และกฎของโอห์มเพื่อหาขนาดและขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมความต้านทาน 6Ω ดังภาพที่ 2.12 โดยกำหนดให้แหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้ามีค่าเท่ากับ 20A



ภาพที่ 2.12 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 2.7

วิธีทำ ใช้กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ โดยสมมติให้ทิศทางของกระแสไฟฟ้าที่จุด A มีลักษณะดังนี้



กระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าจุด A = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากจุด A

จะได้ว่า $$20A = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.13}$$

คำนวณหา I_1, I_2 และ I_3 ได้โดยอาศัยกฎของโอห์มและเนื่องจากตัวต้านทานทั้งสามตัวต่อขนานกันดังนั้นจึงมีค่าแรงดันตกคร่อมเท่ากันจะได้

พิจารณา I_1

$$I_1 = \frac{V}{4\Omega}$$

พิจารณา I_2

$$I_2 = \frac{V}{6\Omega}$$

พิจารณา I_3

$$I_3 = \frac{V}{8\Omega}$$

แทนค่า I_1, I_2 และ I_3 ลงในสมการที่ 2.13 จะได้

$$20A = \frac{V}{4\Omega} + \frac{V}{6\Omega} + \frac{V}{8\Omega}$$

$$20A = \frac{6V + 4V + 3V}{24\Omega}$$

$$20A = \frac{13V}{24\Omega}$$

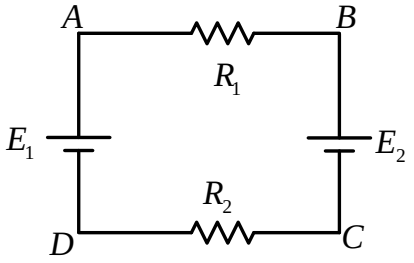
$$V = \frac{20 \times 24}{13}$$

$$V = 36.92\ V$$

ดังนั้น ขนาดแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมความต้านทาน 6Ω มีค่าเป็น 36.92 V

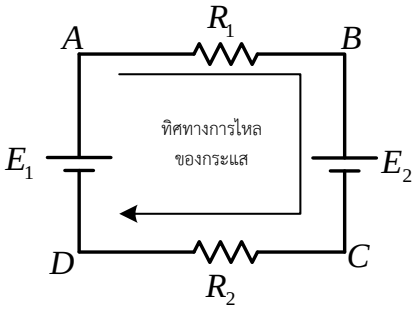
2.5.2 กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์

กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ (kirchoff's voltage law : KVL) ในบางครั้งจะเรียกว่า กฎเกี่ยวกับแรงดันในวงจร (mesh law) โดยมีหลักการว่า "ผลรวมทางพีชคณิตของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมความต้านทานแต่ละตัวในวงรอบปิดใด ๆ จะเท่ากับแรงดันไฟฟ้าที่แหล่งจ่าย" ขั้นตอนการใช้กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า สามารถทำได้โดยพิจารณาจากภาพที่ 2.13



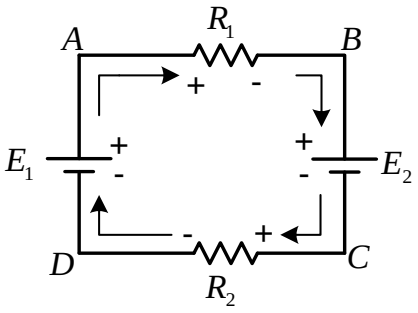
ภาพที่ 2.13 วงจรไฟฟ้าสำหรับการอธิบายกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดทิศทางการไหลของกระแสในวงจร เช่น จากภาพที่ 2.13 กำหนดให้ทิศทางการไหลของกระแสในวงจรไหลจากจุด A ไป จุด B ไป จุด C และไป จุด D จะทำให้ได้วงจรเป็นลักษณะดังภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 วงจรไฟฟ้าที่แสดงทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้า

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานซึ่งสามารถกำหนดได้คือ ถ้ากระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าตัวต้านทานนั้น ๆ จะมีเครื่องหมายของขั้วแรงดันเป็นบวก และถ้ากระแสไฟฟ้าไหลจากจากตัวต้านทานนั้น ๆ จะมีเครื่องหมายของขั้วแรงดันเป็นลบดังภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 วงจรไฟฟ้าที่แสดงขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานในวงจร

ขั้นตอนที่ 3 ผลรวมของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมจะต้องพิจารณาขั้วไฟฟ้าที่เกิดขึ้นดังนี้ ถ้ากระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าขั้วบวกของแหล่งกำเนิดแรงดันหรือแบตเตอรี่จะกำหนดเป็นเครื่องหมายบวก และถ้าไหลเข้าขั้วลบของแหล่งกำเนิดแรงดันหรือแบตเตอรี่จะกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้นจากภาพที่ 2.15 จะได้กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์มีความสัมพันธ์ดังนี้

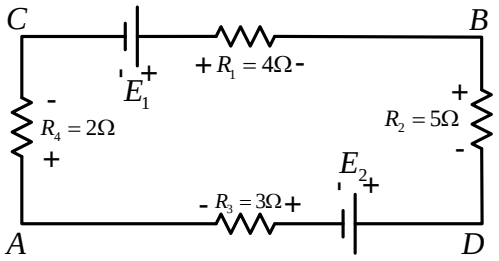
$$\sum V = 0$$

$$IR_1 + E_2 + IR_2 - E_1 = 0$$

หรือ

$$IR_1 + IR_2 = E_1 - E_2$$

ตัวอย่างที่ 2.8 แรงดันไฟฟ้าเมื่อวัดที่จุด A ไปยังจุด B มีค่าเท่ากับ 20V และแรงดันไฟฟ้าเมื่อวัดจากจุด C ไปยังจุด D มีค่าเท่ากับ 24V ของวงจรดังภาพที่ 2.16 จงคำนวณหาขนาดแรงดันไฟฟ้าของแหล่งจ่ายไฟฟ้า E_1 และ E_2 โดยอาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์

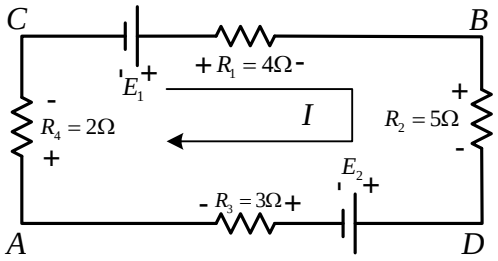


ภาพที่ 2.16 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 2.8

วิธีทำ ใช้กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ สามารถทำตามขั้นตอนคือ

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้า

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานในวงจร จะได้ลักษณะทิศทางการไหลของกระแสในวงจรและขั้วของแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมตัวต้านทานดังภาพ



ขั้นตอนที่ 3 อาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์โดยคำนวณหาผลรวมของแรงดันไฟฟ้าในวงจรจะได้ว่า

พิจารณาแรงดันไฟฟ้าเมื่อวัดจากจุด A ไปยังจุด B (ส่วนของ $B-D-A$) วัดได้ 20V นั่นคือ

$$IR_2 + E_2 + IR_1 = 20$$

แทนค่าจะได้ $$(I \times 5) + E_2 + (I \times 3) = 20$$

$$8I + E_2 = 20 \qquad (2.14)$$

พิจารณาแรงดันไฟฟ้าเมื่อวัดจากจุด C ไปยังจุด D (ส่วนของ $D-A-C$) วัดได้ 24V นั่นคือ

$$E_2 + IR_3 + IR_4 = 24$$

แทนค่าจะได้ $$E_2 + (I \times 3) + (I \times 2) = 24$$

$$5I + E_2 = 24 \qquad (2.15)$$

แก้สมการได้โดยนำสมการที่ (2.14) และสมการที่ (2.15) จะได้

$$3I = -4$$

จะได้ $I = -1.33A$ (– คือมีทิศทางการไหลจริงตรงข้ามกับที่กำหนดไว้)

แทนค่า $I = -1.33A$ ลงในสมการที่ (2.14) เพื่อคำนวณหาค่า E_2 จะได้

$$(8 \times (-1.33)) + E_2 = 20$$

จะได้ $$E_2 = 30.64V$$

คำนวณหาค่า E_1 โดยการแทนค่า $E_2 = 30.64V$ และ $I = -1.33A$ในวงจรและอาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จะได้

$$\sum V = 0$$

$$IR_1 + IR_2 + E_2 + IR_3 + IR_4 - E_1 = 0$$

แทนค่า $$((-1.33) \times 4) + ((-1.33) \times 5) + 30.64 + ((-1.33) \times 3) + ((-1.33) \times 2) - E_1 = 0$$

$$(-1.33)\times[4+5+3+2]+30.64=E_1$$

$$E_1=30.64+\left[14\times(-1.33)\right]$$

$$E_1=-12.02V$$

2.6 การวิเคราะห์วงจรด้วยวิธีกระแสวงรอบของแมกซ์เวลล์

วิธีกระแสวงจรของแมกซ์เวลล์ (maxwell's loop current method) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า วิธีเมชกระแสวงรอบ (mesh current method) เป็นวิธีที่คิดค้นโดยนักฟิสิกส์ชาวอังกฤษชื่อ เจมส์ คลาก แมกซ์เวลล์ (James Clark Maxwell) เพื่อแก้ปัญหาในวงจรไฟฟ้าที่มีหลายสาขา และมีความซับซ้อนในการกำหนดกระแสถ้าใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์ โดยได้พัฒนามาจากกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ซึ่งอาศัยแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์มาสร้างสมการ ทำให้ลดความยุ่งยากของการแก้ปัญหาลง โดยการกำหนดทิศทางของกระแสไหลในวงรอบนั้นจะสามารถกำหนดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้ โดยจะมีจำนวนสมการเป็นไปตามจำนวนรอบของวงปิด ซึ่งมีขั้นตอนการแก้ปัญหาดังนี้

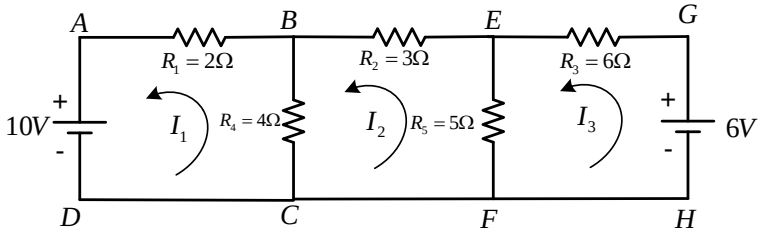
ขั้นตอนที่ 1 การกำหนดทิศทางของกระแสไฟฟ้าที่ไหลในแต่ละวงรอบ จะกำหนดให้ไหลทวนเข็มหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้

ขั้นตอนที่ 2 การกำหนดทิศทางแรงดันตกคร่อมโหลดทุกตัวในวงจรจะมีทิศทางตามการไหลของกระแสที่ได้กำหนดในขั้นตอนที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์กำหนดสมการ โดยสังเกตว่าถ้ามี n วงรอบก็จะมี n สมการเช่นเดียวกัน

ขั้นตอนที่ 4 ดำเนินการแก้สมการตามหลักการพีชคณิต โดยการแทนค่าหรือใช้วิธีดีเทอมิแนนซ์ ถ้าผลการแก้สมการได้ค่ากระแสไฟฟ้าออกมาเป็นบวก นั่นคือ ทิศทางกระแสไหลวนในวงรอบถูกต้องตามการกำหนดทิศทางในขั้นตอนที่ 1 แต่ถ้าผลการแก้สมการได้ค่ากระแสไฟฟ้าออกมาเป็นลบ นั่นคือ ทิศทางกระแสไหลวนในวงรอบมีทิศทางตรงข้ามกับการกำหนดทิศทางในขั้นตอนที่ 1

ตัวอย่างที่ 2.9 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1, I_2 และ I_3 และให้คำนวณหาค่าแรงดันตกคร่อม R_4 ของวงจรในภาพที่ 2.17



ภาพที่ 2.17 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 2.9

วิธีทำ อาศัยวิธีเมชกระแสวงรอบ จะได้ว่า

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้กระแสในวงรอบปิดในแต่ละวงรอบมีทิศทางการไหลของกระแสทวนเข็มนาฬิกาดังภาพที่ 2.17

ขั้นตอนที่ 2 สร้างสมการแต่ละวงรอบโดยอาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์สามารถทำได้ดังนี้

พิจารณา Loop ของกระแส I_1 ($D>C>B>A>D$) จะได้

$$10+\left[\left(I_1-I_2\right)\times R_4\right]+\left(I_1\times R_1\right)=0$$

แทนค่า R_1 และ R_4 จะได้

$$10+\left[\left(I_1-I_2\right)\times 4\right]+\left(I_1\times 2\right)=0$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$4I_1+2I_1-4I_2=-10$$

$$6I_1-4I_2=-10 \qquad (2.16)$$

พิจารณา Loop ของกระแส $I_2(C>F>E>B>C)$ จะได้

$$\left[\left(I_2-I_1\right)\times R_4\right]+\left[\left(I_2-I_3\right)\times R_5\right]+\left(I_2\times R_2\right)=0$$

แทนค่า R_2, R_4 และ R_5 จะได้

$$\left[\left(I_2-I_1\right)\times 4\right]+\left[\left(I_2-I_3\right)\times 5\right]+\left(I_2\times 3\right)=0$$

จัดสมการใหม่จะได้ $-4I_1+4I_2+3I_2+5I_2-5I_3=0$

$$-4I_1+12I_2-5I_3=0 \qquad (2.17)$$

พิจารณา Loop ของกระแส $I_3(F>H>G>E>F)$ จะได้

$$\left[\left(I_3-I_2\right)\times R_5\right]+\left(I_3\times R_3\right)-6=0$$

แทนค่า R_3 และ R_5 จะได้

$$\left[\left(I_3-I_2\right)\times 5\right]+\left(I_3\times 6\right)-6=0$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$-5I_2+5I_3+6I_3=6$$

$$-5I_2 + 11I_3 = 6 \qquad (2.18)$$

ขั้นตอนที่ 3 ดำเนินการแก้สมการที่ (2.16) สมการที่ (2.17) และสมการที่ (2.18) เพื่อหาค่า I_1, I_2 และ I_3 โดยจะเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์เพื่อลดความยุ่งยากจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -5 \\ 0 & -5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ดำเนินการด้วยวิธีดีเทอร์มิแนนซ์ โดยการหาดีเทอร์มิแนนซ์จะได้ว่า

$$\det\begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & -5 \\ 0 & -5 & 11 \end{bmatrix} = \det[A] = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 & 6 & -4 \\ -4 & 12 & -5 & -4 & 12 \\ 0 & -5 & 11 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

(-) (+)

$$\det[A] = \left[(6\times12\times11) + (-4\times-5\times0) + (0\times-4\times-5)\right] - \left[(0\times12\times0) + (-5\times-5\times6) + (11\times-4\times-4)\right]$$

$$\det[A] = 792 - (150+176) = 466$$

หาค่า I_1 ได้ดังนี้

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -4 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 12 & -5 & 0 & 12 \\ 6 & -5 & 11 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -4 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 12 & -5 & 0 & 12 \\ 6 & -5 & 11 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{466}$$

$$I_1 = \frac{-950}{466} = -2.039A$$

หาค่า I_2 ได้ดังนี้

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -10 & 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -10 & 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{466}$$

$$I_2 = \frac{-260}{466} = -0.558A$$

หาค่า I_3 ได้ดังนี้

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 & -10 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \\ 0 & -5 \end{matrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 & -10 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \\ 0 & -5 \end{matrix}}{466}$$

$$I_3 = \frac{136}{466} = 0.292A$$

คำนวณหาค่าแรงดันที่ตกคร่อม R_4 โดยอาศัยกฎของโอห์มจะได้ว่า

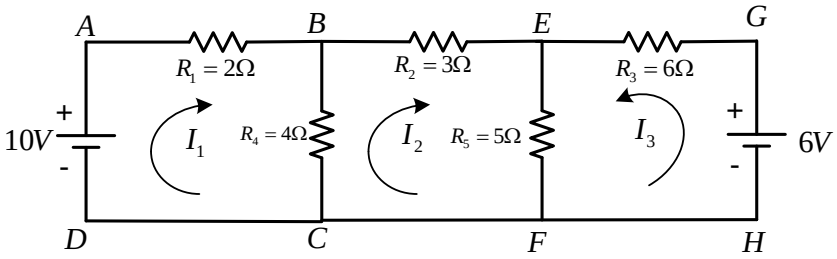
$$V_{R_4} = I \times R_4$$

แทนค่าจะได้ $$V_{R_4} = (I_2 - I_1) \times R_4$$

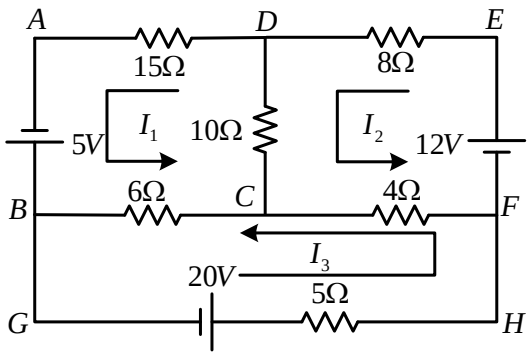
$$V_{R_4} = \left(-0.558 - \left(-2.039\right)\right) \times 4$$

$$V_{R_4} = 10.388V$$

จะได้วงจรที่มีทิศทางการไหลของกระแสในวงจรที่ถูกต้องเป็นดังนี้



ตัวอย่างที่ 2.10 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านความต้านทาน 5Ω และแรงดันที่ตกคร่อมความต้านทาน 10Ω ของวงจรดังภาพ 2.18



ภาพที่ 2.18 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 2.10

วิธีทำ สร้างสมการแต่ละวงรอบโดยอาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์สามารถทำได้ดังนี้

พิจารณา Loop ของกระแส I_1 ($A > B > C > D > A$) จะได้

$$-5+\left[\left(I_1-I_3\right)\times 6\right]+\left[\left(I_1-I_2\right)\times 10\right]+\left(I_1\times 15\right)=0$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$6I_1+10I_1+15I_1-10I_2-6I_3=5$$

$$31I_1-10I_2-6I_3=5 \qquad (2.19)$$

พิจารณา Loop ของกระแส I_2 ($D>C>F>E>D$) จะได้

$$\left[\left(I_2-I_1\right)\times 10\right]+\left[\left(I_2-I_3\right)\times 4\right]-12+\left(I_2\times 8\right)=0$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$-10I_1+10I_2+4I_2+8I_2-4I_3=12$$

$$-10I_1+22I_2-4I_3=12 \qquad (2.20)$$

พิจารณา Loop ของกระแส I_3 ($G>H>F>C>B>G$) จะได้

$$\left[\left(I_3-I_1\right)\times 6\right]-20+\left(I_3\times 5\right)+\left[\left(I_3-I_2\right)\times 4\right]=0$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$-6I_1-4I_2+6I_3+5I_3+4I_3=20$$

$$-6I_1-4I_2+15I_3=20 \qquad (2.21)$$

ดำเนินการแก้สมการที่ (2.19) สมการที่ (2.20) และสมการที่ (2.21) เพื่อหาค่า I_1, I_2 และ I_3 โดยจะเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์เพื่อลดความยุ่งยากจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 31 & -10 & -6 \\ -10 & 22 & -4 \\ -6 & -4 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ดำเนินการด้วยวิธีดีเทอร์มิแนนซ์ โดยการหาดีเทอร์มิแนนซ์จะได้ว่า

$$\det\begin{bmatrix} 31 & -10 & -6 \\ -10 & 22 & -4 \\ -6 & -4 & 15 \end{bmatrix}=\det\left[A\right]=\begin{vmatrix} 31 & -10 & -6 & 31 & -10 \\ -10 & 22 & -4 & -10 & 22 \\ -6 & -4 & 15 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

(-) (+)

$$\det[A] = \left[(31\times 22\times 15)+(-10\times -4\times -6)+(-6\times -10\times -4)\right]- \left[(-6\times 22\times -6)+(-4\times -4\times 31)+(15\times -10\times -10)\right]$$

$$\det[A] = \left[10230+(-240)+(-240)\right]-\left[(792)+(496)+(1500)\right]$$

$$\det[A] = 6962$$

หาค่า I_1 ได้ดังนี้

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -10 & -6 & 6 & -10 \\ 12 & 22 & -4 & -4 & 22 \\ 20 & -4 & 15 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -10 & -6 & 6 & -10 \\ 12 & 22 & -4 & -4 & 22 \\ 20 & -4 & 15 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{6962}$$

$$I_1 = 1.471A$$

หาค่า I_2 ได้ดังนี้

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 5 & -6 & 31 & 5 \\ -10 & 12 & -4 & -10 & 12 \\ -6 & 20 & 15 & -6 & 20 \end{vmatrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 5 & -6 & 31 & -10 \\ -10 & 12 & -4 & -10 & 22 \\ -6 & 20 & 15 & -6 & -4 \end{vmatrix}}{6962}$$

$$I_2 = 1.643A$$

หาค่า I_3 ได้ดังนี้

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & -10 & 5 & 31 & -10 \\ -10 & 22 & 12 & -10 & 22 \\ -6 & -4 & 20 & -6 & -4 \end{vmatrix}}{\det[A]} = \frac{\begin{vmatrix} 31 & -10 & 5 & 31 & -10 \\ -10 & 22 & 12 & -10 & 22 \\ -6 & -4 & 20 & -6 & -4 \end{vmatrix}}{6962}$$

$$I_3 = 2.360A$$

ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านความต้านทาน 5Ω เท่ากับ $I_3 = 2.360A$

แรงดันที่ตกคร่อมความต้านทาน 10Ω คือ $V_{R_{10}} = (I_2 - I_1)\times R_{10} = (1.643-1.471)\times 10$

$V_{R_{10}} = 1.72V$ (ขั้วบวกที่จุด D ขั้วลบที่จุด C)

2.7 การวิเคราะห์วงจรโดยใช้สมการโนด

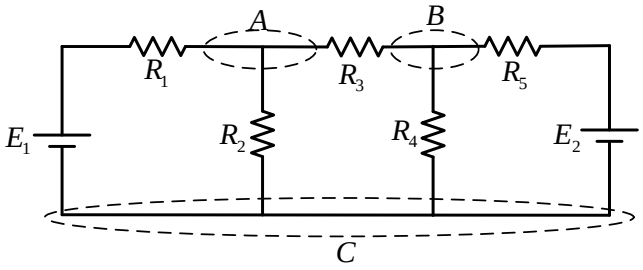
วิธีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าโดยใช้สมการโนดจะทำได้โดยใช้กฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ซึ่งแตกต่างกับวิธีกระแสวงรอบของแมกซ์เวลล์ที่ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ ซึ่งข้อดีของทั้งสองวิธีคือช่วย

ลดสมการในการหาตัวแปรที่ไม่ทราบค่าให้น้อยลง และเหมาะสำหรับวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่มีการต่อในลักษณะขนานกันหลาย ๆ ตัวโดยมีการต่อกราวน์ร่วมกัน

2.7.1 การใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า

การวิเคราะห์ด้วยการใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าจะมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

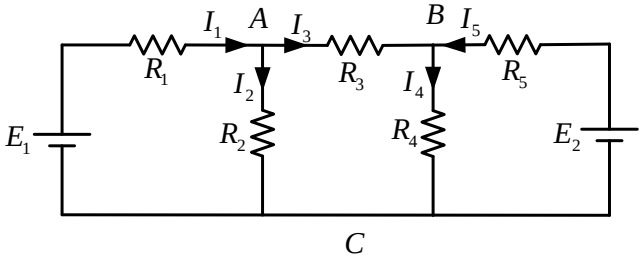
ขั้นตอนที่ 1 กำหนดสาขาหรือแขนงในวงจรไฟฟ้าให้เป็นโนดดังภาพที่ 2.19



ภาพที่ 2.19 การกำหนดสาขาหรือแขนงในวงจรไฟฟ้าให้เป็นโนด

จากภาพที่ 2.19 สามารถกำหนดสาขาของวงจรไฟฟ้าได้เป็น 3 โนดคือ A B และ C โดยที่ C เป็นโนดอ้างอิง

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้าในแต่ละโนด และจากภาพที่ 2.19 สามารถกำหนดทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้าได้ดังภาพที่ 2.20



ภาพที่ 2.20 การกำหนดทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้า

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการกับโนดที่ไม่ใช่โนดอ้างอิง ซึ่งจากภาพที่ 2.20 สามารถสร้างสมการโนดได้ดังนี้คือ

พิจารณาที่โนด A และอาศัยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_1 = I_2 + I_3$$

และจากกฎของโอห์มจะได้

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

แทนค่าในกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จะได้

$$\frac{E_1 - V_A}{R_1} = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_B}{R_3} = \frac{E_1}{R_1}$$

$$V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_B}{R_3} = \frac{E_1}{R_1} \qquad (2.22)$$

พิจารณาที่โนด B และอาศัยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_3 + I_5 = I_4$$

และจากกฎของโอห์มจะได้

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{V_B}{R_4}$$

$$I_5 = \frac{E_2 - V_B}{R_5}$$

แทนค่าในกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จะได้

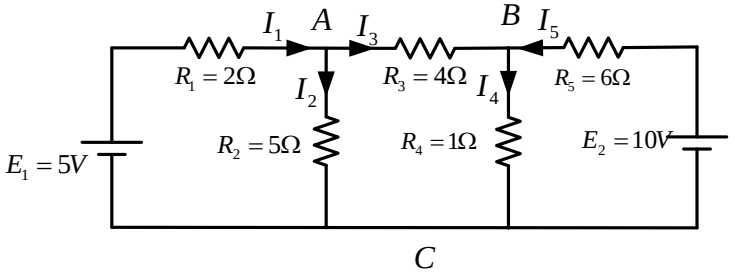
$$\frac{V_A - V_B}{R_3} + \frac{E_2 - V_B}{R_5} = \frac{V_B}{R_4}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$-\frac{V_A}{R_3} + V_B\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = \frac{E_2}{R_5}$$

$$-\frac{V_A}{R_3}+V_B\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)=\frac{E_2}{R_5} \qquad (2.23)$$

ตัวอย่างที่ 2.11 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_3 และแรงดันตกคร่อม R_3 กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_2 และกระแสไฟฟ้าที่แบตเตอรีแต่ละตัว



วิธีทำ พิจารณาที่โหนด A; กระแสไหลเข้าโหนด A = กระแสไหลออกจากจุด A

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$\frac{E_1 - V_A}{R_1} = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

จัดสมการใหม่จะได้ $$V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)-\frac{V_B}{R_3}=\frac{E_1}{R_1}$$

แทนค่า $$V_A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)-\frac{V_B}{4}=\frac{5}{2}$$

$$V_A\left(\frac{10+4+5}{20}\right)-\frac{V_B}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{19V_A}{5}-V_B=10 \qquad (2.24)$$

พิจารณาที่โหนด B; กระแสไหลเข้าโหนด B = กระแสไหลออกจากจุด B

$$I_3 + I_5 = I_4$$

$$\frac{V_A - V_B}{R_3} + \frac{E_2 - V_B}{R_5} = \frac{V_B}{R_4}$$

จัดสมการใหม่จะได้ $$-\frac{V_A}{R_3}+V_B\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)=\frac{E_2}{R_5}$$

แทนค่า $$-\frac{V_A}{4}+V_B\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}\right)=\frac{10}{6}$$

$$-\frac{V_A}{4}+V_B\left(\frac{6+24+4}{24}\right)=\frac{10}{6}$$

$$-6V_A+34V_B=40 \qquad (2.25)$$

ดำเนินการแก้สมการโดยนำ 34 คูณตลอดสมการที่ (2.24) จะได้

$$129.2V_A-34V_B=340 \qquad (2.26)$$

นำสมการที่ (2.26) บวกกับ สมการที่ (2.25) จะได้

$$123.2V_A=380$$

$$V_A=3.08V$$

แทนค่า $V_A=3.08V$ ลงในสมการที่ (2.25) จะได้

$$-6\times3.08+34V_B=40$$

$$34V_B=58.51$$

ดังนั้นจะได้ $V_B=1.72V$

สามารถคำนวณหากระแสที่ผ่าน R_3 ได้คือ $I_3=\frac{V_A-V_B}{R_3}$

แทนค่าจะได้ $I_3=\frac{3.08-1.72}{4}$

ดังนั้นจะได้ $I_3=0.34A$

คำนวณหาแรงดันที่ตกคร่อม R_3 ได้ดังนี้ $V_{R_3}=I_3\times R_3=0.34\times4=1.36V$

สามารถคำนวณหากระแสที่ผ่าน R_2 ได้คือ $I_1=\frac{E_1-V_A}{R_1}$

แทนค่าจะได้ $I_1=\frac{5-3.08}{2}$

ดังนั้นจะได้ $I_1=0.96A$

และสามารถหากระแสไฟฟ้าที่ไหลออกมาจากแบตเตอรีแต่ละตัวได้ดังนี้

กระแสไฟฟ้าที่ออกมาจากแบตเตอรี่ E_1 คือ $I_1=0.96A$

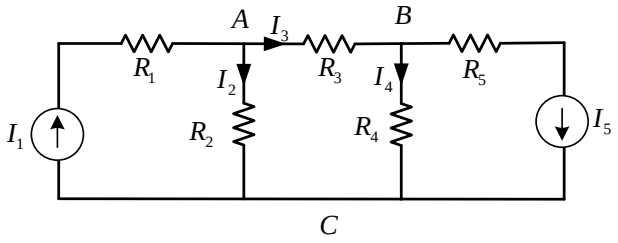
กระแสไฟฟ้าที่ออกมาจากแบตเตอรี่ E_2 คือ $I_5=\frac{10-1.72}{6}$

$$I_5=1.38A$$

ถ้าโหนดใดๆ มีแหล่งจ่ายแรงดันต่ออยู่อย่างเดียว มีจะแรงดันโนดเท่ากับค่าของแรงดันที่แหล่งจ่ายนั้น ๆ เช่น โนด B มีแหล่งจ่ายแรงดันต่ออยู่ 5V ดังนั้น $V_B = -5V$ สาเหตุที่ติดลบเนื่องจากเทียบเคียงโนด B กับโหนดอ้างอิง

2.7.2 การใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้า

ขั้นตอนการใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าจะมีลักษณะเหมือนกับการใช้สมการโนดกับแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า พิจารณาได้จากวงจรดังภาพที่ 2.21



ภาพที่ 2.21 การกำหนดทิศทางกระแสสำหรับการคำนวณด้วยสมการโนดกับแหล่งจ่ายกระแส

พิจารณาที่โนด A ; กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$V_A\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - \frac{V_B}{R_3} = I_1 \qquad (2.27)$$

พิจารณาที่โนด B ; กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_3 + I_5 = I_4$$

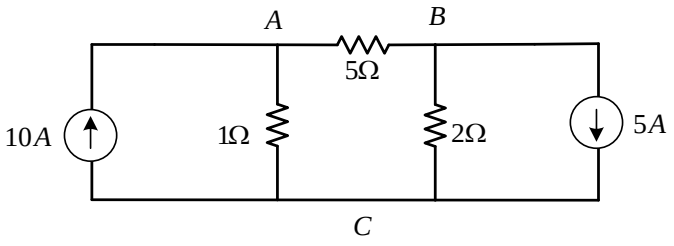
$$\frac{V_A - V_B}{R_3} + I_5 = \frac{V_B}{R_4}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{-V_A}{R_3} + V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) = I_5 \qquad (2.28)$$

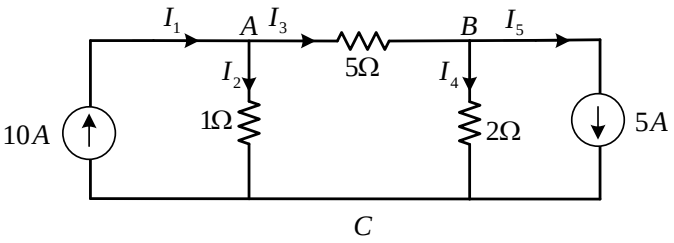
สามารถแก้สมการที่ (2.27) และสมการที่ (2.28) เพื่อคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมต่อไปได้

ตัวอย่างที่ 2.12 จงคำนวณกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวในวงจรดังภาพที่ 2.22



ภาพที่ 2.22 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 2.12

วิธีทำ กำหนดโนดและทิศทางของกระแสไฟฟ้าได้ดังภาพที่ 2.23



ภาพที่ 2.23 การกำหนดทิศทางของกระแสไหลในวงจร

พิจารณาที่โนด A ; กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A - V_B}{R_3}$$

แทนค่า

$$10 = \frac{V_A}{1} + \frac{V_A - V_B}{5}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$6V_A - V_B = 50 \qquad (2.29)$$

พิจารณาที่โนด B ; กระแสไฟฟ้าไหลเข้าโนด = กระแสไฟฟ้าที่ไหลออกจากโนด

$$I_3 - I_5 = I_4$$

$$\frac{V_A - V_B}{R_3} - I_5 = \frac{V_B}{R_4}$$

แทนค่า

$$\frac{V_A - V_B}{5} - 5 = \frac{V_B}{2}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$2V_A - 7V_B = 50 \qquad (2.30)$$

แก้สมการโดยการคูณ 3 ตลอดทั้งสมการที่ (2.30) จะได้

$$6V_A - 21V_B = 150 \qquad (2.31)$$

นำสมการที่ (2.31) ลบกับสมการที่ (2.29) จะได้

$$-20V_B = 100$$

ดังนั้นจะได้แรงดันที่โนด B เป็น

$$V_B = -5V$$

แทนค่า $V_B = -5V$ ในสมการที่ (2.30) จะได้

$$2V_A = 15$$

ดังนั้นจะได้แรงดันที่โนด A เป็น

$$V_A = 7.5V$$

สามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านตัวต้านทานแต่ละตัวได้ดังนี้

กระแสที่ไหนผ่านตัวต้านทาน 1Ω คือ

$$I_2 = \frac{V_A}{1\Omega} = \frac{7.5V}{1\Omega} = 7.5A$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน 5Ω คือ

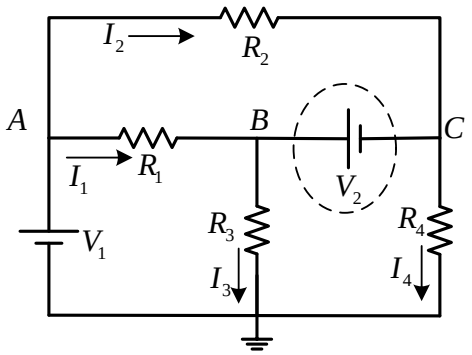
$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{5\Omega} = \frac{7.5V - (-5V)}{5\Omega} = 2.5A$$

กระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน 2Ω คือ

$$I_4 = \frac{V_B}{2\Omega} = \frac{-5V}{2\Omega} = -2.5A \text{ (มีทิศตรงข้ามกับที่กำหนดไว้)}$$

2.8 ซูเปอร์โนดของแหล่งจ่ายแรงดันอิสระ

วงจรบางวงจรที่มีสาขาหนึ่ง ๆ เป็นแหล่งจ่ายแรงดันอย่างเดียว และจุดสาขาของแหล่งจ่ายแรงดันที่ต่ออยู่นี้ไม่มีโนดใดเป็นโนดอ้างอิง เรียกวงจรแบบนี้ว่า ซูเปอร์โนด (super nodes) การสร้างสมการโนดสำหรับวงจรซูปเปอร์โนด ให้พิจารณากระแสไหลเข้าหรือออกจากซูเปอร์โนดเหมือนกับโนดธรรมดาที่ใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ทั่วไป พิจารณาวงจรดังภาพที่ 2.24



ภาพที่ 2.24 วงจรสำหรับการอธิบายซูเปอร์โนด

พิจารณาซูเปอร์โนดในภาพที่ 2.24

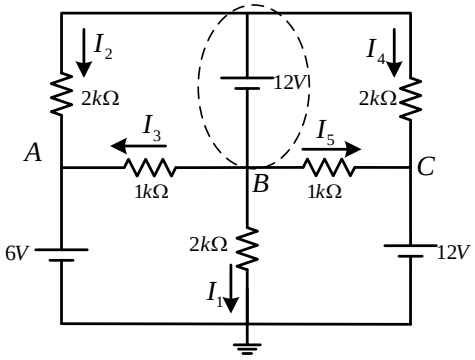
$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

$$\frac{V_A - V_B}{R_2} + \frac{V_A - V_C}{R_1} = \frac{V_B}{R_3} + \frac{V_C}{R_4}$$

$$\left[\frac{V_1 - (V_C + V_2)}{R_2}\right] + \frac{V_1 - V_C}{R_1} = \frac{V_C + V_2}{R_3} + \frac{V_C}{R_4}$$

เมื่อแทนค่าแรงดันและค่าความต้านทานลงในสมการก็จะได้ค่า V_C ส่วน V_B ก็หาได้โดยเอา $V_C + V_2$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงใช้วิธีสมการโนดหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านความต้านทาน $2k\Omega$



วิธีทำ จากวงจรด้านบน ถ้ามีสาขาของวงจรที่เป็นแหล่งจ่ายแรงดันอย่างเดียวจะเป็นซูเปอร์โนด ทั้งนี้มีเงื่อนไขว่าสาขาของวงจรที่ต่ออยู่จะต้องไม่เป็นโนดอ้างอิง

ที่โนด A: $V_A = -6V$

ที่โนด C: $V_C = 12V$

พิจารณาซูเปอร์โนด: $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$

$$\frac{V_B}{2} + \left(\frac{V_B + 12 - V_A}{2}\right) + \left(\frac{V_B - V_A}{1}\right) + \left(\frac{V_B + 12 - V_C}{2}\right) + \left(\frac{V_B - V_C}{1}\right) = 0$$

$$\frac{V_B}{2}+\left(\frac{V_B+12-(-6)}{2}\right)+\left(\frac{V_B-(-6)}{1}\right)+\left(\frac{V_B+12-12}{2}\right)+\left(\frac{V_B-12}{1}\right)=0$$

$$V_B+V_B+12+6+2V_B+12+V_B+2V_B-24=0$$

$$7V_B=-6$$

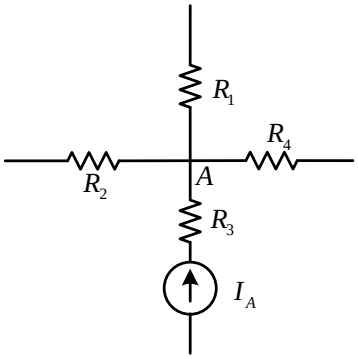
$$V_B=\frac{-6}{7}=-0.857V$$

ดังนั้น สามารถคำนวณหาค่ากระแสที่ไหลผ่านความต้านทาน $2k\Omega$ ได้คือ

$$I_1=\frac{V_B}{2k\Omega}=\frac{-0.857V}{2k\Omega}=-0.429mA$$

2.9 ซูเปอร์โนดของแหล่งจ่ายกระแสอิสระ

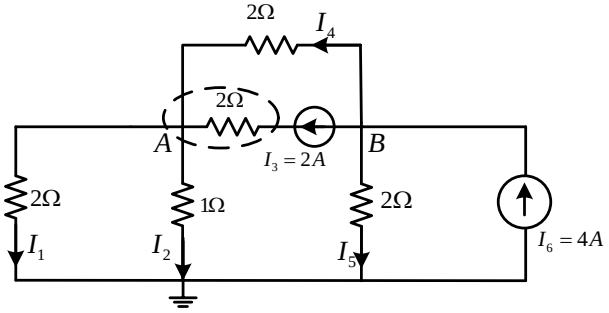
วงจรในลักษณะนี้จะมีสาขาของวงจรที่เป็นแหล่งจ่ายกระแสอนุกรมกับความต้านทานในวงจรข่ายดังภาพที่ 2.25



ภาพที่ 2.25 ซูเปอร์โนดของแหล่งจ่ายกระแสอิสระ

จะเห็นว่าค่าของ R_3 กับโนด A เป็นซูเปอร์โนด จะสังเกตว่ากระแสที่ไหลผ่าน R_3 ก็คือ I_A ดังนั้นแรงดันตกคร่อม R_3 ก็สามารถหาได้จาก I_AR_3

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาค่าแรงดันโนดของวงจรซูเปอร์โนดแหล่งจ่ายกระแส (supernode current source)



วิธีทำ พิจารณาซูเปอร์โหนด $I_3 + I_4 = I_1 + I_2$

กระแสไหลผ่านความต้านทาน 2Ω ของซูเปอร์โนด $I_3 = 2A$

แรงดันตกคร่อมค่าความต้านทาน 2Ω ของซูเปอร์โนด $I_3 R_{2\Omega} = 4V$

จากสมการซูเปอร์โนด $2 + \left(\frac{V_A - V_B}{2} \right) = \frac{V_A}{2} + \frac{V_A}{1}$

$$4 + V_B - V_A = V_A + 2V_A$$

$$4V_A - V_B = 4 \qquad (2.32)$$

พิจารณาที่โนด B $I_6 = I_3 + I_4 + I_5$

$$4 = 2 + \left(\frac{V_B - V_A}{2} \right) + \frac{V_B}{2}$$

$$8 = 4 + V_B - V_A + V_B$$

$$-V_A + 2V_B = 4 \qquad (2.33)$$

แก้สมการโดยนำ 4 คูณสมการที่ (2.33) จะได้

$$-4V_A + 8V_B = 16 \qquad (2.34)$$

นำสมการที่ (2.34) บวกกับสมการที่ (2.32) จะได้

$$7V_B = 20$$

$$V_B = 2.857V$$

จากสมการที่ (2.32) แทนค่า $V_B = 2.857V$ จะได้

$$4V_A - 2.857 = 4$$

$$V_A = 1.714V$$

แต่แรงดันตกคร่อมค่าความต้านทาน 2Ω ของซูเปอร์โนด

$$I_3 R_{2\Omega} = 4V$$

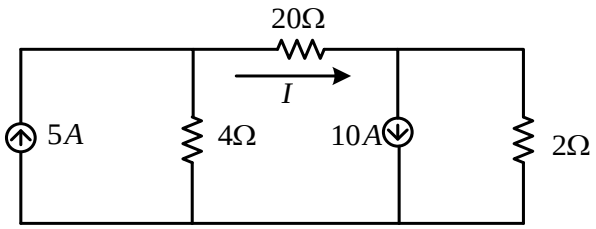
ดังนั้น แรงดันที่โนด A จะมีค่าเป็น $V_A = 1.714 + 4 = 5.714V$

2.10 สรุป

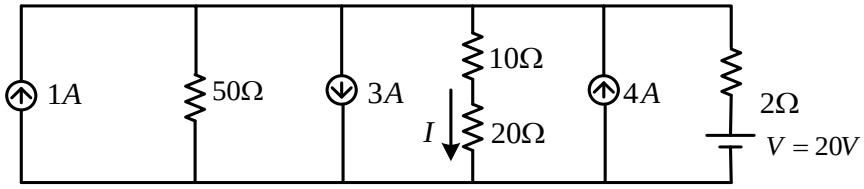
เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอวิธีการคำนวณและวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่เหมาะสม ซึ่งประกอบไปด้วยการศึกษาโครงสร้างและวงจรสมมูลของแหล่งจ่ายกระแสตรงประเภทต่าง ๆ การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยกฎของเคอร์ชอฟฟ์ การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายเพื่อแปลงวงจรให้อยู่ในรูปแบบอย่างง่ายสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า รวมทั้งการคำนวณหาปริมาณทางไฟฟ้าด้วยการแบ่งกระแส และการแบ่งแรงดัน การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าเมื่อวงจรประกอบไปด้วยแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสตรง โดยการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าในบทนี้จะเป็นพื้นฐานการคำนวณวงจรไฟฟ้าที่มีความซับซ้อนในบทต่อไป

2.11 คำถามท้ายบท

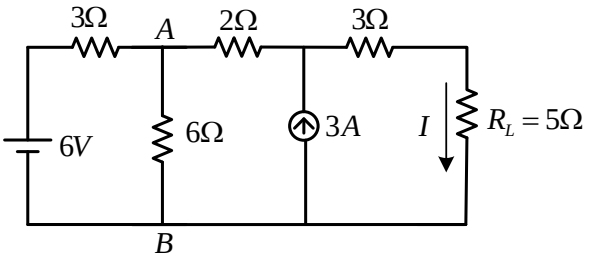
1. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) จากวงจรที่กำหนดให้ดังภาพด้านล่างนี้



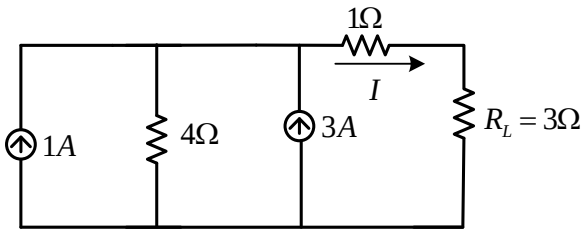
2. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) จากวงจรที่กำหนดให้ดังภาพด้านล่างนี้



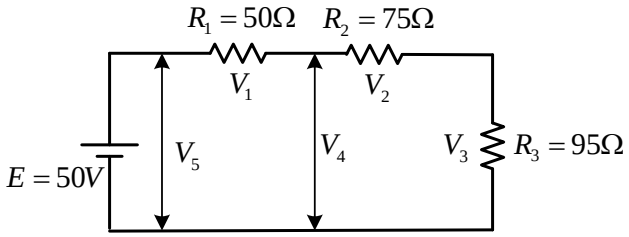
3. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) ที่ไหลผ่านโหลด R_L โดยใช้การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายไฟ



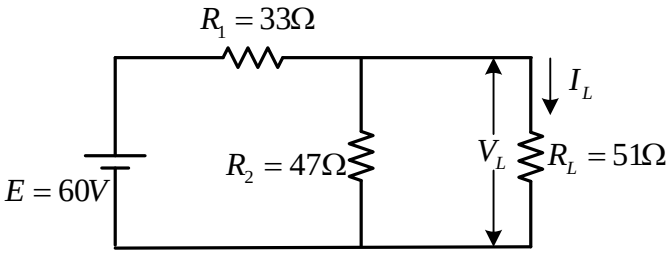
4. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) ที่ไหลผ่านความต้านทาน 1Ω โดยใช้การเปลี่ยนรูปของแหล่งจ่ายไฟ



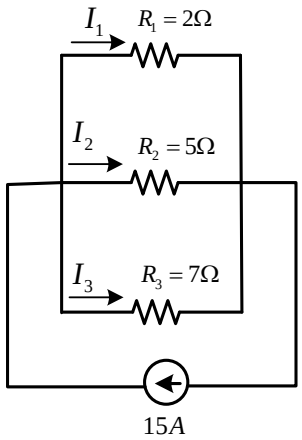
5. จงคำนวณหาค่า V_1, V_2, V_3, V_4 และ V_5



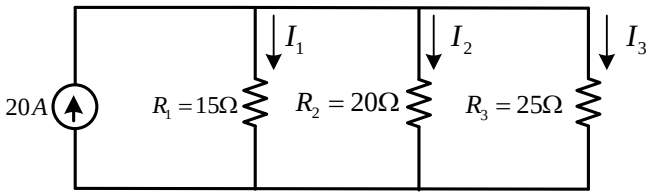
6. จงใช้วงจรแบ่งแรงดันคำนวณหาค่า V_L และ I_L



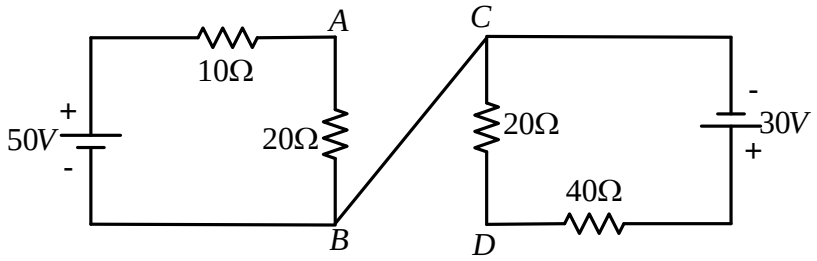
7. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1, I_2, I_3 ของวงจรดังภาพข้างล่างนี้ โดยใช้กฎการแบ่งกระแสไฟฟ้า



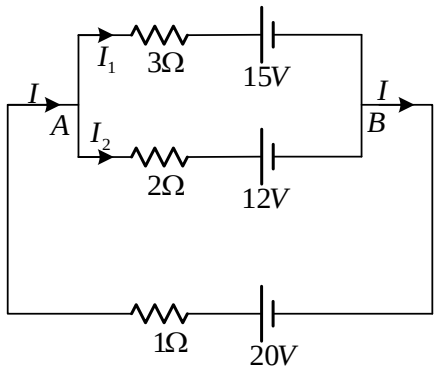
8. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1, I_2, I_3 ของวงจรดังภาพข้างล่างนี้ โดยใช้กฎการแบ่งกระแสไฟฟ้า



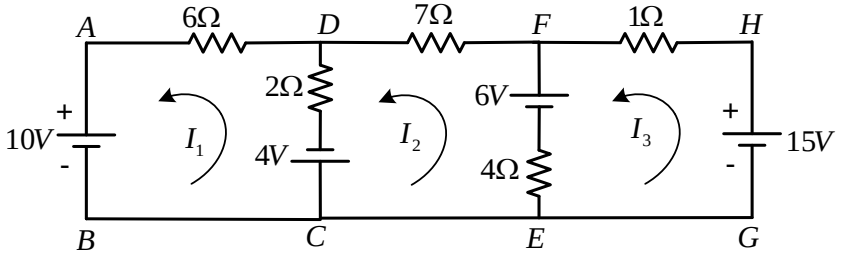
9. จงคำนวณหาค่าความต่างศักย์ระหว่างจุด A และ D โดยอาศัยกฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์



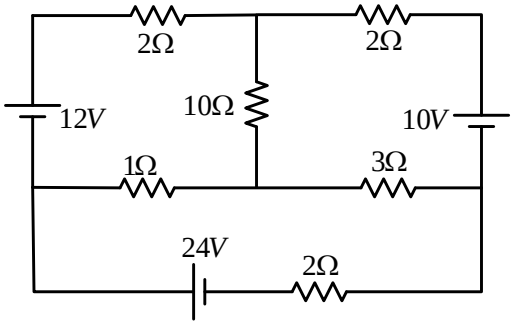
10. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจร กระแสไฟฟ้า I_1 กระแสไฟฟ้า I_2 และความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างจุด A และจุด B ของวงจรดังภาพโดยการประยุกต์ใช้กฎแรงดันไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์และกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์



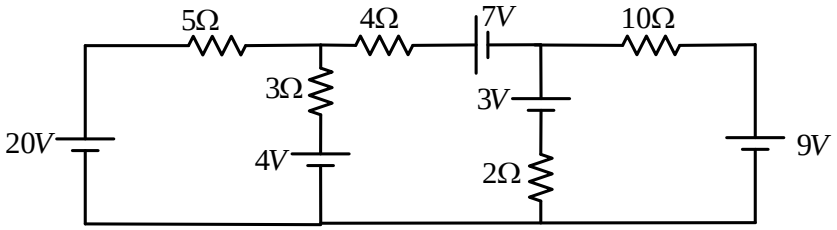
11. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่จ่ายจากแบตเตอรี่แต่ละตัวในวงจรไฟฟ้าดังภาพ



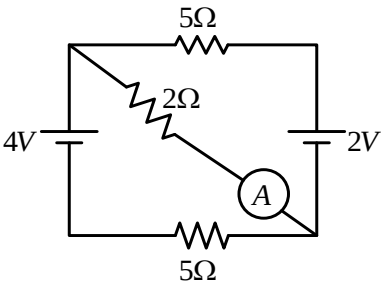
12. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน 1Ω ในวงจรไฟฟ้าดังภาพ



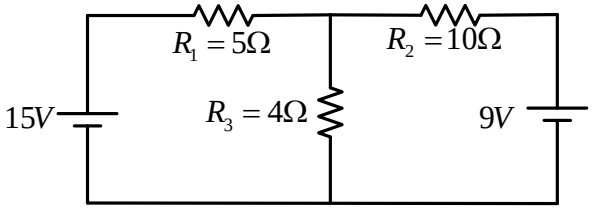
13. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่จ่ายจากแบตเตอรีแต่ละตัวในวงจรไฟฟ้าดังภาพ



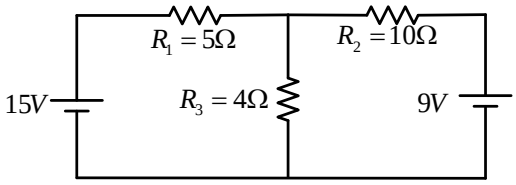
14. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านแอมมิเตอร์ในวงจรดังภาพ



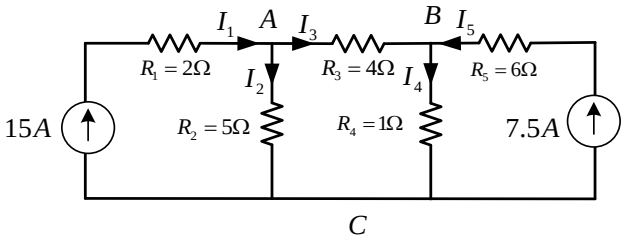
15. จงใช้วิธีกระแสวงรอบของแมกซ์เวลล์หาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_1, R_2 และ R_3



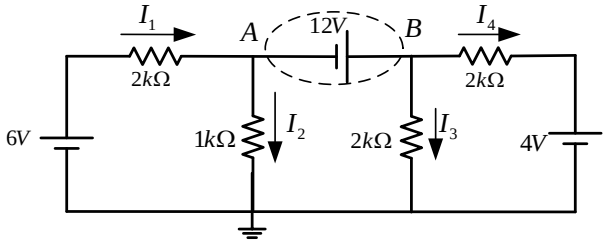
16. จงใช้วิธีสมการโนดเพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_1, R_2, R_3 และแรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทาน R_3



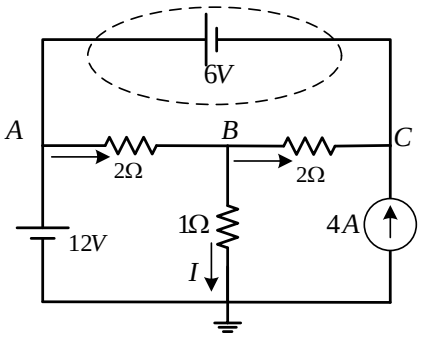
17. จงใช้วิธีสมการโนดเพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 และแรงดันที่ตกคร่อมตัวต้านทาน R_3



18. จงใช้วิธีสมการโนดเพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า I_3 ไหลผ่านความต้านทาน $2k\Omega$ ตามทิศทางดังภาพ



19. จงใช้วิธีสมการโนดเพื่อหาค่ากระแสไฟฟ้า I ไหลผ่านความต้านทาน 1Ω ตามทิศทางดังภาพ



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3
ทฤษฎีการวางซ้อน ทฤษฎีบทของเทวินิน และทฤษฎีบทของนอร์ตัน

หัวข้อเนื้อหา

3.1. ทฤษฎีการวางซ้อน

3.2. ทฤษฎีบทของเทวินิน

3.3. ทฤษฎีบทของนอร์ตัน

3.4. สรุป

3.5. คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. หลักเกณฑ์และขั้นตอนการคำนวณวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยทฤษฎีการวางซ้อน

2. หลักเกณฑ์และขั้นตอนการคำนวณวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยทฤษฎีบทของเทวินินพร้อมทั้งสร้างวงจรสมมูลของเทวินินได้

3. หลักเกณฑ์และขั้นตอนการคำนวณวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยทฤษฎีบทของนอร์ตันพร้อมทั้งสร้างวงจรสมมูลของนอร์ตันได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 3

ทฤษฎีการวางซ้อน ทฤษฎีบทของเทวินิน และทฤษฎีบทของนอร์ตัน

จากการศึกษาวงจรโดยใช้วิธีสร้างสมการโหนดและวิธีกระแสวงรอบของแมกซ์เวลล์จะมีความยุ่งยากพอสมควรในการสร้างสมการตามจำนวนโหนดหรือวงรอบแล้วแต่กรณี ซึ่งอาจจะทำให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย โดยเฉพาะการกำหนดเครื่องหมายทิศทางของกระแสที่ไหลในวงจรหรือทิศทางของแหล่งจ่ายแรงดัน ซึ่งข้อผิดพลาดดังกล่าวนั้นสามารถแก้ไขได้โดยการใช้ทฤษฎีการวางซ้อนหรือเรียกว่าทฤษฎีซูเปอร์โพซิชัน (super position theorem)

3.1 ทฤษฎีการวางซ้อน

ในวงจรที่มีความต้านทานแบบเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยแหล่งจ่ายไฟมากกว่า 1 ตัว กระแสไฟฟ้าที่ไหลในแต่ละจุดในวงจรจะเท่ากับผลรวมของกระแสไฟฟ้าที่ไหลในจุดนั้น ถ้าแต่ละแหล่งจ่ายไฟถูกพิจารณาแยกกันและเปลี่ยนแหล่งจ่ายไฟที่ไม่ถูกพิจารณาเป็นความต้านทานภายในของแหล่งจ่ายไฟซึ่งเรียกทฤษฎีนี้ว่า ทฤษฎีการวางซ้อน หรือทฤษฎีซูเปอร์โพซิชัน เหมาะสำหรับใช้ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่มีแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าหลาย ๆ ตัวที่ใช้งานลักษณะเหมือน ๆ กันในวงจรเชิงเส้น จำนวนกระแสหรือแรงดันที่เกิดขึ้นต่างก็เป็นอิสระต่อกันเมื่อแหล่งจ่ายทั้งหมดเป็นชนิดอิสระ การคิดคำนวณกระแสที่ไหลในวงจรและแรงดันที่ตกคร่อมโหลดสามารถคิดจากแหล่งจ่ายนั้น ๆ ทีละแหล่งจ่ายแยกอิสระกันได้ ซึ่งหลักการของทฤษฎีการวางซ้อนซึ่งใช้สำหรับแก้ปัญหาในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดทิศทางของกระแสไหลในสาขาทุกสาขาของวงจรไปในทิศทางใดก็ได้

ขั้นตอนที่ 2 เลือกพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันหรือแหล่งจ่ายกระแสทีละแหล่งจ่าย

ขั้นตอนที่ 3 แหล่งจ่ายที่เหลือให้ลัดวงจรในกรณีที่เป็นแหล่งจ่ายแรงดัน และให้เปิดวงจรในกรณีที่เป็นแหล่งจ่ายกระแส

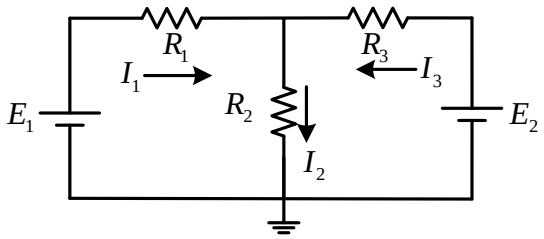
ขั้นตอนที่ 4 ค่าความต้านทานภายในแหล่งจ่ายต่าง ๆ ถ้ามีให้คงค่าไว้

ขั้นตอนที่ 5 คำนวณหาค่ากระแสหรือแรงดันตกคร่อมที่ความต้านทานแต่ละตัวตามทิศทางที่ถูกต้อง

ขั้นตอนที่ 6 พิจารณาแหล่งจ่ายที่เหลือให้ครบตามหลักการในขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 7 รวมทิศทางของกระแสในสาขาต่าง ๆ ก็จะได้ค่ากระแสที่ไหลในวงจรที่แท้จริงตามขั้นตอนที่ 1 ถ้ากระแสติดลบให้กลับทิศทางของกระแสค่านั้นจะได้ทิศทางของกระแสที่ถูกต้อง

พิจารณาการคำนวณด้วยทฤษฎีการวางซ้อนดังภาพที่ 3.1

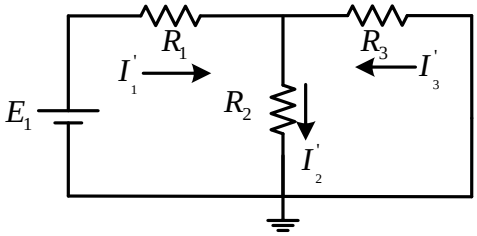


ภาพที่ 3.1 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณด้วยทฤษฎีการวางซ้อน

เมื่อต้องการหาทิศทางและขนาดของกระแสในวงจรในภาพที่ 3.1 มีลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดทิศทางของกระแสไหลในวงจรเป็นไปดังภาพที่ 3.1

ขั้นตอนที่ 2 เลือกพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าทีละแหล่งจ่าย ดังนั้นจะทำการพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า E_1 กระแสไฟฟ้า $I_1^{'}, I_2^{'}$ และ $I_3^{'}$ ดังภาพที่ 3.2



ภาพที่ 3.2 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณด้วยทฤษฎีการวางซ้อนเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน E_1

จากภาพที่ 3.2 พิจารณาหาค่า $I_1^{'}, I_2^{'}$ และ $I_3^{'}$ จะได้ว่า

อาศัยกฎของโอห์มจะได้

$$I_1^{'} = \frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)}$$

อาศัยการแบ่งกระแสจะได้

$$I_3^{'} = I_1^{'} \times \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} \right)$$

แทนค่า $I_1^{'}$ จะได้

$$I_3^{'} = \frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)} \times \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} \right)$$

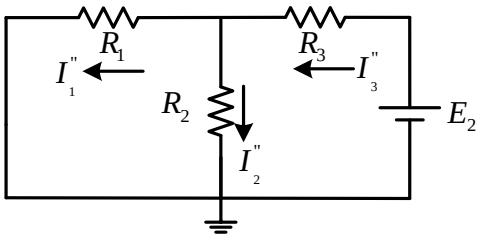
อาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ $I_2^{'} = I_1^{'} - I_3^{'}$

แทนค่า $I_1^{'}$ และ $I_3^{'}$ จะได้

$$I_2^{'} = \left[\frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)} \right] - \left[\frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)} \times \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \right]$$

$$I_2^{'} = \left[\frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)} \right] \times \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \right]$$

พิจารณาที่แหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า E_2 จะได้ภาพวงจรเป็นดังภาพที่ 3.3



ภาพที่ 3.3 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณด้วยทฤษฎีการวางซ้อนเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน E_2

จากภาพที่ 3.3 พิจารณาหาค่า $I_1^{"}, I_2^{"}$ และ $I_3^{"}$ จะได้ว่า

อาศัยกฎของโอห์มจะได้

$$I_3^{"} = \frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)}$$

อาศัยการแบ่งกระแสจะได้

$$I_1^{"} = I_3^{"} \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

แทนค่า $I_3^{"}$ จะได้

$$I_1^{"} = \left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

อาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ $I_2^{"} = I_3^{"} - I_1^{"}$

แทนค่า $I_1^{"}$ และ $I_3^{"}$ จะได้

$$I_2^{"} = \left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) - \left[\left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right]$$

$$I_2^{"} = \left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) \times \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right]$$

ดังนั้นจะได้กระแสที่ต้องการคือ

$$I_1 = I_1^{'} - I_1^{"}$$

$$I_1 = \left[\frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 // R_3\right)} \right] - \left[\left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right]$$

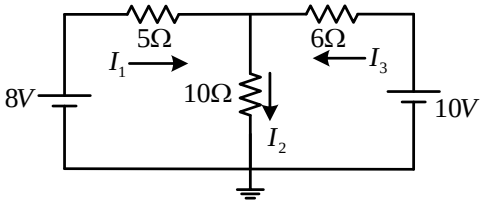
$$I_2 = I_2^{'} + I_2^{"}$$

$$I_2 = \left[\frac{E_1}{R_1 + \left(R_2 // R_3\right)} \right] \times \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) \right] + \left\{ \left(\frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)} \right) \times \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \right] \right\}$$

$$I_3 = I_3^{"} - I_3^{'}$$

$$I_3 = \left[\frac{E_2}{R_3 + (R_1 // R_2)}\right] - \left[\frac{E_1}{R_1 + (R_2 // R_3)} \times \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)\right]$$

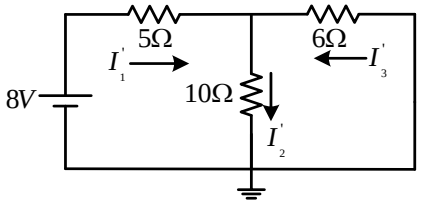
ตัวอย่างที่ 3.1 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า I_1, I_2 และ I_3 ในวงจรดังภาพที่ 3.4



ภาพที่ 3.4 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.1

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 กำหนดทิศทางของกระแสไหลเป็นไปดังภาพที่ 3.4

ขั้นตอนที่ 2 เลือกพิจารณาแหล่งจ่าย 8V ดังนั้นจะต้องทำการลัดวงจรแหล่งจ่าย 10V จะได้วงจรดังภาพที่ 3.5



ภาพที่ 3.5 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน 8V

จากภาพที่ 3.5 พิจารณาหาค่า I_1', I_2' และ I_3' จะได้ว่า

อาศัยกฎของโอห์มจะได้

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + (R_2 // R_3)}$$

แทนค่าจะได้

$$I_1' = \frac{8}{5 + \left(\frac{10 \times 6}{10 + 6}\right)} = 0.914A$$

อาศัยการแบ่งกระแสจะได้

$$I_3' = I_1' \times \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)$$

แทนค่าจะได้

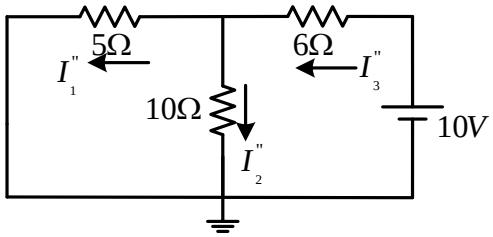
$$I_3' = 0.914 \times \left(\frac{10}{10 + 6}\right) = 0.571A$$

อาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ $I_2' = I_1' - I_3'$

แทนค่า I_1' และ I_3' จะได้

$$I_2^{'} = 0.914 - 0.571 = 0.343A$$

เลือกพิจารณาแหล่งจ่าย 10V ดังนั้นจะต้องทำการลัดวงจรแหล่งจ่าย 8V จะได้วงจรดังภาพที่ 3.6



ภาพที่ 3.6 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน 10V

จากภาพที่ 3.6 พิจารณาหาค่า $I_1^{"}, I_2^{"}$ และ $I_3^{"}$ จะได้ว่า

อาศัยกฎของโอห์มจะได้

$$I_3^{"} = \frac{E_2}{R_3 + \left(R_1 // R_2\right)}$$

แทนค่าจะได้

$$I_3^{"} = \frac{10}{6 + \left(\frac{5 \times 10}{5 + 10}\right)} = 1.071A$$

อาศัยการแบ่งกระแสจะได้

$$I_1^{"} = I_3^{"} \times \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

แทนค่าจะได้

$$I_1^{"} = 1.071 \times \left(\frac{10}{10 + 5}\right) = 0.714A$$

อาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ $I_2^{"} = I_3^{"} - I_1^{"}$

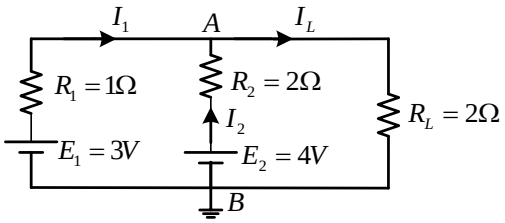
แทนค่า $I_1^{"}$ และ $I_3^{"}$ จะได้

$$I_2^{"} = 1.071 - 0.714 = 0.357A$$

ดังนั้นจะได้กระแสที่ต้องการคือ

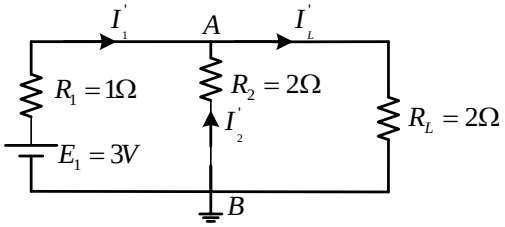
$$I_1 = I_1^{'} - I_1^{"}$$
$$I_1 = 0.914 - 0.714 = 0.2A$$
$$I_2 = I_2^{'} + I_2^{"}$$
$$I_2 = 0.342 + 0.357 = 0.699A$$
$$I_3 = I_3^{"} - I_3^{'}$$
$$I_3 = 1.071 - 0.571 = 0.5A$$

ตัวอย่างที่ 3.2 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดของวงจรดังภาพที่ 3.7 โดยใช้ทฤษฎีการวางซ้อน



ภาพที่ 3.7 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.2

วิธีทำ พิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน E_1 ดังนั้นจะต้องลัดวงจรที่แหล่งจ่าย E_2 จะได้ดังภาพที่ 3.8



ภาพที่ 3.8 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า E_1

คำนวณหาค่ากระแส I_1' โดยอาศัยกฎของโอห์มจะได้ว่า

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \left(\frac{R_2 \times R_L}{R_2 + R_L} \right)}$$

แทนค่าจะได้

$$I_1' = \frac{3}{1 + \left(\frac{2 \times 2}{2 + 2} \right)}$$

$$I_1' = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1.5A$$

คำนวณหาค่ากระแส I_2' โดยอาศัยกฎการแบ่งกระแสจะได้

$$I_2' = \frac{R_L}{R_2 + R_L} \times I_1'$$

แทนค่าจะได้

$$I_2' = \frac{2}{2+2} \times 1.5 = 0.75A$$

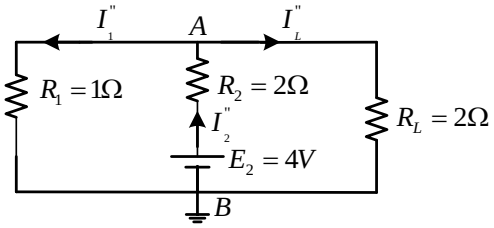
คำนวณหาค่ากระแส I_L' โดยอาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์จะได้

$$I_L' = I_1' - I_2'$$

แทนค่าจะได้

$$I_L^{'} = 1.5 - 0.75 = 0.75A$$

พิจารณาแหล่งจ่ายแรงดัน E_2 ดังนั้นจะต้องลัดวงจรที่แหล่งจ่าย E_1 จะได้ดังภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า E_2

คำนวณหาค่ากระแส $I_2^{''}$ โดยอาศัยกฎของโอห์มจะได้ว่า

$$I_2^{''} = \frac{E_2}{R_2 + \left(\frac{R_1 \times R_L}{R_1 + R_L} \right)}$$

แทนค่าจะได้

$$I_2^{''} = \frac{4}{2 + \left(\frac{1 \times 2}{1 + 2} \right)}$$

$$I_2^{''} = \frac{4}{2 + \frac{2}{3}} = \frac{12}{8} = 1.5A$$

คำนวณหาค่ากระแส $I_1^{''}$ โดยอาศัยกฎการแบ่งกระแสจะได้

$$I_1^{''} = \frac{R_L}{R_1 + R_L} \times I_2^{''}$$

แทนค่าจะได้

$$I_2^{''} = \frac{2}{1+2} \times 1.5 = 1.0A$$

คำนวณหาค่ากระแส $I_L^{''}$ โดยอาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์จะได้

$$I_L^{''} = I_2^{''} - I_1^{''}$$

แทนค่าจะได้

$$I_L^{''} = 1.5 - 1 = 0.5A$$

ดังนั้นจะได้กระแสที่ต้องการคือ

$$I_1 = I_1^{'} - I_1^{''}$$

$$I_1 = 1.5 - 1 = 0.5A$$

$$I_2 = I_2^{''} - I_2^{'}$$

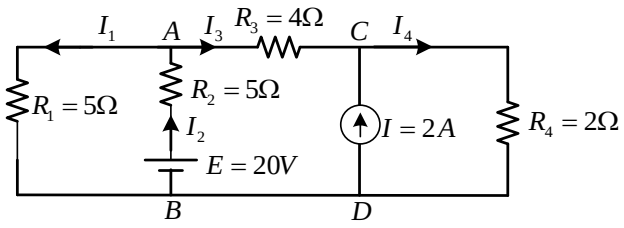
$$I_2 = 1.5 - 0.75 = 0.75A$$

$$I_L = I_L^{'} + I_L^{''}$$

$$I_L = 0.75 + 0.5 = 1.25A$$

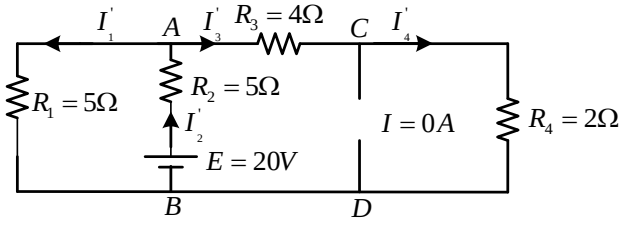
จะได้กระแสที่ไหลผ่านโหลดคือ $I_L = 1.25A$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงคำนวณหากำลังไฟฟ้าที่แพร่กระจายใน R_3 และกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_3 ของวงจรในภาพที่ 3.10 โดยใช้ทฤษฎีการวางซ้อน



ภาพที่ 3.10 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.3

วิธีทำ พิจารณาที่แหล่งจ่ายแรงดัน ดังนั้นจึงทำการเปิดวงจรที่แหล่งจ่ายกระแสจะได้วงจรเป็นดังภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาเพียงแหล่งจ่ายแรงดันเท่านั้น

คำนวณหาค่า I_2' โดยอาศัยกฎของโอห์มจะได้ว่า

$$I_2' = \frac{E}{R_T}$$

เมื่อ $$R_T = R_2 + \left(R_1 // \left(R_3 + R_4\right)\right)$$

$$R_T = 5 + \left(\frac{5\times(4+2)}{5+(4+2)}\right) = 5 + \left(\frac{30}{11}\right)$$

$$R_T = \frac{85}{11}$$

แทนค่าเพื่อหาค่า I_2' จะได้

$$I_2' = 20 \times \frac{11}{85} = 2.588A$$

คำนวณหาค่า $I_3' = I_4'$ จะได้โดยอาศัยการแบ่งกระแสจะได้ว่า

$$I_3' = I_4' = \frac{R_1}{R_1 + \left(R_3 + R_4\right)} \times I_2'$$

แทนค่าจะได้

$$I_3^{'} = I_4^{'} = \frac{5}{5+(4+2)} \times 2.588$$

$$I_3^{'} = I_4^{'} = 1.176A$$

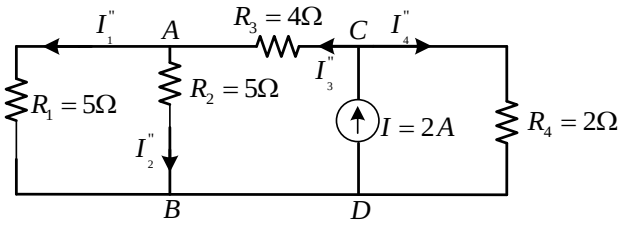
จากกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์สามารถหาค่ากระแส $I_1^{'}$ ได้ดังนี้

$$I_1^{'} = I_2^{'} - I_3^{'}$$

แทนค่าจะได้

$$I_1^{'} = 2.588 - 1.176 = 1.412A$$

พิจารณาที่แหล่งจ่ายกระแส ดังนั้นจึงทำการลัดวงจรที่แหล่งจ่ายแรงดันจะได้วงจรเป็นดังภาพที่ 3.12



ภาพที่ 3.12 วงจรไฟฟ้าเมื่อพิจารณาเพียงแหล่งจ่ายกระแสเท่านั้น

คำนวณหาค่า $I_3^{''}$ โดยอาศัยการแบ่งกระแสจะได้ว่า

$$I_3^{''} = \frac{R_4}{R_3 + (R_1 // R_2)} \times I$$

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5 \times 5}{5+5} = 2.5\Omega$$

แทนค่าจะได้ $$I_3^{''} = \frac{2}{4+(2.5)} \times 2$$

$$I_3^{''} = \frac{4}{6.5} = 0.471A$$

สามารถคำนวณหาค่า $I_4^{''}$ ได้โดยอาศัยกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ที่จุด C จะได้

$$I_4^{''} = I - I_3^{''}$$

แทนค่า $$I_4^{''} = 2 - 0.471A$$

$$I_4^{''} = 1.529A$$

ดังนั้นจะได้กระแสที่ไหลผ่าน R_3 คือ

$$I_3 = I_3^{'} - I_3^{''}$$

แทนค่าจะได้ $$I_3 = 1.176 - 0.471 = 0.705A$$

และสามารถหากำลังไฟฟ้าที่แพร่กระจายใน R_3 จะได้

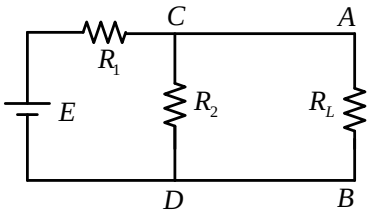
$$P = I_3^2 \times R_3 = 0.705^2 \times 4$$

$$P = 1.99W$$

3.2 ทฤษฎีบทของเทวินิน

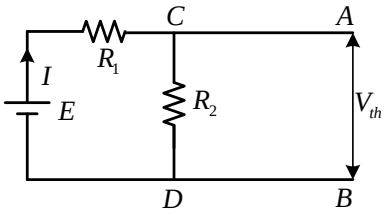
ทฤษฎีเทวินิน (thevenin theorem) นั้นเหมาะสำหรับการหากระแสไหลผ่านโหลดตัวใดตัวหนึ่งที่มีค่าความต้านทานคงที่หรืออาจมีค่าเปลี่ยนแปลงได้ ถึงแม้โหลดตัวนั้นจะเปลี่ยนไปก็ไม่ต้องสร้างสมการใหม่ เพียงแต่ใช้วงจรสมมูลเทวินินเท่านั้น เป็นทฤษฎีหนึ่งซึ่งใช้วิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่ซับซ้อนให้ง่ายและรวดเร็ว โดยเปลี่ยนวงจรเป็นแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าต่ออนุกรมกับความต้านทานเท่านั้น ทฤษฎีเทวินินกล่าวว่า “ถ้าจะหากระแสไหลผ่านค่าความต้านทานตัวใด ให้ปลดค่าความต้านทานตัวนั้นออกจากวงจร” ค่าแรงดันตกคร่อมระหว่างจุดที่ปลดค่าความต้านทานออกเรียกว่า แรงดันเทวินิน (E_{th}) ค่าความต้านทาน ณ จุดที่ปลดค่าความต้านทานนั้นออกเรียกว่า ความต้านทานเทวินิน (R_{th}) โดยการลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันหรือเปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแส สำหรับทฤษฎีเทวินินนั้นมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ปลดโหลดความต้านทานออก ซึ่งพิจารณาได้จากวงจรดังภาพที่ 3.13 และ 3.14



ภาพที่ 3.13 วงจรไฟฟ้าขณะที่ยังไม่ได้ทำการปลดโหลดความต้านทาน

เมื่อทำการปลดโหลดความต้านทานออกจะได้วงจรเป็นดังภาพที่ 3.14



ภาพที่ 3.14 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณหาค่าแรงดันเทวินิน

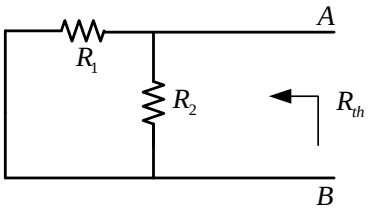
ขั้นตอนที่ 2 หาค่าแรงดันไฟฟ้าเมื่อเปิดวงจรโหลด ซึ่งแรงดันไฟฟ้าตัวนี้คือแรงดันเทวินินและจากภาพที่ 3.14 สามารถหาค่าแรงดันเทวินิน (V_{th}) ได้ดังนี้

$$I = \frac{E}{R_T}$$

ดังนั้นจะได้ $$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

และ $$V_{th} = IR_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาค่าความต้านทานเทวินิน (R_{th}) โดยเปลี่ยนแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเป็นความต้านทานภายในของแหล่งจ่ายไฟ และเปลี่ยนแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าเป็นวงจรเปิด ซึ่งจากภาพที่ 3.14 สามารถแปลงเป็นวงจรดังภาพที่ 3.15 เพื่อหาค่าความต้านทานเทวินินได้คือ

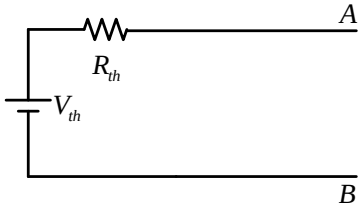


ภาพที่ 3.15 วงจรสำหรับการหาค่าความต้านทานเทวินิน

จากภาพที่ 3.15 สามารถพิจารณาหาค่าความต้านทานเทวินินได้ โดยจะสังเกตได้ว่า ค่าความต้านทานเทวินินจะพิจารณาจากตำแหน่ง A-B ทำให้ค่าความต้านทาน R_1 ขนานกับ R_2 จะได้

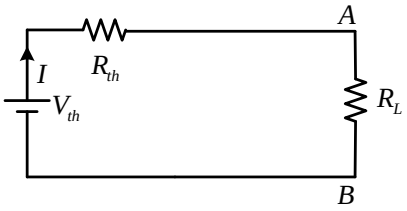
$$R_{th} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

ขั้นตอนที่ 4 นำค่าแรงดันเทวินินและความต้านทานเทวินินนำมาสร้างวงจรเทวินินโดยการนำแรงดันเทวินินอนุกรมกับความต้านทานเทวินินจะได้ดังภาพที่ 3.16



ภาพที่ 3.16 วงจรสมมูลเทวินิน

ขั้นตอนที่ 5 นำโหลดที่ปลดออกใส่กลับเข้าไปยังจุดเดิม ซึ่งในที่นี้ได้ทำการปลดโหลดออกจากขั้ว A-B ดังนั้นจึงนำกลับไปใส่ที่ขั้ว A-B จะได้ดังภาพที่ 3.17

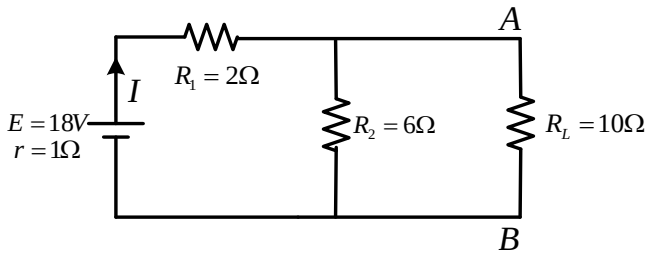


ภาพที่ 3.17 วงจรสมมูลเทวินินเมื่อต่อร่วมกับโหลด R_L

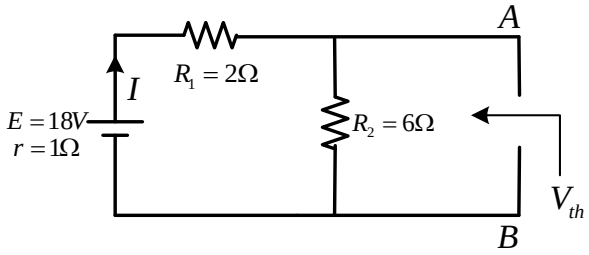
จากภาพที่ 3.17 สามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรเทวินินซึ่งต่ออนุกรมกับโหลด ซึ่งจะมีค่าเท่ากับกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดได้ดังนี้

$$I = I_L = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดความต้านทาน 10Ω โดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน



วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 ดำเนินการปลดโหลดความต้านทานออกเพื่อหาค่าแรงดันเทวินินจะได้ว่า

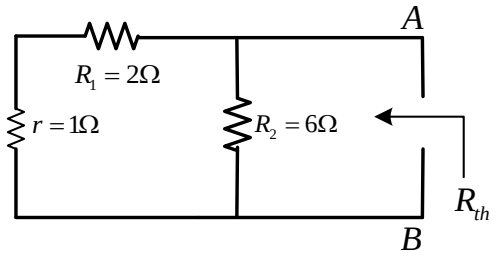


ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่าแรงดันเทวินิน (V_{th}) จะได้ว่า

$$V_{th} = IR_2 = \frac{ER_2}{r + R_1 + R_2}$$

แทนค่าจะได้ $$V_{th} = \frac{18 \times 6}{1 + 2 + 6} = \frac{108}{9} = 12V$$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณหาค่าความต้านทานเทวินินโดยการลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าจะได้



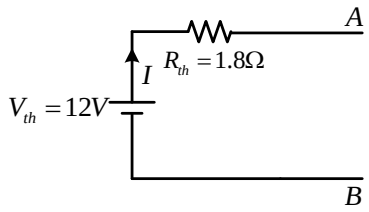
ค่าความต้านทานเทวินินจะพิจารณาจากตำแหน่ง A-B จะได้ว่า

$$R_{th} = \frac{(r + R_1) \times R_2}{(r + R_1) + R_2}$$

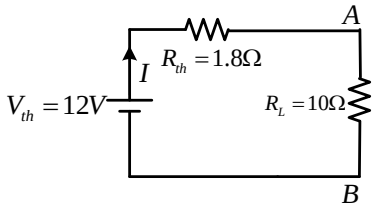
แทนค่าจะได้ $$R_{th} = \frac{(1+2) \times 6}{(1+2) + 6} = \frac{18}{10}$$

$$R_{th} = 1.8\Omega$$

ขั้นตอนที่ 4 เขียนวงจรสมมูลเทวินินจะได้ดังนี้



ขั้นตอนที่ 5 ใส่โหลดเชื่อมต่อไปยังขั้ว A-B ในวงจรสมมูลเทวินินเพื่อคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดจะได้ว่า

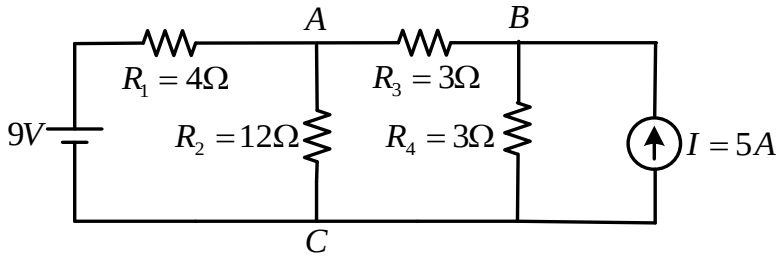


คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลในวงจรเทวินินซึ่งต่ออนุกรมกับโหลด ซึ่งจะมีค่าเท่ากับกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลดได้ดังนี้

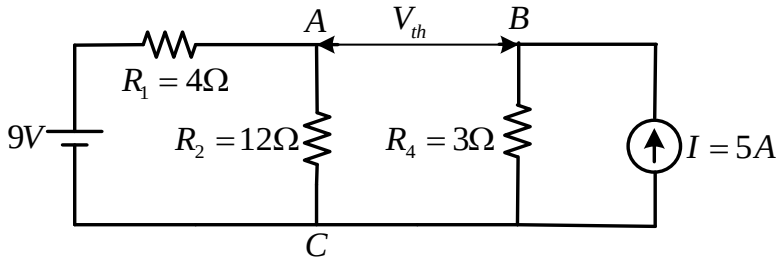
$$I = I_L = \frac{12}{1.8+10} = \frac{12}{11.8}$$

$$I = I_L = 1.016A$$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_3 ของวงจรดังภาพโดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน



วิธีทำ ดำเนินการปลด R_3 ออกเพื่อหาค่า V_{th} ซึ่งจะได้จากวงจรดังต่อไปนี้



อาศัยกฎการแบ่งแรงดันจะได้ว่า

พิจารณาที่แรงดันจุด AC: จะได้

$$V_{AC} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times E$$

แทนค่าจะได้

$$V_{AC} = \frac{12}{4+12} \times 9 = 6.75V$$

พิจารณาที่แรงดันจุด BC: จะได้

$$V_{BC} = I \times R_4$$

แทนค่าจะได้

$$V_{BC} = 5 \times 3 = 15V$$

ดังนั้นจะได้แรงดันเทวินินคือ

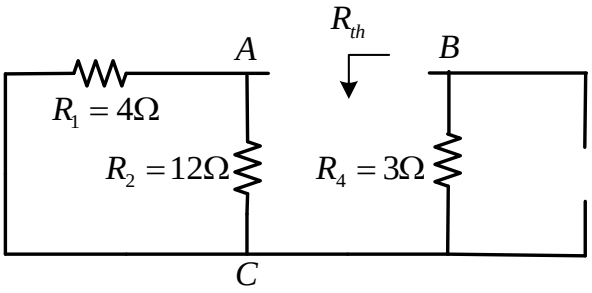
$$V_{th} = V_{BA} = V_{BC} - V_{AC}$$

แทนค่าจะได้

$$V_{th} = V_{BA} = 15 - 6.75$$

$$V_{th} = 8.25V$$

คำนวณหาค่าความต้านทานเทวินินโดยการลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันและเปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแสจะได้วงจรเป็นดังภาพ



หาค่าความต้านทานรวมโดยพิจารณาจากขั้ว AB จะได้ว่า

$$R_{AC} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$

แทนค่าจะได้

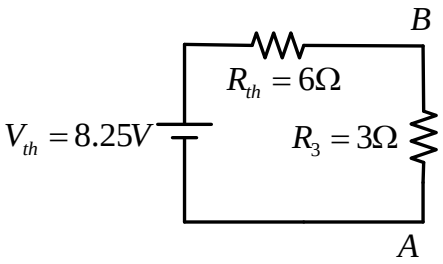
$$R_{AC} = \frac{4 \times 12}{4+12} = 3\Omega$$

$$R_{AB} = R_{AC} + R_4$$

แทนค่าจะได้

$$R_{AB} = 3 + 3 = 6\Omega$$

จะได้วงจรสมมูลเทวินินเป็นดังนี้



กระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านความต้านทาน R_3 คือกระแสที่ไหลในวงจรเทวินินจะได้

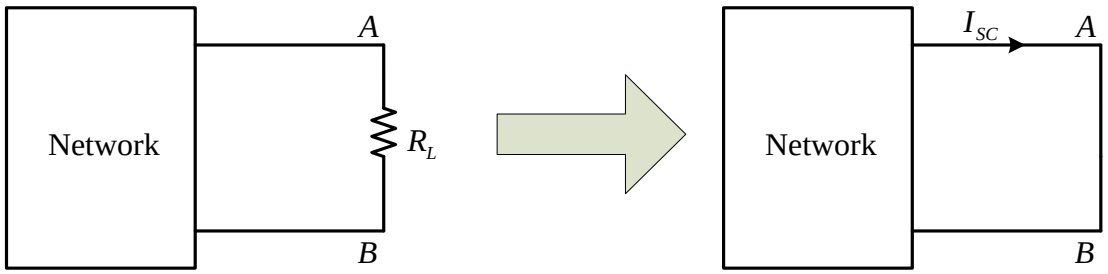
$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_3}$$

แทนค่าจะได้ $$I = \frac{8.25}{6+3} = 0.92A$$

3.3 ทฤษฎีบทของนอร์ตัน

ทฤษฎีบทของนอร์ตัน (norton theorem) เป็นทฤษฎีที่กลับกันกับทฤษฎีบทของเทวินิน เพราะทฤษฎีบทของเทวินินนั้นพยายามจะลดทอนวงจรให้เป็นวงจรที่มีแหล่งจ่ายแรงดันเทวินินตัวเดียว คือ E_{th} อนุกรมอยู่กับค่าความต้านทานเทวินิน R_{th} แต่ทฤษฎีบทของนอร์ตันนั้นจะพยายามลดทอนวงจรให้เป็นค่าของแหล่งจ่ายกระแสที่เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งที่ต่อขนานอยู่กับค่าความต้านทานเทียบเท่าของนอร์ตันอีกตัวหนึ่ง (R_i) หรืออาจจะกล่าวได้ว่า “วงจรสมมูลของทฤษฎีบทของเทวินินอยู่ในรูปของแหล่งจ่ายแรงดัน แต่ทฤษฎีบทของนอร์ตันจะอยู่ในรูปของแหล่งจ่ายกระแส” ในการคำนวณหาค่ากระแสที่ไหลผ่านโหลดนั้นทฤษฎีบทของนอร์ตันจะต้องลัดวงจร R_L (ทฤษฎีบทของเทวินินจะเปิดวงจรหรือปลด R_L ออกจากวงจร) โดยแหล่งจ่ายกระแสของวงจรสมมูลนอร์ตันจะแทนด้วย I_{SC} การคำนวณหาค่า R_i ของนอร์ตันจะเหมือนกันกับการคำนวณหาค่า R_{th} ของเทวินินทุกประการกล่าวคือ ลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันและเปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแส และขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วยทฤษฎีบทของนอร์ตันสามารถทำได้ดังนี้

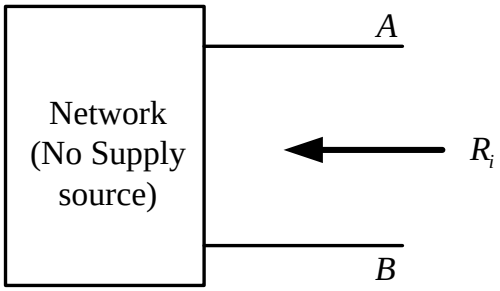
ขั้นตอนที่ 1 ปลดความต้านทานที่คร่อมขั้วที่กำลังพิจารณาออกและทำการลัดวงจร จะได้วงจรดังภาพที่ 3.18



ภาพที่ 3.18 เครือข่ายวงจรไฟฟ้าเมื่อปลดโหลดออกสำหรับการพิจารณาด้วยทฤษฎีบทของนอร์ตัน

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่ากระแสลัดวงจร

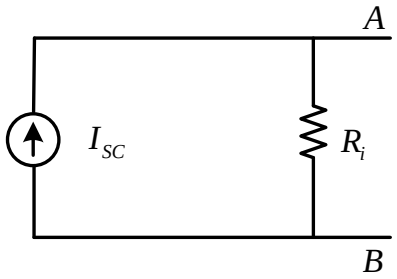
ขั้นตอนที่ 3 ปลดแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าออกหมดให้เหลือเพียงความต้านทานของมัน ส่วนแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าจะถูกลัดวงจร แหล่งจ่ายกระแสจะถูกเปิดวงจร เพื่อหาค่าความต้านทานของนอร์ตัน ทำให้ได้วงจรเป็นดังภาพที่ 3.19



ภาพที่ 3.19 เครือข่ายวงจรไฟฟ้าขณะไม่มีแหล่งจ่ายไฟฟ้า

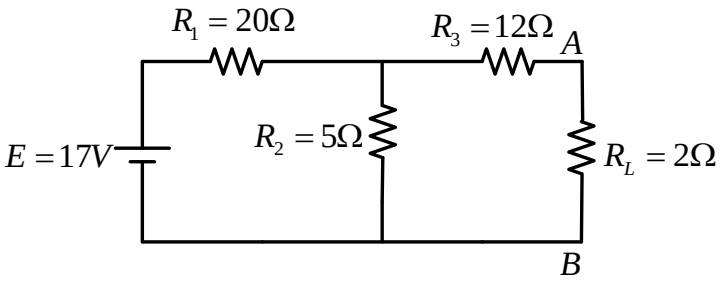
ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่าความต้านทานนอร์ตัน

ขั้นตอนที่ 5 นำค่าความต้านทานนอร์ตัน และกระแสลัดวงจรมาเขียนเป็นวงจรสมมูลนอร์ตัน จะได้วงจรเสมือนของนอร์ตันที่มีลักษณะเป็นแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าต่อขนานกับความต้านทานดังภาพที่ 3.20



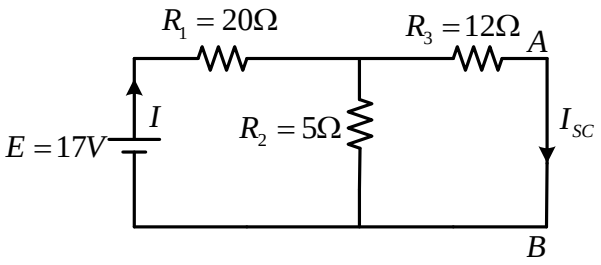
ภาพที่ 3.20 วงจรสมมูลของนอร์ตัน

ตัวอย่างที่ 3.6 จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่โหลดของวงจรดังภาพที่ 3.21



ภาพที่ 3.21 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.6

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 ปลดความต้านทานที่คร่อมขั้วที่กำลังพิจารณาออก $\left(R_L\right)$ และทำการลัดวงจร A และ B จะได้วงจรดังภาพที่ 3.22



ภาพที่ 3.22 วงจรไฟฟ้าเมื่อปลดความต้านทานที่โหลด

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่ากระแสลัดวงจรในภาพที่ 3.22 อาศัยกฎของโอห์มคำนวณหาค่ากระแสที่ไหลในวงจรโดยการคิดค่าความต้านทานรวมของวงจรไฟฟ้าจะได้

$$R_T = R_1 + \left(R_2 \,//\, R_3\right)$$

แทนค่าจะได้

$$R_T = 20 + \left(\frac{5\times 12}{5+12}\right)$$

$$R_T = 20 + 3.53 = 23.53\Omega$$

ดังนั้นสามารถคำนวณหากระแสไฟฟ้ารวมที่ไหลในวงจรได้

$$I = \frac{E}{R_T}$$

แทนค่าจะได้

$$I = \frac{17}{23.53} = 0.722A$$

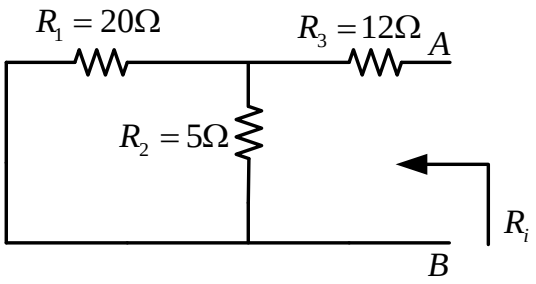
อาศัยกฎการแบ่งกระแสเพื่อคำนวณหาค่า I_{SC} จะได้

$$I_{SC} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \times I$$

แทนค่าจะได้

$$I_{SC} = \frac{5}{5+12} \times 0.722 = 0.212A$$

ขั้นตอนที่ 3 ลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเหลือเพียงเฉพาะค่าความต้านทานในวงจร จะได้ดังภาพที่ 3.23



ภาพที่ 3.23 ลัดวงจรแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าเพื่อคำนวณหาค่าความต้านทานนอร์ตัน

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่าความต้านทานนอร์ตันจะได้ว่า

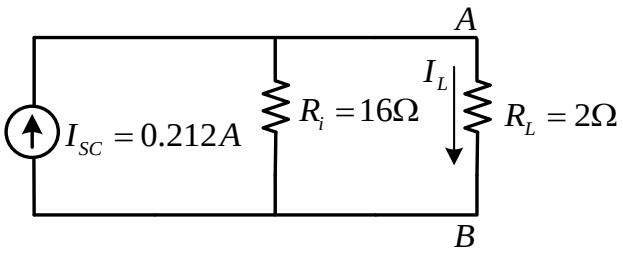
$$R_i = \left(R_1 // R_2\right) + R_3$$

แทนค่าจะได้

$$R_i = \left(\frac{20 \times 5}{20 + 5}\right) + 12$$

$$R_i = 16\Omega$$

ขั้นตอนที่ 5 สร้างวงจรสมมูลของนอร์ตันในรูปของแหล่งจ่ายกระแสต่อขนานกับค่าความต้านทานนอร์ตันและแทนที่โหลด $\left(R_L\right)$ กลับเข้าไปที่ขั้ว A-B จะได้วงจรดังภาพที่ 3.24



ภาพที่ 3.24 วงจรสมมูลนอร์ตันสำหรับการคำนวณกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลด

อาศัยกฎการแบ่งกระแสไฟฟ้าจะสามารถคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลด $\left(I_L\right)$ ได้ดังนี้

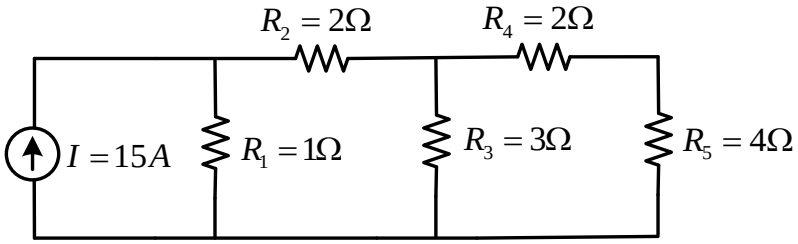
$$I_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} \times I_{SC}$$

แทนค่าจะได้

$$I_L = \frac{16}{16 + 2} \times 0.212$$

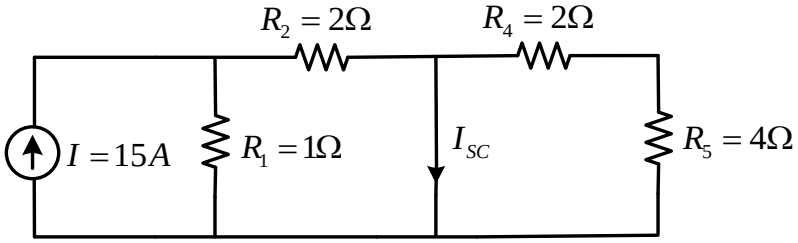
$$I_L = 0.189A$$

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่าน R_3 ของวงจรไฟฟ้าดังภาพที่ 3.25 โดยใช้ทฤษฎีของนอร์ตัน



ภาพที่ 3.25 วงจรไฟฟ้าสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.7

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 ปลดความต้านทานที่ต้องการหากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านออก (R_3) และลัดวงจร ณ ตำแหน่งที่ปลดออกจะได้วงจรเป็นดังภาพที่ 3.26



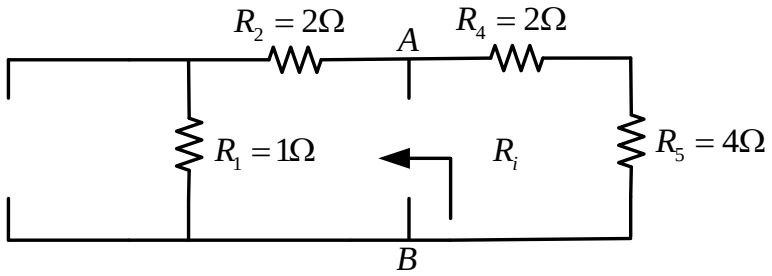
ภาพที่ 3.26 วงจรไฟฟ้าเมื่อปลดค่าความต้านทาน R_3 ออก

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่ากระแสลัดวงจรในภาพที่ 3.26 โดยอาศัยกฎการแบ่งกระแสจะได้

$$I_{SC} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times I$$

แทนค่าจะได้ $$I_{SC} = \frac{1}{1+2} \times 15 = 5A$$

ขั้นตอนที่ 3 เปิดวงจรแหล่งจ่ายกระแสไฟฟ้าเหลือเพียงเฉพาะค่าความต้านทานในวงจร จะได้ดังภาพที่ 3.27



ภาพที่ 3.27 วงจรสำหรับการคำนวณหาค่าความต้านทานนอร์ตัน

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณหาค่าความต้านทานนอร์ตันจะได้ว่า

$$R_i = (R_1 + R_2) // (R_4 + R_5)$$

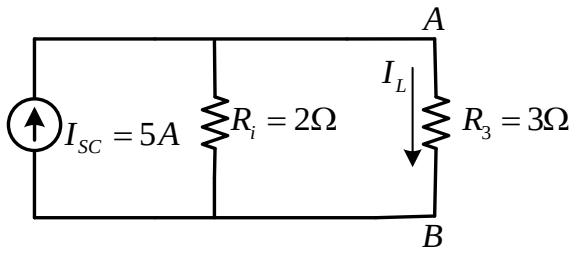
$$R_i = \frac{(R_1 + R_2) \times (R_4 + R_5)}{(R_1 + R_2) + (R_4 + R_5)}$$

แทนค่าจะได้

$$R_i = \frac{(1+2) \times (2+4)}{(1+2) + (2+4)}$$

$$R_i = \frac{3 \times 6}{3+6} = \frac{18}{9} = 2\Omega$$

ขั้นตอนที่ 5 สร้างวงจรสมมูลของนอร์ตันในรูปของแหล่งจ่ายกระแสต่อขนานกับค่าความต้านทานนอร์ตันและแทนที่โหลด (R_L) กลับเข้าไปที่ขั้ว A-B จะได้วงจรดังภาพที่ 3.28



ภาพที่ 3.28 วงจรสมมูลนอร์ตันสำหรับการคำนวณในตัวอย่างที่ 3.7

คำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านโหลด R_3 โดยอาศัยกฎการแบ่งกระแสจะได้

$$I_L = \frac{R_i}{R_i + R_3} \times I_{SC}$$

แทนค่าจะได้

$$I_L = \frac{2}{2+3} \times 5$$

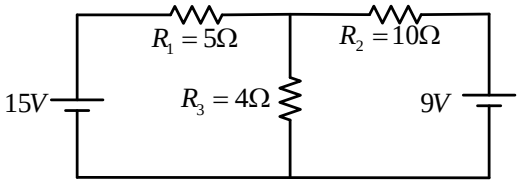
$$I_L = 2A$$

3.4 สรุป

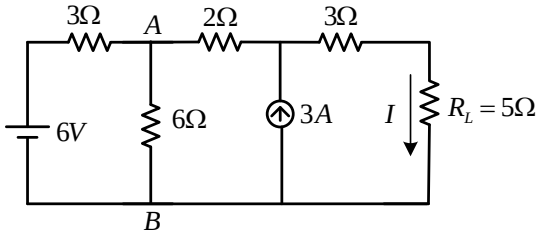
เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอวิธีการคำนวณและวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าซึ่งอยู่ในรูปของวงจรที่มีความซับซ้อนให้สามารถสร้างเป็นวงจรสมมูลเพื่อวิเคราะห์ให้อยู่ในรูปของวงจรอย่างง่าย โดยอาศัยทฤษฎีการวางซ้อน ทฤษฎีบทของเทวินินและทฤษฎีบทของนอร์ตัน พร้อมทั้งอาศัยกฎของโอห์มและกฎของเคอร์ชอฟฟ์เพื่อการคำนวณปริมาณทางไฟฟ้าต่อไป

3.5 คำถามท้ายบท

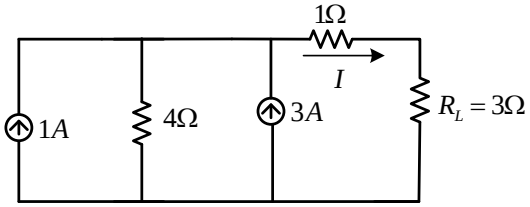
1. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) จากวงจรที่กำหนดให้ดังภาพด้านล่างนี้โดยใช้ทฤษฎีการวางซ้อน



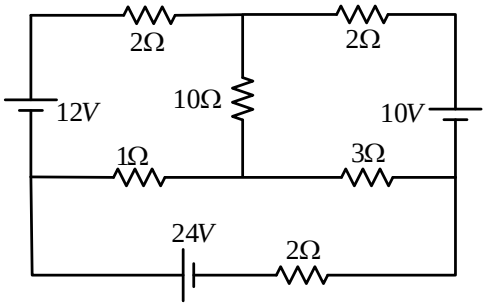
2. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) จากวงจรที่กำหนดให้ดังภาพด้านล่างนี้โดยใช้ทฤษฎีการวางซ้อน



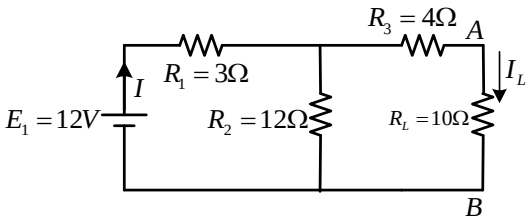
3. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้า (I) ที่ไหลผ่านโหลด R_L โดยใช้ทฤษฎีการวางซ้อน



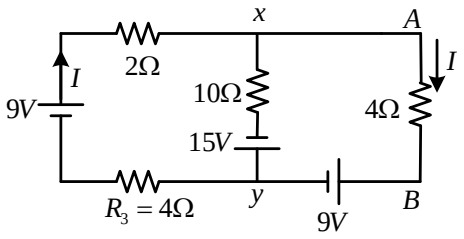
4. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน 1Ω ในวงจรไฟฟ้าดังภาพ



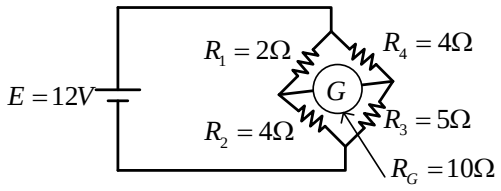
5. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน 8Ω โดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินินและให้หาค่ากระแสไฟฟ้าที่จ่ายจากแบตเตอรี



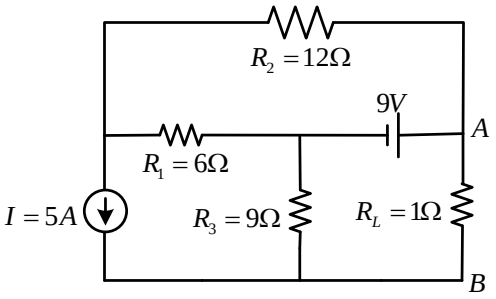
6. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน 4Ω โดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน



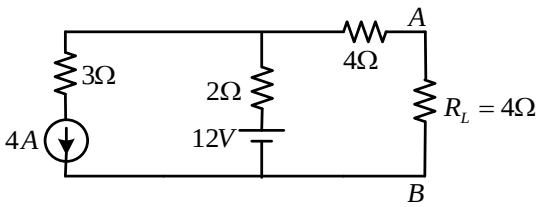
7. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านกัลวานอมิเตอร์ของวงจรบริดจ์โดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน



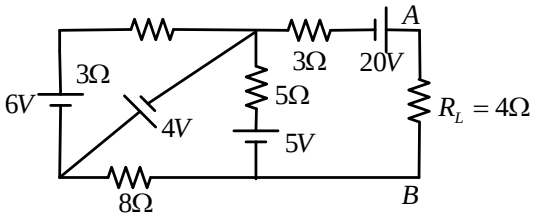
8. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน R_L โดยใช้ทฤษฎีบทของเทวินิน



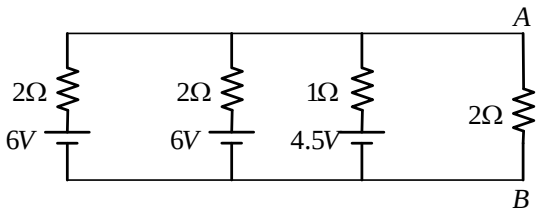
9. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน R_L โดยใช้ทฤษฎีบทของนอร์ตัน



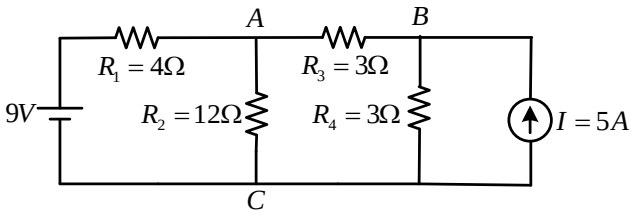
10. จงคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านค่าความต้านทาน R_L โดยใช้ทฤษฎีบทของนอร์ตัน



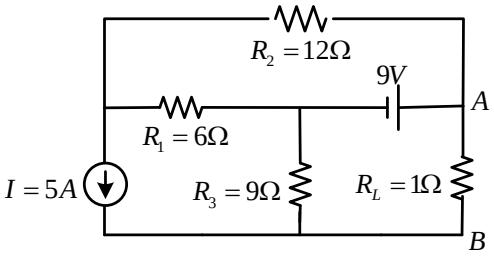
11. จงคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่คร่อมขั้ว A-B ของวงจรดังภาพโดยใช้ทฤษฎีบทของนอร์ตัน



12. จงคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่คร่อมขั้ว A-B ของวงจรดังภาพโดยใช้ทฤษฎีบทของนอร์ตัน



13. จงคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่คร่อมขั้ว A-B ของวงจรดังภาพโดยใช้ทฤษฎีบทของนอร์ตัน



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4
ตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ

หัวข้อเนื้อหา

4.1 ตัวเหนี่ยวนำ

4.1.1 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรม

4.1.2 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนาน

4.2 ตัวเก็บประจุ

4.2.1 การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบอนุกรม

4.2.2 การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบขนาน

4.3 สรุป

4.4 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. หลักการทำงานของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ
2. โครงสร้างของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ
3. การต่อวงจรตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ
4. ความสัมพันธ์ของตัวเก็บประจุ และตัวเหนี่ยวนำในวงจรไฟฟ้ากระแสตรง

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 4

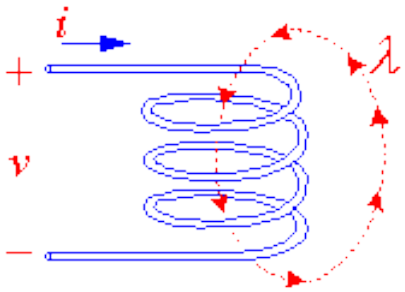
ตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ

วงจรไฟฟ้ากระแสตรงในสภาวะปกติจะมีค่าพารามิเตอร์ทางไฟฟ้าปรากฏอยู่เสมอ อาทิ ค่าความต้านทาน ค่าความเหนี่ยวนำ และค่าความจุไฟฟ้า ซึ่งพารามิเตอร์เหล่านี้จะแสดงอาการตอบสนองทางไฟฟ้าแตกต่างกันออกไปซึ่งค่าความต้านทานนั้นได้อธิบายไว้แล้วในบทก่อนหน้า ดังนั้นในบทนี้จะอธิบายเพียงในส่วนของ ตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำเท่านั้น

4.1 ตัวเหนี่ยวนำ

ในวงจรไฟฟ้าหรือวงจรอิเล็กทรอนิกส์จะมีขดลวดหรือคอยล์เป็นตัวประกอบอยู่เสมอเช่น หม้อแปลง มอเตอร์ ก็จะมีขดลวดพันรอบแกนเหล็กหรือพันอยู่ในร่อง (slots) ของแกนเหล็ก ขดลวดเหล่านั้นจะมีคุณสมบัติเป็นตัวเหนี่ยวนำ (inductor) ในวงจรไฟฟ้า เมื่อปล่อยกระแสไฟฟ้าผ่านตัวเหนี่ยวนำจะเกิดค่า ความเหนี่ยวนำ (inductance) ขึ้น โดยใช้ตัวอักษรย่อแทนความเหนี่ยวนำคือ “L” และค่าความเหนี่ยวนำนี้จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ และสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำนี้จะทำให้เกิดค่าแรงดันเหนี่ยวนำขึ้น (induced electromotive force) ในที่สุด ซึ่งคุณสมบัติของค่าความเหนี่ยวนำนั้นจะเป็นตัวต่อต้านกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำในขณะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างช้าๆ แต่ค่าความเหนี่ยวนำจะไม่ตอบสนองต่อไฟฟ้ากระแสตรง ทั้งนี้เพราะไฟฟ้ากระแสตรงนั้นไม่มีคาบความถี่ จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยเวลา

ตัวเหนี่ยวนำเป็นอุปกรณ์แบบเฉื่อย งานที่สะสมพลังงานในรูปแบบสนามแม่เหล็ก (magnetic field) โดยสร้างจากเส้นลวดตัวนำที่นำมาพันรอบแกน ซึ่งเมื่อจ่ายกระแสเข้าไปยังขดลวดจะทำให้เกิดเส้นแรงแม่เหล็ก (magnetic flux) คล้องขดลวดนี้ขึ้นดังภาพที่ 4.1 โดยค่าความเหนี่ยวนำนั้นพิจารณาจากกฎการเหนี่ยวนำของฟาราเดย์ดังนี้



ภาพที่ 4.1 ตัวเหนี่ยวนำ

ที่มา (Charles J. Monier, 2001, p.334)

$$emf = N\frac{d\Phi}{dt}$$

และ $$\Phi = \frac{F}{\Re} = \frac{NI}{\Re}$$

ดังนั้น $$emf = N\frac{d}{dt}\left(\frac{NI}{\Re}\right)$$

เมื่อ N และ $\Re$ เป็นค่าคงที่ จะได้สมการของ emf เป็นดังนี้

$$emf = \frac{N^2}{\Re}\frac{dI}{dt}$$

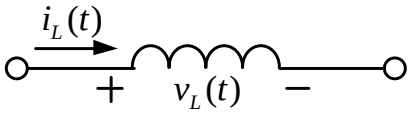
ให้ค่า $\frac{N^2}{\Re}$ เป็นค่าความเหนี่ยวนำ (L) มีหน่วยเป็นเฮนรี (H)

สามารถคำนวณหาค่าแรงเคลื่อนเหนี่ยวนำไฟฟ้าได้ดังสมการที่ (4.1)

$$emf = V = L\frac{dI}{dt} \tag{4.1}$$

เมื่อ $$L = \frac{N^2}{\Re} \tag{4.2}$$

สัญลักษณ์ของตัวเหนี่ยวนำและทิศทางของกระแส และขั้วของแรงดัน ที่สอดคล้องกับสมการที่ (4.1) แสดงได้ดังภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.2 สัญลักษณ์ของตัวเหนี่ยวนำ

จากความสัมพันธ์ $F = NI = \Phi\Re$ และทำการแทนค่า $\Re$ ในสมการที่ (4.2) จะได้ว่า

$$NI = \frac{\Phi N^2}{L}$$

ดังนั้น $$L = \frac{\Phi N^2}{NI}$$

$$L = \frac{\Phi N}{I} \tag{4.3}$$

จากสมการที่ (4.3) จะเห็นว่าค่าความเหนี่ยวนำจะขึ้นอยู่กับจำนวนรอบของขดลวด (N) ค่าเส้นแรงแม่เหล็ก (Φ) และค่ากระแสที่ไหลผ่านขดลวด (I) และจากสมการที่ (4.3) สามารถแปลงสูตรของค่าความเหนี่ยวนำได้ดังนี้

$$L = \frac{FN}{\Re I}$$

$$L = \frac{NIN}{\left(\frac{l}{\mu A}\right)N}$$

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

เมื่อ $\mu = \mu_0 \mu_r$

ดังนั้น

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l} \tag{4.4}$$

เมื่อ A คือ พื้นที่หน้าตัดของขดลวด มีหน่วยเป็นตารางเมตร $\left(m^2\right)$

l คือ ความยาวของขดลวด มีหน่วยเป็นเมตร $\left(m\right)$

μ คือ ความซึมซาบได้ของตัวกลาง

μ_0 คือ ความซึมซาบแม่เหล็กในอากาศ $\left(4\pi \times 10^{-7} H/m\right)$

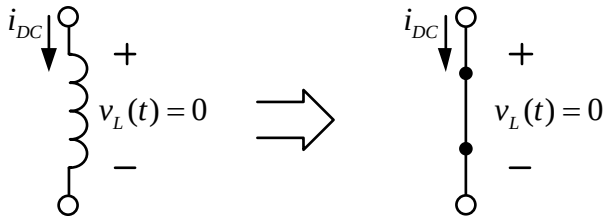
μ_r คือ ความซึมซาบสัมพัทธ์ของตัวกลาง

และ N คือ จำนวนรอบของขดลวด

และกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำจะได้ดังสมการที่ (4.5)

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + i(0) \tag{4.5}$$

จากสมการที่ (4.5) แรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำ เมื่อกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น กระแสแบบไฟตรง (DC) จะพบว่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวเหนี่ยวนำเท่ากับศูนย์ นั่นคือตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจรเมื่อกระแสเป็นไฟตรงแสดงได้ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 ตัวเหนี่ยวนำที่สัญญาณไฟตรง

พลังงานที่สะสมในตัวเหนี่ยวนำสามารถหาได้จากสมการที่ (4.6)

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t v_L(t) i_L(t) dt \tag{4.6}$$

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \tag{4.7}$$

จะพบว่าพลังงานที่สะสมที่ตัวเหนี่ยวนำมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าตัวเหนี่ยวนำเป็นอุปกรณ์แบบเฉื่อยงาน และพลังงานที่สะสมที่ตัวเหนี่ยวนำนี้จะอยู่ในรูปของสนามสนามแม่เหล็กที่คล้องผ่านขดลวดตัวเหนี่ยวนำ

ตัวอย่างที่ 4.1 ตัวเหนี่ยวนำแกนอากาศ มีจำนวนรอบของขดลวด 300 รอบ พื้นที่หน้าตัด 10 cm^2 ยาว 10 cm จงคำนวณหาค่าความเหนี่ยวนำ

วิธีทำ จากสมการที่ (4.4) $L = \dfrac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l}$

แทนค่าจะได้ $L = \dfrac{(300)^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-2}}$

$L = 1.131 \times 10^{-3} H$

ดังนั้นจะได้ $L = 1.131 \ mH$

ตัวอย่างที่ 4.2 ตัวเหนี่ยวนำแกนอากาศ พันด้วยขดลวด 1000 รอบ มีค่ากระแสไฟฟ้าไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ $1A$ ค่าความเหนี่ยวนำ $3mH$ จงคำนวณหาค่าแรงแม่เหล็ก

วิธีทำ จากสมการที่ (4.3) $L = \dfrac{\Phi N}{I}$

แทนค่าจะได้ $3 \times 10^{-3} = \dfrac{\Phi \times 1000}{1}$

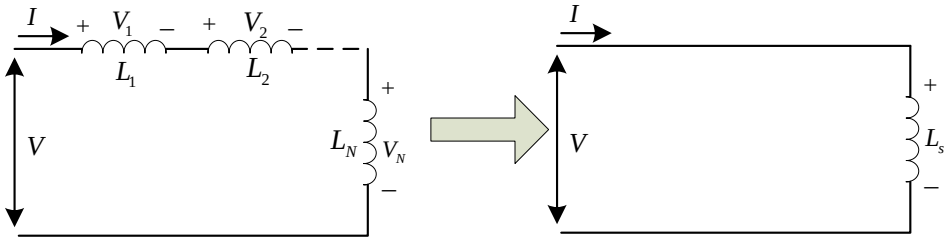
สามารถคำนวณหาค่าแรงแม่เหล็กได้

$\Phi = 3 \times 10^{-6} \ Wb$

ดังนั้นจะได้ $\Phi = 3 \times 10^{-6} \ Wb$

4.1.1 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรม

พิจารณารูปวงจรการต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรมจำนวน N ตัวดังภาพที่ 4.4 และประยุกต์กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ (KVL) จะได้ดังนี้



ภาพที่ 4.4 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรม

จากกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_N$$

และจาก $V = L\frac{dI}{dt}$

ดังนั้นจะได้ $V = L_1\frac{dI}{dt} + L_2\frac{dI}{dt} + ... + L_N\frac{dI}{dt}$

$$V = \left(L_1 + L_2 + ... + L_N\right)\frac{dI}{dt}$$

$$V = \left(\sum_{N=1}^{M} L_N\right)\frac{dI}{dt}$$

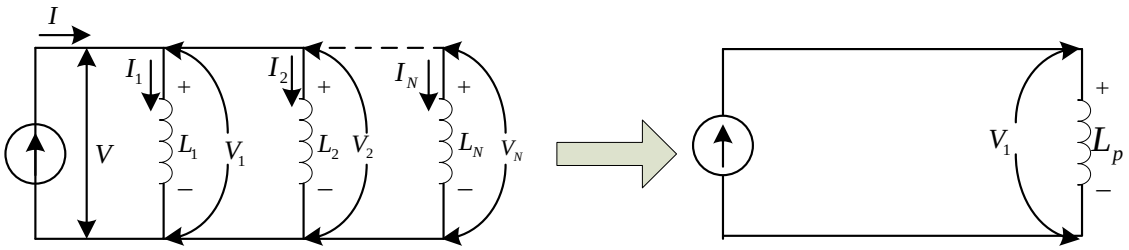
และ $V = L_s\frac{dI}{dt}$

ดังนั้นจะได้ $L_s = L_1 + L_2 + ... + L_N = \sum_{N=1}^{M} L_N$

เมื่อ L_s คือ ผลรวมของค่าการเหนี่ยวนำที่ต่อกันแบบอนุกรม

4.1.2 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนาน

พิจารณารูปวงจรการต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนานจำนวน N ตัว จากภาพที่ 4.5 และประยุกต์กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ (KCL) จะได้ดังนี้



ภาพที่ 4.5 การต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนาน

จากกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_N$$

$$V = V_1 = V_2 = ... = V_N$$

และจาก $V = L\frac{dI}{dt}$

แทนค่าจะได้ $L_p\frac{dI}{dt} = L_1\frac{dI}{dt} = L_2\frac{dI}{dt} = ... = L_N\frac{dI}{dt}$

ดังนั้น $\frac{V}{L_p} = \frac{dI}{dt}$

$$\frac{V_1}{L_1} = \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{V_2}{L_2} = \frac{dI_2}{dt}$$

$$\frac{V_N}{L_N} = \frac{dI_N}{dt}$$

กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + ... + \frac{dI_N}{dt}$$

แทนค่าจะได้ว่า

$$\frac{V}{L_p} = \frac{V_1}{L_1} + \frac{V_2}{L_2} + ... + \frac{V_N}{L_N}$$

เนื่องจากวงจรขนานจะมีแรงดันตกคร่อมเท่ากัน $V = V_1 = V_2 = ... = V_N$ จะได้ว่า

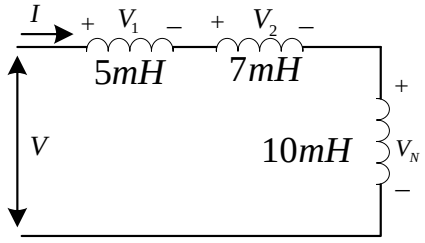
$$\frac{V}{L_p} = \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2} + ... + \frac{V}{L_N}$$

$$\frac{V}{L_p} = V\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_N}\right)$$

นำ V หารตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_N}$$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงคำนวณหาค่าตัวเหนี่ยวนำรวมของวงจรดังต่อไปนี้



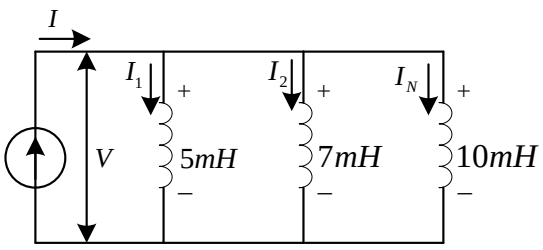
วิธีทำ เนื่องจากเป็นการต่อตัวเหนี่ยวนำแบบอนุกรมดังนั้นจะได้ค่าตัวเหนี่ยวนำรวมคือ

$$L_s = L_1 + L_2 + ... + L_N = \sum_{N=1}^{M} L_N$$

แทนค่าจะได้ $L_s = 5mH + 7mH + 10mH$

$$L_s = 22mH$$

ตัวอย่างที่ 4.4 จงคำนวณหาค่าตัวเหนี่ยวนำรวมของวงจรดังต่อไปนี้



วิธีทำ เนื่องจากเป็นการต่อตัวเหนี่ยวนำแบบขนานดังนั้นจะได้ค่าตัวเหนี่ยวนำรวมคือ

$$\frac{1}{L_p}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+...+\frac{1}{L_N}$$

แทนค่าจะได้

$$\frac{1}{L_p}=\frac{1}{5mH}+\frac{1}{7mH}+\frac{1}{10mH}$$

$$\frac{1}{L_p}=\frac{14+10+7}{70}$$

$$\frac{1}{L_p}=\frac{31}{70}$$

$$L_p=2.26mH$$

4.2 ตัวเก็บประจุ

เมื่อตัวนำโลหะจำนวน 2 ชิ้นที่วางขนานกัน โดยมีฉนวนกั้นกลางอยู่และต่อกับแหล่งจ่ายแรงดันขนาด V จะทำให้มีค่าประจุบวก $(+Q)$ สะสมอยู่บนตัวนำโลหะที่ต่ออยู่กับขั้วบวกของแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้า และมีค่าประจุลบ $(-Q)$ สะสมอยู่บนตัวนำโลหะที่ต่ออยู่กับขั้วลบของแหล่งจ่ายแรงดัน จำนวนประจุไฟฟ้าบวกกับจำนวนประจุไฟฟ้าลบจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นประจุไฟฟ้าสุทธิจึงมีค่าเป็นศูนย์

หลักการของการประจุไฟฟ้าจะแปรผันตรงกับพิกัดของแรงดัน กล่าวคือ ถ้าแรงดันไฟฟ้ามากค่าการประจุไฟฟ้าก็จะมาก และถ้าแรงดันไฟฟ้าน้อยค่าการประจุไฟฟ้าก็จะน้อยตามไปด้วยดังสมการที่ (4.8)

$$Q \propto V \tag{4.8}$$

เมื่อมีค่าการประจุไฟฟ้ามาก ค่าของความจุไฟฟ้า (capacitance) ก็จะมีค่ามาก แต่ถ้าการประจุไฟฟ้ามีจำนวนลดลง ความจุไฟฟ้าก็จะลดลงอีกเช่นกันดังสมการที่ (4.9)

$$Q \propto C \tag{4.9}$$

ดังนั้น

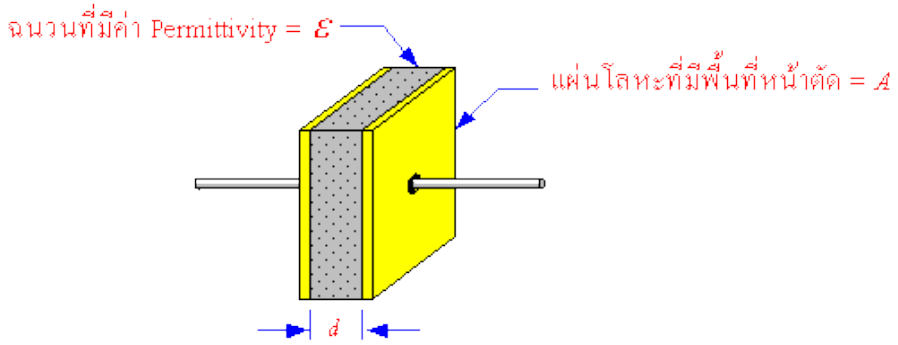
$$Q = CV \tag{4.10}$$

และจะได้ค่าความจุไฟฟ้าคือ $C=\frac{Q}{V}$

โดยที่ C คือ ค่าความจุไฟฟ้ามีหน่วยเป็นฟารัด (F)

ค่าความจุไฟฟ้า 1 ฟารัดคือ ความจุไฟฟ้าของตัวนำโดดเดี่ยวที่มีศักย์ไฟฟ้า 1 โวลต์หลังจากได้รับการประจุไฟฟ้า 1 คูลอมบ์ เหตุที่เรียกหน่วยของความจุไฟฟ้าว่าฟารัดเพื่อเป็นการให้เกียรติแก่ไมเคิล ฟาราเดย์ (Michael Faraday)

ตัวเก็บประจุเป็นอุปกรณ์แบบเฉื่อย งานที่สะสมพลังงานในรูปแบบสนามไฟฟ้า (electric field) โดยโครงสร้างประกอบด้วย แผ่นตัวนำไฟฟ้า 2 แผ่นที่ถูกแยกจากกันโดยฉนวนไฟฟ้า (insulator) หรืออาจเรียกว่าสารไดอิเล็กตริก (dielectric) ดังภาพที่ 4.6



ภาพที่ 4.6 โครงสร้างของตัวเก็บประจุ
ที่มา (Bruce Carlson A., 2000, p.192)

จากสภาพที่ตัวนำโลหะจำนวน 2 ชิ้นวางขนานกันนั้น จะมีช่องว่างระหว่างตัวนำทั้งสอง เรียกว่า ฉนวนหรือตัวกลาง ซึ่งจะมีคุณสมบัติทำให้ค่าความจุไฟฟ้าแตกต่างกันออกไปตามชนิดของฉนวนหรือตัวกลาง คุณสมบัติอันนี้เรียกว่า สภาพยอม (permittivity) ดังนั้น ค่าความจุไฟฟ้าจึงแปรผันตรงกับสภาพยอม

$$C \propto \varepsilon \tag{4.11}$$

และ
$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \tag{4.12}$$

เมื่อ ε คือ ค่าสภาพยอมของฉนวนหรือตัวกลาง

ε_r คือ ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ (relative permittivity)

ε_0 คือ ค่าสภาพยอมของสุญญากาศ มีค่าประมาณ $8.85 \times 10^{-12} F/m$

ค่าความจุไฟฟ้าจะขึ้นกับประเภทของฉนวนที่คั่นอยู่ระหว่างแผ่นโลหะทั้งสอง ซึ่งค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ของฉนวนหรือตัวกลางบางชนิดมีค่าแสดงดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ค่าสภาพให้ซึมผ่านได้ของฉนวนหรือตัวกลางบางชนิด

วัสดุ	**ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์**	**วัสดุ**	**ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์**
สุญญากาศ	1.00000	อากาศ	1.00054
น้ำ	78	กระดาษ	3.5
ไมกา	5.4	อำพัน	2.7
กระเบื้อง	6.5	ควอตซ์	3.8
แก้วไพเรกซ์	4.5	เบเคอไล	4.8

ตารางที่ 4.1 ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ของฉนวนหรือตัวกลางบางชนิด (ต่อ)

วัสดุ	ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์	วัสดุ	ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์
โพลีเอทิลีน	2.3	เทฟลอน	2.1
นีโอปรีน	6.9		

ที่มา (ภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ฟิสิกส์ 2, 2533, หน้า 127)

นอกจากนี้ค่าความจุไฟฟ้ายังขึ้นอยู่กับพื้นที่ของแผ่นตัวนำโลหะ (A) และระยะห่างระหว่างแผ่นตัวนำโลหะ (d) ตามสมการที่ (4.13)

$$C \propto \frac{A}{d} \tag{4.13}$$

ดังนั้นจะได้ค่าความจุไฟฟ้า $$C = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{4.14}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 แผ่นตัวนำโลหะมีพื้นที่เท่ากับ 3 cm^2 วางห่างกัน 0.15 cm โดยใช้กระดาษเป็นฉนวน จงคำนวณหาค่าความจุไฟฟ้าและถ้าจ่ายแรงดันให้ตัวประจุ 24V จงหาค่าประจุที่เก็บไว้

วิธีทำ จากสมการที่ (4.14) $C = \varepsilon \frac{A}{d}$

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

แทนค่าจะได้ $$C = (3.5) \times \left(8.85 \times 10^{-12}\right) \times \frac{3 \times 10^{-4}}{0.15 \times 10^{-2}}$$

$$C = 6.195 \times 10^{-12} F$$

$$C = 6.195 \ pF$$

และจากสมการที่ (4.10) $Q = CV$

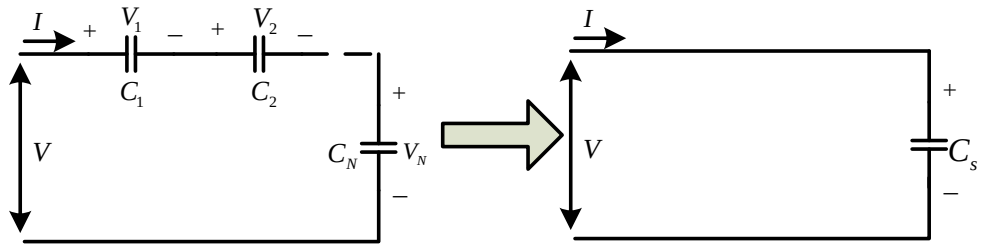
แทนค่าจะได้ $$Q = \left(6.195 \times 10^{-12}\right) \times 24$$

$$Q = 148.68 \times 10^{-12} \ C$$

ดังนั้นจะได้ $Q = 148.68 \ pC$

4.2.1 การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบอนุกรม

พิจารณาวงจรดังภาพที่ 4.7 ที่มีตัวเก็บประจุไฟฟ้าจำนวน N ตัวต่ออนุกรมกัน และอาศัยกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ (KVL) สามารถหาค่าความจุรวมได้ตามลำดับดังนี้



ภาพที่ 4.7 การต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรม

จากกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_N$$

จากสมการที่ 4.10 $Q = CV$ แทนค่าจะได้ว่า

$$\frac{Q}{C_s} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + ... + \frac{Q}{C_N}$$ (Q เทียบได้กับกระแสที่ไหลในวงจร)

$$\frac{Q}{C_s} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N}\right)$$

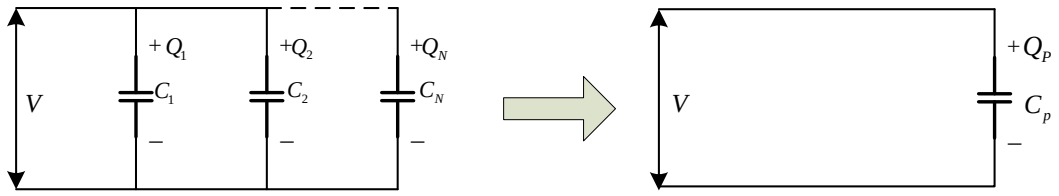
หาร Q ตลอดทั้งสมการจะได้

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N} = \sum_{N=1}^{M} \frac{1}{C_N} \qquad (4.15)$$

จากสมการที่ (4.15) จะเห็นว่าถ้านำค่าความจุไฟฟ้าต่ออนุกรม จะได้ค่าความจุไฟฟ้ารวมลดลง

4.2.2 การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบขนาน

เมื่อนำตัวเก็บประจุไฟฟ้าจำนวน N ตัวมาต่อขนานกันดังภาพที่ 4.8 ความจุไฟฟ้ารวมจะได้ค่าออกมาตามสมการที่พิสูจน์ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4.8 การต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบขนาน

เมื่อ Q เทียบได้กับกระแสที่ไหลในวงจรดังนั้นในวงจรขนานจะได้ว่า

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + ... + Q_N$$

และจากสมการที่ (4.10) $Q = CV$ แทนค่าจะได้ว่า

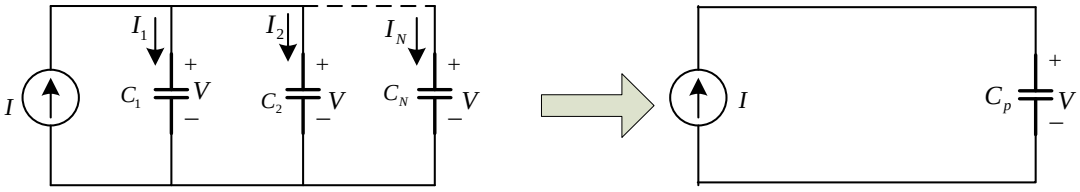
$$C_p V = C_1 V + C_1 V + ... + C_N V$$

$$C_p V = V\left(C_1 + C_1 + ... + C_N\right)$$

หารด้วย V ตลอดทั้งสมการจะได้ว่า

$$C_p = C_1 + C_1 + ... + C_N = \sum_{N=1}^{M} C_N \qquad (4.16)$$

หรือจะพิสูจน์ตามหลักการของสมการดิฟเฟอเรนเชียลตามลำดับดังนี้



จากกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์จะได้ว่า

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_N$$

แทนค่าจะได้ $$I = C_1 \frac{dV}{dt} + C_2 \frac{dV}{dt} + ... + C_N \frac{dV}{dt}$$

$$I = \left(C_1 + C_2 + ... + C_N\right) \frac{dV}{dt}$$

$$I = \left(\sum_{N=1}^{M} C_N \right) \frac{dV}{dt}$$

ดังนั้นจะได้ $$I = C_p \frac{dV}{dt}$$

ตัวอย่างที่ 4.6 ตัวเก็บประจุมีค่าความจุไฟฟ้า $12\,\mu F$ ได้รับการประจุไฟฟ้าพิกัด $480\,\mu C$ จงคำนวณหาค่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ

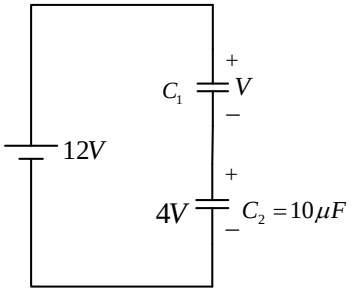
วิธีทำ จากสมการที่ (4.10) $Q = CV$

แทนค่าจะได้ $$V = \frac{Q}{C} = \frac{480 \times 10^{-6}}{12 \times 10^{-6}}$$

$$V = 40\ V$$

ดังนั้นแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุคือ $40\ V$

ตัวอย่างที่ 4.7 ตัวเก็บประจุที่ต่ออนุกรมกันดังภาพที่ 4.9 จงคำนวณหาค่าความจุไฟฟ้า C_1



ภาพที่ 4.9 วงจรสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 4.7

วิธีทำ วงจรดังภาพ จะได้ค่าแรงดันตกคร่อม C_1 ดังนี้

$$V_{C_1} = 12 - 4$$

$$V_{C_1} = 8V$$

และค่าประจุไฟฟ้าที่ C_2 กำหนดให้เป็น Q_2

ดังนั้นค่าของ $Q_2 = 10 \times 10^{-6} \times 4$

$$Q_2 = 40 \times 10^{-6}$$

เมื่อต่อตัวเก็บประจุแบบอนุกรมค่าของประจุไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากันดังนั้น

$$Q_2 = 40 \times 10^{-6} = Q_1$$

สามารถหาค่าตัวเก็บประจุไฟฟ้า C_1 ได้ดังนี้

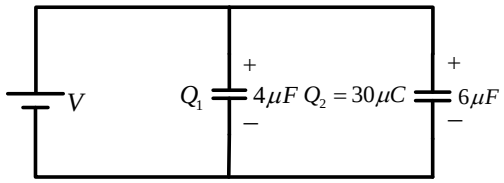
$$C_1 = \frac{Q_1}{V_{C_1}} = \frac{40 \times 10^{-6}}{8}$$

$$C_1 = 5 \times 10^{-6}$$

$$C_1 = 5\,\mu F$$

จะได้ค่าความจุไฟฟ้า C_1 คือ $5\,\mu F$

ตัวอย่างที่ 4.8 ตัวเก็บประจุที่ต่อขนานกันดังภาพที่ 4.10 จงคำนวณหาค่าแรงดัน (V), ค่าประจุไฟฟ้า (Q_1) และค่าความจุไฟฟ้ารวม (C_p)



ภาพที่ 4.10 วงจรสำหรับการคำนวณตัวอย่างที่ 4.8

วิธีทำ จากสมการที่ (4.10) $Q = CV$

แทนค่าจะได้ $V = \frac{Q}{C} = \frac{30 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-6}}$

จะได้ค่า $V = 5V$

ดังนั้น $Q_1 = 4 \times 10^{-6} \times 5$

$$Q_1 = 20 \times 10^{-6} = 20\,\mu C$$

จะได้ค่า $Q_T = Q_1 + Q_2$

$$Q_T = 20 + 30$$

$$Q_T = 50\ \mu C$$

หาค่าความจุไฟฟ้ารวมได้

$$C_p = \frac{Q_T}{V}$$

แทนค่าจะได้ $$C_p = \frac{50\times10^{-6}}{5}$$

$$C_p = 10\times10^{-6}\ F = 10\ \mu F$$

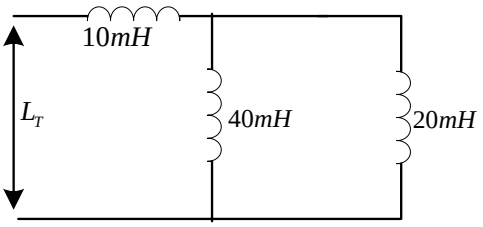
4.3 สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอโครงสร้างของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ หลักการทำงานของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุที่อยู่ในวงจรไฟฟ้ากระแสตรง การเชื่อมต่อในรูปแบบต่างๆ ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ และการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสตรงเมื่อโหลดเป็นตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ ทั้งนี้เพื่อเป็นพื้นฐานความเข้าใจเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับต่อไป

4.4 คำถามท้ายบท

1. ขดลวดตัวนำพันอยู่รอบแกนเหล็กจำนวน 100 รอบ ความยาว 25 mm แกนเหล็กมีค่า $\mu_r = 400\,H/m$ และมีพื้นที่หน้าตัด $1.3cm^2$ จงคำนวณหาค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดชุดนี้

2. จากวงจรดังภาพ จงคำนวณหาค่าความเหนี่ยวนำรวม (L_T)



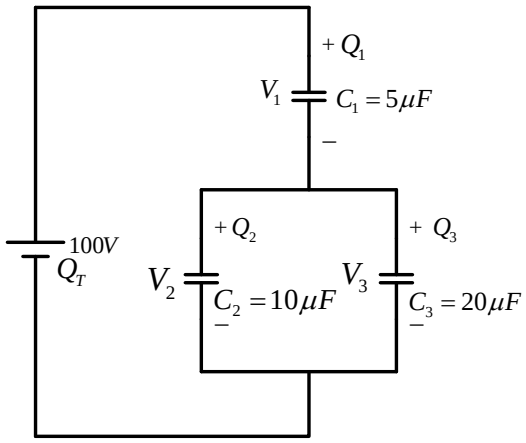
3. แผ่นเพลตวางขนานกันมีพื้นที่ $100cm^2$ ระยะห่างกัน $1mm$ จงคำนวณหาค่าความจุไฟฟ้าเมื่อมีตัวกลางอากาศต่างกันดังนี้

3.1) ตัวกลางอากาศ

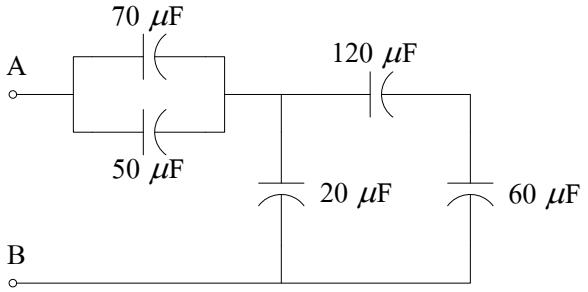
3.2) ตัวกลางกระดาษ

3.3) ตัวกลางไมกา

4. จากวงจร จงคำนวณหาค่าความจุไฟฟ้ารวม (C_T) การประจุไฟฟ้ารวม (Q_T) และแรงดันตกคร่อม $V_1,\ V_2,\ V_3$ และประจุไฟฟ้า $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$



5. ข้อใดถูกต้อง



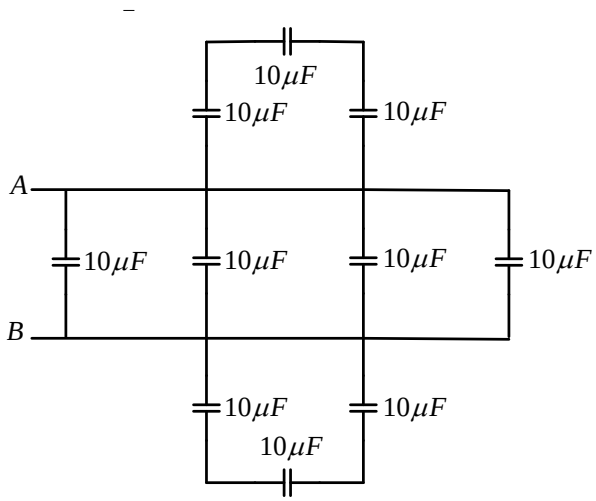
ก) 20 μF

ข) 40 μF

ค) 60 μF

ง) 220 μF

6. จงหาค่าความจุไฟฟ้ารวมระหว่างขั้ว A-B ของวงจรดังภาพ



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5
วงจรอันดับหนึ่ง

หัวข้อเนื้อหา

5.1 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL
5.2 คุณสมบัติผลตอบสนองของเอ็กโพเนนเชียล
5.3 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC
5.4 วงจร RL และ RC ในรูปแบบทั่วไป
    5.4.1 วงจร RL ในรูปแบบทั่วไป
    5.4.2 วงจร RC ในรูปแบบทั่วไป
5.5 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย
5.6 ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได
5.7 ผลตอบสนองของวงจร RC เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได
5.8 สรุป
5.9 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. พฤติกรรมและคุณสมบัติของการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL และ RC
2. การทำงานของวงจร RL และ RC ในรูปแบบทั่วไป
3. รูปแบบและพฤติกรรมของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย
4. พฤติกรรมของผลตอบสนองของวงจร RL และ RC เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย
1.2 แบบอภิปราย
1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง
1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่างๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 5

วงจรอันดับหนึ่ง

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์หาสมการแบบจำลองของวงจรตัวต้านทาน-ตัวเหนี่ยวนำ (*RL*) และวงจรตัวต้านทาน-ตัวเก็บประจุ (*RC*) เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จึงเรียกชื่อวงจรที่มีองค์ประกอบเป็น *RL* และ *RC* ว่า วงจรอันดับหนึ่ง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

วงจรอันดับหนึ่ง คือ วงจรที่สามารถอธิบายและเขียนสมการแบบจำลองได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ความสำคัญของวงจรอันดับหนึ่งคือ ค่ากระแสและแรงดันในสถานะชั่วครู่ อาจก่อให้เกิดความเสียหายต่อชีวิตและทรัพย์สิน โดยเฉพาะในวงจรที่มีระดับของค่ากระแสหรือแรงดันสูงมาก การวิเคราะห์หาผลเฉลยสำหรับกระแสและแรงดันในวงจร *RL* และ *RC* ด้วยเทคนิคการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง จึงเป็นกระบวนที่สำคัญมากสำหรับการออกแบบวงจรอิเล็กทรอนิกส์ ระบบไฟฟ้าและระบบป้องกันระบบไฟฟ้า ให้มีสมรรถนะดีที่สุด และมีความปลอดภัยมากที่สุดเมื่อมีการใช้งาน

วงจรอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราจะนิยามว่าวงจรอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือวงจรที่มีสามารถอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (a first-order differential equation) ลักษณะของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเป็นดังนี้

$$\frac{dy}{dt} + Py = Q \tag{5.1}$$

เมื่อ y คือ ผลตอบสนองของวงจร (แรงดันหรือกระแส)

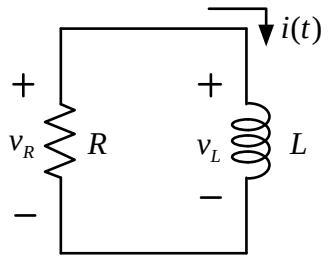
P และ Q คือ ฟังก์ชันใดๆ

5.1 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL

การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร *RL* จะเริ่มต้นพิจารณาวงจรในภาพที่ 5.1 โดยสมมติว่าตัวเหนี่ยวนำมีพลังงานละสมอยู่แล้ว ค่าเริ่มต้นของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำที่เวลา $t = t_0$ เขียนได้ดังสมการที่ (5.2)

$$i(t_0) = I_0 \tag{5.2}$$

เมื่อ I_0 คือ ค่าเริ่มต้นของกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานของวงจรที่เวลา $t = 0$ s.



ภาพที่ 5.1 วงจร *RL*

จากวงจรภาพที่ 5.1 ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์เขียนสมการได้ดังนี้

$$v_L + v_R = 0 \tag{5.3}$$

ทราบว่า $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ และจากกฎของโอห์ม $v_R = Ri$ ดังนั้นสมการที่ (5.3) เขียนได้ใหม่เป็น

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{5.4}$$

จากสมการที่ (5.4) สามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ โดยจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{5.5}$$

อินทิเกรทสมการที่ (5.5) ทั้งสองข้างเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{1}{i}di = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln i\Big|_{i(0)=I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln i(t) - \ln I_0 = -\frac{R}{L}t$$

$$\ln\frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L}t$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{5.6}$$

สมการที่ (5.6) คือ ค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ โดยมีค่าเริ่มต้นเท่ากับ I_0 การตรวจสอบความถูกต้องสำหรับสมการที่ (5.6) สามารถทำได้สองวิธีคือ วิธีแรกนำค่ากระแส $i(t)$ ในสมการที่ (5.6) ไปแทนค่าในสมการที่ (5.4) จะต้องทำให้สมการที่ (5.4) เป็นจริง ซึ่งก็คือมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$L\left(-\frac{R}{L}\right)\left(I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\right) + RI_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 0$$

วิธีที่สอง ทำการแทนค่า $t = 0$ ในสมการที่ (5.6) ทำให้

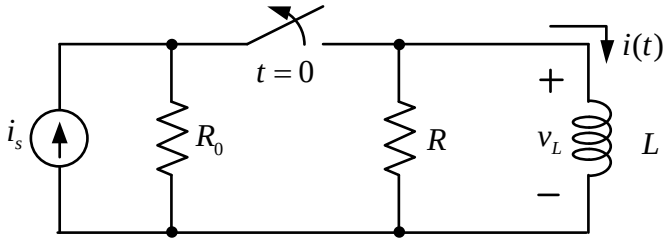
$$i(t = 0) = I_0 e^{-0} = I_0$$

ซึ่งค่า $i(0) = I_0$ เป็นค่าที่สมมุติขึ้นในสมการที่ (5.6) ตรวจสอบค่า $i(t)$ จะต้องสอดคล้องกับสองวิธีที่ได้นำเสนอนี้ เพื่อยืนยันว่าค่า $i(t)$ ในสมการที่ (5.6) นั้นถูกต้อง

จากสมการที่ (5.6) ค่ากระแส $i(t)$ คือผลตอบสนองตามธรรมชาติของวงจร RL เมื่อมีค่าเริ่มต้นเท่ากับ I_0 จะมีค่าลดลงในลักษณะฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น การหาค่าเริ่มต้น I_0 เป็นสิ่งจำเป็นในการหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL การหาค่า I_0 สามารถพิจารณาได้จากวงจรในภาพที่ 5.2

สมมุติให้แหล่งกำเนิดกระแสอิสระจ่ายค่ากระแสคงที่เท่ากับ i_s A ให้กับวงจร โดยที่สวิตช์อยู่ในตำแหน่งปิดเป็นเวลานาน ($t < 0$) เมื่อในวงจรมีค่ากระแสคงที่ ส่งผลให้กระแสและแรงดันทุกจุดของวงจรมีค่าคงที่ด้วย

ทราบว่า $v_L = L di/dt$ เมื่อกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำมีค่าคงที่ (สวิตช์ปิดเป็นเวลานาน) ทำให้ $v_L = 0$ V หรือหมายถึงตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร



ภาพที่ 5.2 กระแสสะสมพลังงานของวงจร RL

ดังนั้นจากภาพที่ 5.2 เมื่อตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร กระแส i_s A ทั้งหมดจะไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ กระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำในช่วงเวลาที่ $t < 0$ หรือช่วงเวลาที่สวิตช์ปิดเป็นเวลานาน มีค่าดังสมการที่ (5.7)

$$i(t < 0) = i_s \tag{5.7}$$

ทราบว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันทีทันใด ดังนั้นค่ากระแสช่วงเวลาทันทีทันใดก่อนที่สวิตช์จะถูกเปิดเพียงเล็กน้อย ($t = 0^-$) และค่ากระแสช่วงเวลาทันทีทันใดหลังสวิตช์ถูกเปิดเพียงเล็กน้อย ($t = 0^+$) แสดงได้ดังสมการที่ (5.8)

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I_0 \tag{5.8}$$

ค่ากระแส I_0 ในสมการที่ (5.8) คือ ค่ากระแสเริ่มต้นนั่นเอง

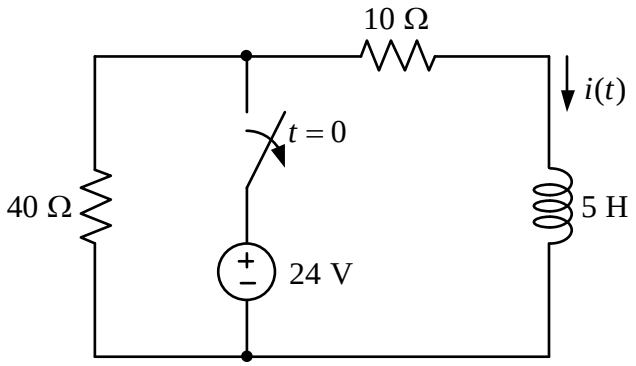
การหาผลตอบสนองตามธรรมชาติของวงจร RL จะสามารถหาค่ากระแส $i(t)$ ที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ในช่วงที่ตัวเหนี่ยวนำปล่อยพลังงานไปที่ตัวต้านทานของวงจร ถ้าพิจารณาวงจรในภาพที่ 5.2 ก็อาจหมายถึงพิจารณาวงจรช่วงสวิตช์เปิดนั่นเองคือ การหาค่า $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$ การหาค่า $i(t)$ สำหรับช่วงเวลานี้ ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้แล้วดังสมการที่ (5.6)

แนวคิด: การวิเคราะห์วงจรเพื่อหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL สามารถดำเนินการได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าเริ่มต้นของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ (หาค่า I_0)

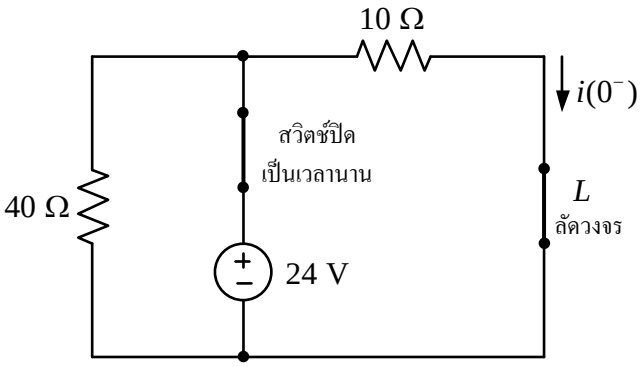
ขั้นตอนที่ 2 หาค่า RL จากนั้น $i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$

ตัวอย่าง 5.1 จากวงจรดังภาพที่ 5.3 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H ที่เวลา $t = 200$ ms.



ภาพที่ 5.3 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.1

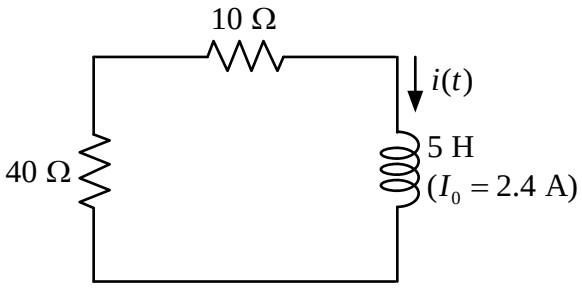
วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 หาค่า I_0 โดยพิจารณาวงจรที่ช่วงเวลา $t < 0$ (สวิตช์ปิดเป็นเวลานาน) ซึ่งเป็นช่วงเวลาที่มีการละสมพลังงานของตัวเหนี่ยวนำจากแหล่งกำเนิดแรงดันกระแสตรง 24 V วงจรในภาพที่ 5.3 ที่เวลา $t < 0$ แสดงได้ดังนี้



จากวงจรเมื่อเวลาผ่านไปนานๆ ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร และเนื่องจากค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันทีทันได ดังนั้น

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I_0 = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ A}$$

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาวงจรดังภาพที่ 5.3 ที่เวลา $t > 0$ จะได้วงจรดังนี้



จากวงจรที่เวลา $t > 0$ ค่า $R/L = 50/5 = 10\ \text{s}^{-1}$ ดังนั้นผลตอบสนองตามธรรมชาติของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ 5 H เขียนได้ดังสมการ $i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = 2.4e^{-10t}$ A ดังนั้นที่เวลา $t = 200$ ms. จะได้ค่า $i(t = 200\ \text{ms.}) = 2.4e^{-10(200\times10^{-3})} = 0.3248$ A

(ข้อสังเกต: ค่า $i(t)$ ในช่วงเวลาที่ $t > 0$ ถูกเรียกว่าผลตอบสนองทางธรรมชาติ เนื่องจากช่วงเวลาดังกล่าวเป็นช่วงเวลาที่ตัวเหนี่ยวนำปล่อยพลังงานละสมไปยังตัวต้านทานในวงจร)

ถ้าเวลาผ่านไปนาน ๆ กระแส $i(t)$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนเท่ากับศูนย์ เนื่องจากพลังงานที่สะสมในตัวเหนี่ยวนำได้ถูกจ่ายออกจนหมด

5.2 คุณสมบัติของผลตอบสนองเอ็กโพเนนเชียล

จากหัวข้อผลตอบสนองตามธรรมชาติของกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำในวงจร RL แสดงได้ดังสมการที่ (5.6) คือ $i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ โดยที่เวลา $t = 0$ กระแสมีค่าเป็น $i(t = 0) = I_0$ และเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นกระแส $i(t)$ จะมีค่าลดลง การลดลงของกระแสจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล จากสมการที่ (5.6) ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปร t คือ ค่า R/L ซึ่งเป็นค่าที่กำหนดอัตราการลดลงของกระแส ส่วนกลับของสัมประสิทธิ์นี้มีชื่อเรียกว่า ค่าคงตัวทางเวลา (τ : time constant) ของวงจรแสดงได้ดังสมการที่ (5.9)

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{5.9}$$

เมื่อพิจารณาค่า τ ในสมการที่ (5.9) และสมการที่ (5.6) เขียนให้อยู่ในรูปของ τ ได้เป็น

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.10}$$

จากสมการที่ (5.10) ลองแทนค่า $t = \tau$ ถึง $t = 5\tau$ จะได้ค่า $i(t)$ ดังนี้

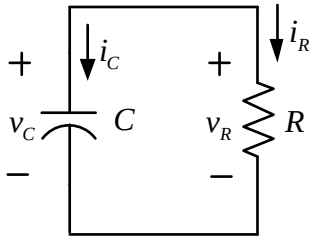
$$i(t = \tau) = 0.3679 I_0$$
$$i(t = 2\tau) = 0.1353 I_0$$

$$i(t=3\tau)=0.0498I_0$$
$$i(t=4\tau)=0.0183I_0$$
$$i(t=4\tau)=0.0067I_0$$

จากค่าดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า กระแสที่เวลา t เป็นห้าเท่าของค่าคงตัวทางเวลามีค่าลดลงเป็นอย่างมาก เมื่อเทียบกับค่ากระแสเริ่มต้น I_0 (น้อยกว่า 1%) ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่ากระแส $i(t)$ จะมีค่าลดลงเป็นศูนย์เมื่อเวลาผ่านไปเป็นห้าเท่าของค่าคงตัวของวงจร

5.3 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC

การวิเคราะห์หาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร *RC* จะมีลักษณะคล้ายคลึงกับวงจร RL โดยเริ่มต้นพิจารณาจากภาพที่ 5.4



ภาพที่ 5.4 วงจร *RC*

จากภาพที่ 5.4 โดยสมมติว่าตัวเก็บประจุมีพลังงานสะสมอยู่แล้ว ค่าเริ่มต้นของแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ เขียนได้ดังสมการที่ (5.11)

$$v(0)=V_0 \tag{5.11}$$

เมื่อ V_0 คือ ค่าเริ่มต้นของแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ

จากวงจรดังภาพที่ 5.4 ใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ที่โนดด้านบนของวงจร เขียนสมการได้ดังนี้

$$-i_C-i_R=0 \text{ หรือ } i_C+i_R=0 \tag{5.12}$$

ทราบว่า $i_C=C\dfrac{dv}{dt}$ และจากกฎของโอห์ม $i_R=\dfrac{v}{R}$ ดังนั้นสมการที่ (5.12) เขียนได้ใหม่เป็น

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=0 \tag{5.13}$$

นำ C หารตลอดสมการที่ (5.13) ได้เป็น

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=0 \tag{5.14}$$

จากสมการที่ (5.13) จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{dv}{v}+=-\frac{1}{RC}dt \tag{5.15}$$

เปรียบเทียบสมการที่ (5.15) และสมการที่ (5.4) ของวงจร RL สามารถเขียนสมการหาค่าแรงดัน $v(t)$ ที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุได้ดังนี้

$$v(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5.16}$$

เมื่อ V_0 คือ ค่าเริ่มต้นของแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $t=0$ จากสมการที่ (5.16) สามารถกำหนดค่าคงตัวทางเวลาสำหรับวงจร RC ได้ดังนี้

$$\tau=RC \tag{5.17}$$

ดังนั้นสมการที่ (5.16) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$v(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.18}$$

การคำนวณหาค่า V_0 ดำเนินการเช่นเดียวกับการคำนวณค่า I_0 โดยทราบว่าแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ทันทีทันใด ดังนั้น

$$v(0^-)=v(0^+)=v(0)=V_0 \tag{5.19}$$

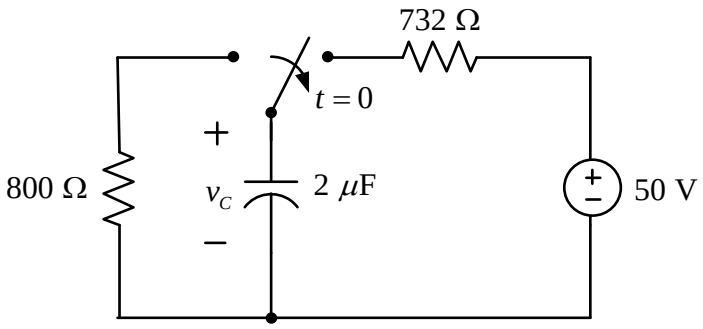
แนวคิด: การวิเคราะห์วงจรเพื่อหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC สามารถดำเนินการได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าเริ่มต้นของแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ (หาค่า V_0)

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าคงตัวทางเวลา โดย $\tau=RC$ สำหรับวงจร RC

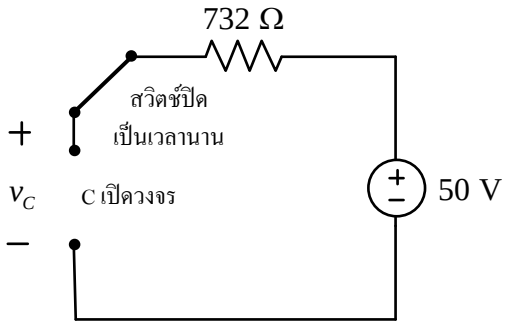
ขั้นตอนที่ 3 ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RC คือ $v(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}$

ตัวอย่าง 5.2 จากวงจรดังภาพที่ 5.5 จงคำนวณหาแรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุที่เวลา $t = 2$ ms.



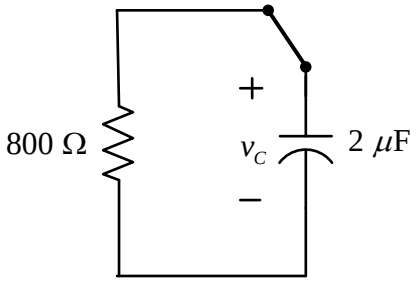
ภาพที่ 5.5 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.2

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 คำนวณหาค่า V_0 โดยพิจารณาวงจรที่ช่วงเวลา $t < 0$ (สวิตช์ปิดเป็นเวลานาน) ดังนี้



จากวงจรเมื่อเวลาผ่านไปนาน ตัวเก็บประจุจะเปิดวงจร (ในหัวข้อที่ผ่านมาถ้าเป็นตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร) ดังนั้นจากวงจรค่า $v(0^-) = v(0^+) = v(0) = V_0 = 50$ V

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่าคงตัวทางเวลา จากวงจรที่เวลา $t > 0$ ดังนี้



จากวงจร $\tau = RC = 800 \times 2 \times 10^{-6} = 0.0016$ s.

ขั้นตอนที่ 3 ผลตอบสนองตามธรรมชาติของของแรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ คือ $v(t) = 50e^{-\frac{t}{0.0016}} = 50e^{-625t}$ V เมื่อ $t > 0$ ดังนั้น $v(t = 2\text{ ms.}) = 50e^{-625 \times 2 \times 10^{-3}} = 14.325$ V ค่าดังกล่าวหมายถึงที่เวลา $t = 0$ แรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุมีค่า 50 V ซึ่งได้จากการสะสมพลังงานใน

ช่วงเวลา $t < 0$ แต่เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นแรงดันจะมีค่าลดลงแบบเอ็กโพเนนเชียล โดยที่แรงดันจะลดลงจาก 50 V เป็น 14.325 V ที่เวลา $t = 2$ ms. และถ้าปล่อยให้เวลาผ่านไปนานๆ แรงดันที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์

5.4 วงจร RL และ RC ในรูปทั่วไป

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้นำเสนอการวิเคราะห์วงจรเพื่อหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL ที่มีการต่ออนุกรมกันระหว่างตัวต้านทานและตัวเหนี่ยวนำ ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวงจร RL ในรูปแบบทั่วไป โดยวงจรอาจประกอบด้วยตัวต้านทานหลายตัวต่อกับตัวเหนี่ยวนำเพียงตัวเดียว เช่นเดียวกับวงจร RC ซึ่งอาจประกอบไปด้วยตัวต้านทานหลายตัวต่อกับตัวเก็บประจุเพียงตัวเดียว

แนวคิด: การวิเคราะห์วงจรที่มีตัวต้านทานหลายตัวต่อกับตัวเหนี่ยวนำหรือตัวเก็บประจุเพียงตัวเดียว สามารถดำเนินการได้ดังนี้

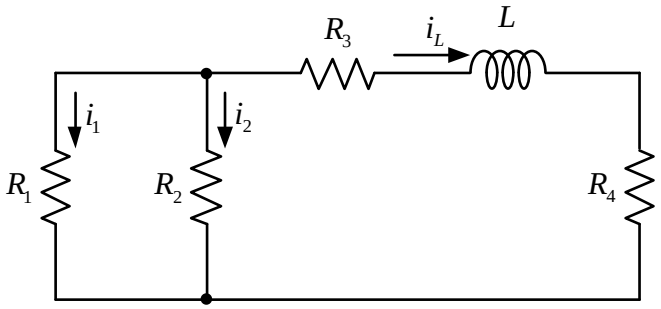
ขั้นตอนที่ 1 ปลดตัวเหนี่ยวนำหรือตัวเก็บประจุออกจากวงจร

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่าความต้านทานสมมูล R_{eq} เช่นเดียวกับวิธีการหา R_{TH} ที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อเรื่องทฤษฎีบทเทวินิน

ขั้นตอนที่ 3 การคำนวณหาผลการตอบสนองทางธรรมชาติจะมีลักษณะการดำเนินการเช่นเดียวกับวงจร RL และวงจร RC ที่ได้นำเสนอไปแล้วในหัวข้อที่ 1 และ 3 ตามลำดับ เพียงแต่เปลี่ยนค่า R ในสมการเป็น R_{eq} ที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 2

5.4.1 วงจร RL ในรูปแบบทั่วไป

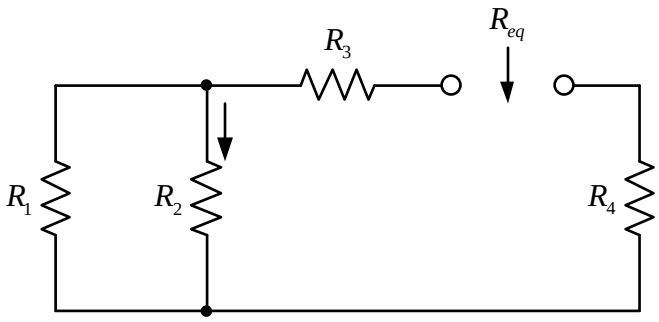
พิจารณาตัวอย่างวงจร RL ในรูปทั่วไป ดังภาพที่ 5.6



ภาพที่ 5.6 วงจร RL ในรูปแบบทั่วไป

การวิเคราะห์วงจรสามารถดำเนินการได้ดังนี้

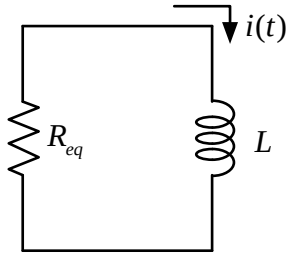
ขั้นตอนที่ 1 ปลดตัวเหนี่ยวนำออกจากวงจร วงจรในภาพที่ 5.6 เปลี่ยนเป็นดังนี้



ขั้นตอนที่ 2 เมื่อปลดตัวเหนี่ยวนำออกแล้ว คำนวณหาค่าความต้านทานสมมูลได้ดังนี้

$$R_{eq} = \left(R_1 \,||\, R_2\right) + R_3 + R_4 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4$$

ดังนั้นวงจรในภาพที่ 5.6 เปลี่ยนเป็นวงจรในรูปอย่างง่ายได้ดังต่อไปนี้



ขั้นตอนที่ 3 วงจรในภาพอย่างง่ายนี้ มีลักษณะเช่นเดียวกับวงจร RL ในหัวข้อที่ 5.1 เพียงแค่เปลี่ยนค่า R เป็น R_{eq} ดังนั้นการวิเคราะห์หาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร จะดำเนินการเช่นเดิม โดยที่ค่าคงที่ทางเวลาคือ

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \tag{5.20}$$

และกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำคือ

$$i(t) = i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{5.21}$$

การคำนวณค่าเริ่มต้นของกระแส i_L จะมีการคำนวณเหมือนเดิม โดยอาศัยความเข้าใจที่ว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด

ดังนั้น $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = I_0$ จากวงจรในภาพที่ 5.6 นอกจากค่า i_L สามารถหากระแสและแรงดันที่ส่วนอื่น ๆ ของวงจรได้เช่น กระแสที่ไหลผ่าน R_2 (i_2) เป็นต้น ก่อนที่จะคำนวณหาค่า i_2 ต้องทำความเข้าใจก่อนว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทานจะมีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด ซึ่งต่างจากกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ ดังนั้น $i_R(0^-) \neq i_R(0^+)$ ค่าเริ่มต้นของ i_2 สำหรับผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรจะได้ค่า $i_2(0^+)$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก $i_L(0^+)$ หรืออาจกล่าว

อีกนัยหนึ่งคือ ค่า $i_2(0^+)$ สามารถคำนวณได้จาก $i_L(0^-)$ การคำนวณหาค่ากระแส $i_2(0^+)$ สำหรับวงจรภาพที่ 5.6 ดำเนินการได้โดยอาศัยกฎการแบ่งกระแสดังนี้

$$i_2(0^+) = -i_L(0^+)\frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{5.22}$$

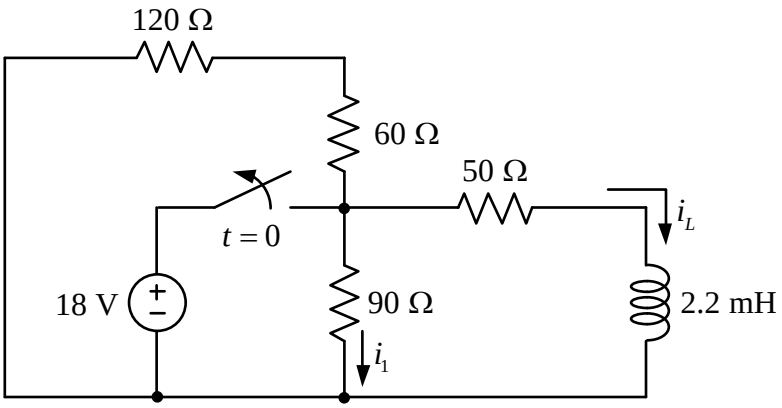
จากนั้นผลตอบสนองทางธรรมชาติของกระแส i_2 คือ $i_2(t) = i_2(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$ ซึ่งค่าคงตัวทางเวลา τ สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (5.20)

แนวคิด: พิจารณาค่าเริ่มต้นที่เวลา 0^+ และ 0^- สำหรับ

ตัวเหนี่ยวนำ: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = I_0$

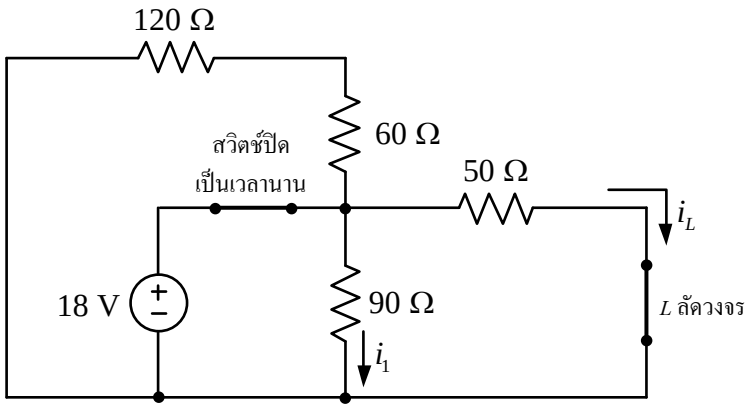
ตัวต้านทาน: $i_R(0^-) \neq i_R(0^+)$

ตัวอย่าง 5.3 จากวงจรภาพที่ 5.7 จงคำนวณหา i_1 และ i_L ที่เวลา $t > 0$



ภาพที่ 5.7 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.3

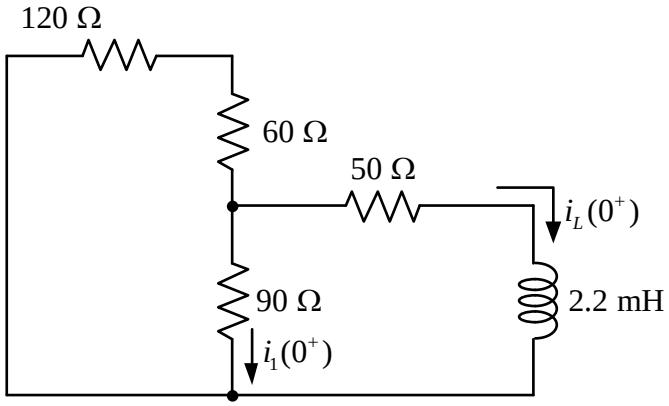
วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาวงจรที่เวลา $t < 0$ (สวิตช์ปิดเป็นเวลานาน) เพื่อหาค่าเริ่มต้น $i_L(0^-)$ และ $i_1(0^-)$ ดังนี้



จากวงจรเมื่อสวิตช์ปิดเป็นเวลานาน ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร ค่า $i_L(0^-)$ และ $i_1(0^-)$ คำนวณได้ดังนี้

$$i_L(0^-)=\frac{18}{50}=360\text{ mA}\quad\text{และ}\quad i_1(0^-)=\frac{18}{90}=200\text{ mA}$$

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาวงจรที่เวลา $t>0$ เพื่อหาค่าคงตัวทางเวลาของวงจร ดังนี้



การหาค่า R_{eq} กระทำได้โดยการปลดตัวเหนี่ยวนำ 2.2 mH ออกจากวงจร ซึ่งค่า R_{eq} คำนวณได้ดังนี้

$$R_{eq}=\left[(120+60)\,||\,90\right]+50=110\ \Omega$$

ดังนั้น

$$\tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{2.2\times10^{-3}}{110}=20\ \mu\text{s}.$$

ขั้นตอนที่ 3 ค่าเริ่มต้นของ $i_1(t)$ ซึ่งก็คือ ค่า $i_1(0^+)$ คำนวณได้จาก $i_L(0^+)$ โดยใช้กฎการแบ่งกระแส ดังนี้

$$i_1(0^+)=-i_L(0^+)\times\frac{180}{180+90}=-360\times\frac{180}{270}=-240\text{ mA}$$

สรุปคือ ค่าเริ่มต้นของ $i_L(t)$ มีค่าเท่ากับ $i_L(0^-)=i_L(0^+)=i_L(0)=360\text{ mA}$ และค่าเริ่มต้นของ $i_1(t)$ มีค่าเท่ากับ $i_1(0^+)=-240\text{ mA}$

ขั้นตอนที่ 4 ผลตอบสนองของวงจรสามารถแบ่งได้เป็นสองช่วง โดยช่วงแรกคือ ช่วงเวลาที่ $t<0$ $i_L(0^-)=360\text{ mA}$ และค่า $i_1(0^-)=200\text{ mA}$ และช่วงเวลาที่สองคือ ช่วงเวลาที่ $t>0$ ซึ่งก็คือช่วงเวลาที่ตัวเหนี่ยวนำปล่อยพลังงานสู่ตัวต้านทานในวงจร เรียกผลตอบสนองในช่วงเวลานี้ว่าผลตอบสนองทางธรรมชาติ ดังที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ ค่า $i_L(t)$ และ $i_1(t)$ แสดงได้ดังนี้

$$i_L(t)=i_L(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}=360e^{-50000t}\text{ mA},\ t>0\quad\text{และ}\quad i_1(t)=i_1(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}=-240e^{-50000t}\text{ mA},\ t>0$$

จากค่า $i_L(t)$ และ $i_1(t)$ ที่เวลา $t<0$ และ $t>0$ สามารถเขียนสรุปได้ดังนี้

$$i_L(t)=\begin{cases}360\text{ mA}, t<0\\ 360e^{-50000t}\text{ mA},\ t>0\end{cases}$$

และ

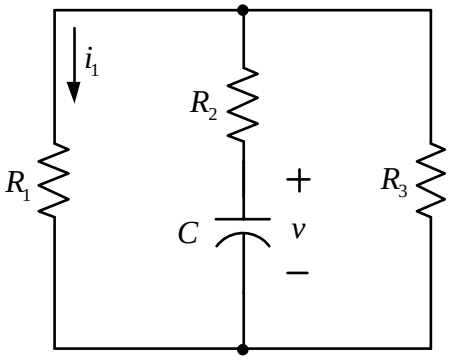
$$i_1(t) = \begin{cases} 200 \text{ mA}, t < 0 \\ -240e^{-50000t} \text{ mA}, \ t > 0 \end{cases}$$

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน R_1 จะมีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดในช่วงที่สวิตช์เปลี่ยนแปลงจากปิดเป็นเปิด (ช่วง 0^- เป็น 0^+) ในขณะที่กระแส $i_L(t)$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด จึงทำให้ $i_L(0^-) = i_L(0^+)$

5.4.2 วงจร RC ในรูปแบบทั่วไป

การวิเคราะห์วงจร RC ในรูปแบบทั่วไปจะดำเนินการเช่นเดียวกับวงจร RL โดยการปลดตัวเก็บประจุออก และคำนวณหาความต้านทานวงจรสมมูล R_{eq} จากนั้นทำการเปลี่ยนวงจรให้อยู่ในรูปวงจร RC อย่างง่าย และคำนวณผลตอบสนองทางธรรมชาติเช่นเดิม ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 5.3 เพียงเปลี่ยนค่า R เป็น R_{eq}

ตัวอย่าง 5.4 จากวงจรภาพที่ 5.8 คำนวณหา $v(0^+)$ และ $i(0^+)$ เมื่อกำหนดให้ $v(0^-) = V_0$

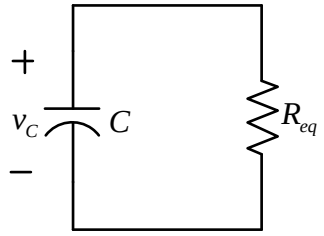


ภาพที่ 5.8 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.4

วิธีทำ ทำการปลดตัวเก็บประจุออกจากวงจรในภาพที่ 5.8 และคำนวณค่า R_{eq} ได้โดย

$$R_{eq} = (R_1 \,||\, R_3) + R_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2$$

จากนั้นวงจรภาพที่ 5.8 เปลี่ยนเป็นวงจร RC ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้



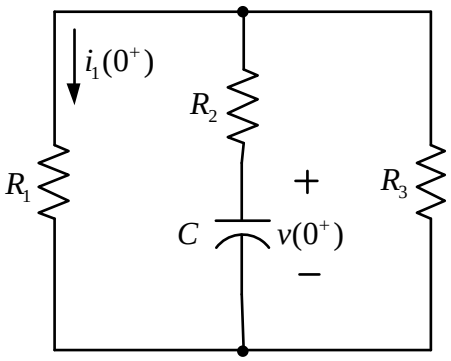
ซึ่งวงจร RC ในรูปอย่างง่ายนี้ สามารถคำนวณหาผลตอบสนองทางธรรมชาติได้โดย

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

เมื่อ

$$\tau = R_{eq}C = \left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2 \right) C \text{ และ } V_0 = v(0^-) = v(0^+)$$

การคำนวณหาค่า $i(0^+)$ จะคำนวณจาก $v(0^+)$ โดยอาศัยวงจรรูปที่ 5.8

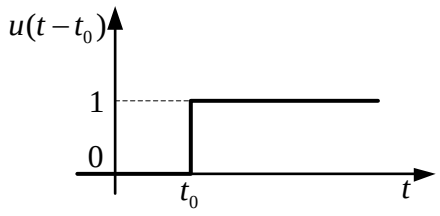


การคำนวณหาค่า $i(0^+)$ ทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะเลือกวิธีการวิเคราะห์แบบเมช ซึ่งจากการคำนวณจะได้

$$i(0^+) = \frac{v(0^+)R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$$

5.5 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่สามารถใช้แทนการทำงานของสวิตช์ในวงจรได้ ลักษณะฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยแสดงได้ดังภาพที่ 5.9

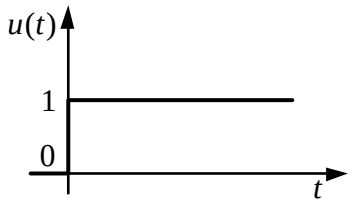


ภาพที่ 5.9 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

สมการทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย แสดงได้ดังสมการที่ (5.23)

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & ;t < t_0 \\ 1 & ;t > t_0 \end{cases} \tag{5.23}$$

จากสมการที่ (5.23) ค่าของฟังก์ชัน $u(t-t_0)$ มีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับทุกๆ ค่าของ t ที่มีค่าน้อยกว่า t_0 และมีค่าเท่ากับหนึ่งเมื่อ t มีค่ามากกว่า t_0 ในกรณีที่ $t_0 = 0$ จะได้กราฟของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยดังภาพที่ 5.10

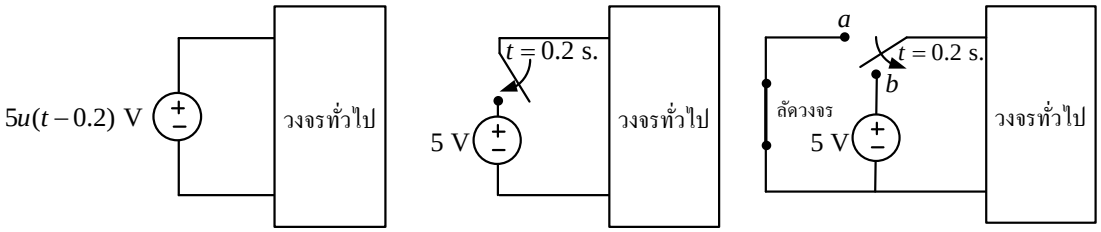


ภาพที่ 5.10 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย เมื่อ $t_0 = 0$

สมการคณิตศาสตร์สำหรับฟังก์ชัน $u(t)$ แสดงได้ดังสมการที่ (5.24)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ;t < 0 \\ 1 & ;t > 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

การแทนพฤติกรรมของสวิตช์ที่ต่อกับแหล่งกำเนิดแรงดันในวงจรด้วยฟังก์ชัน $u(t)$ ทำได้โดยการนำค่าแรงดันของแหล่งกำเนิดคูณกับฟังก์ชัน $u(t)$ เช่น $v(t) = 5u(t-0.2)$ V ซึ่งหมายถึงแหล่งกำเนิดแรงดันมีค่าเท่ากับศูนย์สำหรับทุก ๆ ค่าของ t ก่อนเวลา $t = 0.2$ s. และจะมีค่าแรงดันเท่ากับ 5 V หลังจากที่เวลา $t = 0.2$ s. ฟังก์ชันนี้แสดงได้วงจรในภาพที่ 5.11



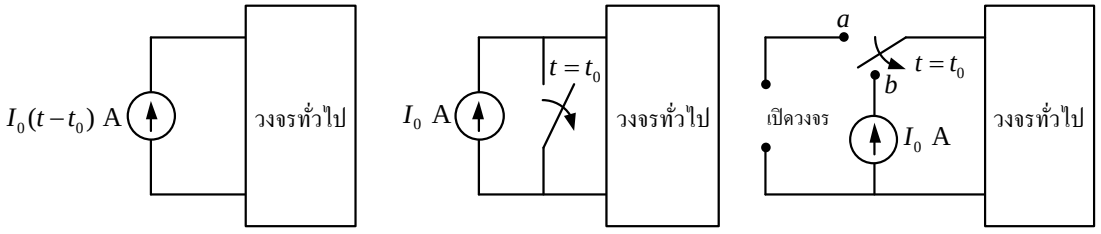
ก) ข) ค)

ภาพที่ 5.11 ฟังก์ชัน $u(t)$ แหล่งกำเนิดแรงดันกระแสตรง

จากภาพที่ 5.11 ก) สามารถแทนได้ด้วยแหล่งกำเนิดแรงดันต่ออนุกรมกับสวิตช์ ซึ่งสวิตช์นี้จะปิดที่เวลา $t = 0.2$ s. แสดงได้ดังภาพที่ 5.11 ข) แต่อย่างไรก็ตามภาพที่ 5.11 ข) อธิบายได้แค่ช่วงเวลาหลังจาก $t = 0.2$ s. นั่นคือ แหล่งกำเนิดแรงดัน 5 V ต่ออยู่กับวงจรทั่วไป ในขณะที่ช่วงเวลาก่อน $t = 0.2$ s. (สวิตช์เปิด) แรงดันที่ขั้วต่อกับวงจรทั่วไปอาจเป็นค่าเท่าใดก็ได้เพราะแหล่งกำเนิดแรงดัน 5 V เปิดวงจรอยู่ ไม่ได้ต่อกับวงจรทั่วไป ดังนั้นช่วงเวลาก่อน $t = 0.2$ s. นี้ภาพที่ 5.11 ข) ไม่สมมูลกับภาพที่ 5.11 ก) วงจรสมมูลที่ถูกต้องและสมมูลกับวงจรภาพที่ 5.11 ก) สำหรับทุกๆ ช่วงเวลาแสดงได้ดัง

ภาพที่ 5.11 ค) ที่เวลาก่อน $t = 0.2$ s. สวิตช์จะอยู่ที่จุด a ทำให้แรงดันมีค่าเท่ากับศูนย์ และที่เวลาหลังจาก $t = 0.2$ s. สวิตช์จะอยู่ที่จุด b เพื่อทำให้เกิดค่าแรงดัน 5 V ต่อกับวงจรทั่วไป

จากภาพที่ 5.11 แสดงให้เห็นว่าการทำงานของสวิตช์สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย ในบางครั้งอาจใช้ภาพที่ 5.11 ก) ได้ ถ้าค่าเริ่มต้นของวงจรทั้งสองที่เวลาก่อน $t = 0.2$ s. มีค่าเท่ากัน กรณีการนำฟังก์ชัน $u(t)$ มาใช้กับแหล่งกำเนิดกระแส แสดงได้ดังภาพที่ 5.12



ก) ข) ค)

ภาพที่ 5.12 ฟังก์ชัน $u(t)$ แหล่งกำเนิดกระแสตรง

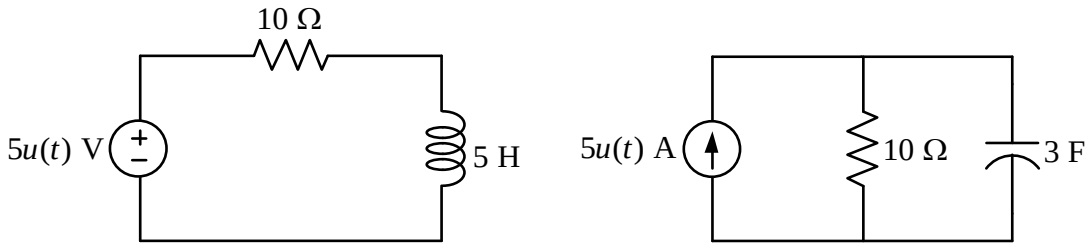
จากภาพที่ 5.12 ก) และภาพที่ 5.12 ข) จะสมมูลกันที่เวลาหลังจาก $t = t_0$ เท่านั้น ในขณะที่ภาพที่ 5.12 ค) จะสมมูลกับวงจรภาพที่ 5.12 ก) ในทุก ๆ ช่วงเวลา ในบางครั้งภาพที่ 5.12 ข) สามารถใช้แทนวงจรภาพที่ 5.12 ก) ได้ แต่ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ค่าเริ่มต้นของวงจรที่เวลาก่อน $t = t_0$ ต้องมีค่าเท่ากัน

แนวคิด: ฟังก์ชัน $u(t)$ ที่ใช้งานสำหรับ

แหล่งกำเนิดแรงดัน เช่น $V_s u(t)$: แหล่งกำเนิดแรงดันจะลัดวงจรที่เวลา $t < 0$

แหล่งกำเนิดกระแส เช่น $I_s u(t)$: แหล่งกำเนิดกระแสจะเปิดวงจรที่เวลา $t < 0$

ตัวอย่าง 5.5 จากวงจรภาพที่ 5.13 จงเขียนวงจรที่เวลา $t < 0$ และ $t > 0$

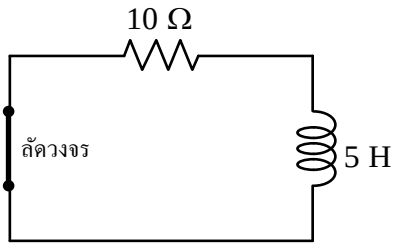


ก) ข)

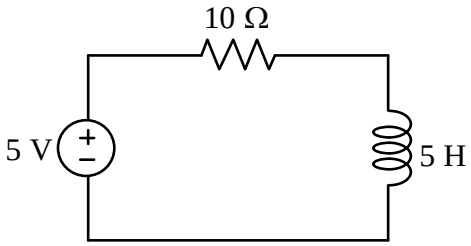
ภาพที่ 5.13 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.5

วิธีทำ สำหรับวงจรภาพที่ 5.13 ก)

วงจรที่ $t < 0$: $u(t) = 0$ ดังนั้น แหล่งจ่ายแรงดัน $5u(t)$ V $= 0$ V (ลัดวงจร) แสดงได้ดังนี้

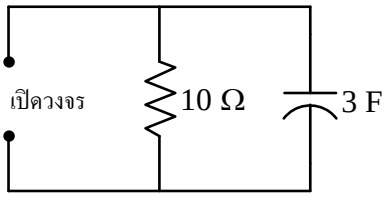


วงจรที่ $t > 0$: $u(t) = 1$ ดังนั้น แหล่งจ่ายแรงดัน $5u(t)\ \text{V} = 5\ \text{V}$ แสดงได้ดังนี้

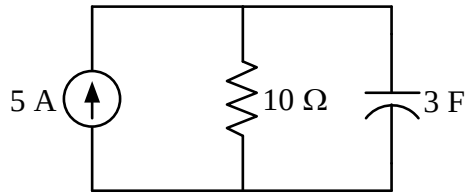


สำหรับวงจรรูปที่ 5.13 ข)

วงจรที่ $t < 0$: $u(t) = 0$ ดังนั้น แหล่งจ่ายกระแส $5u(t)\ \text{A} = 0\ \text{A}$ (เปิดวงจร) แสดงได้ดังนี้

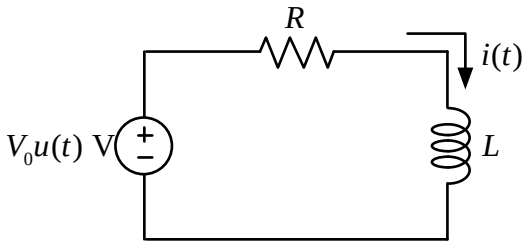


วงจรที่ $t > 0$: $u(t) = 1$ ดังนั้น แหล่งจ่ายกระแส $5u(t)\ \text{A} = 5\ \text{A}$ แสดงได้ดังนี้



5.6 ผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อแหล่งกำเนิดที่เชื่อมต่อกับวงจรมีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด หรืออาจหมายถึงแหล่งกำเนิดมีการต่อเข้ากับวงจรแบบทันทีทันใด การวิเคราะห์วงจรในหัวข้อนี้จะเริ่มต้นพิจารณาวงจร RL ดังภาพที่ 5.14



ภาพที่ 5.14 วงจร RL ที่เชื่อมต่อแหล่งกำเนิดแบบทันทีทันได

จากวงจรภาพที่ 5.14 แหล่งกำเนิดแรงดันจะเชื่อมต่อกับวงจรที่เวลา $t > 0$ แบบทันทีทันใด เมื่อประยุกต์ใช้กับกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์กับวงจรภาพที่ 5.14 เขียนสมการได้ดังนี้

$$Ri + L\frac{di}{dt} - V_0 u(t) = 0 \tag{5.25}$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชัน $u(t)$ ที่เวลา $t < 0$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ทำให้ช่วงเวลานี้ไม่มีแหล่งกำเนิดแรงดันต่อเข้ากับวงจร ดังนั้น

$$i(t) = 0 \text{ เมื่อ } t < 0 \tag{5.26}$$

สำหรับค่าเวลาที่เป็นบวก ฟังก์ชัน $u(t)$ มีค่าเท่าหนึ่ง ดังนั้นสมการที่ (5.25) เขียนได้ใหม่เป็น

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V_0 \text{ เมื่อ } t > 0 \tag{5.27}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{Ldi}{V_0 - Ri} = dt \tag{5.28}$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ (5.28) ทั้งสองข้างได้เป็น

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t + k \tag{5.29}$$

การคำนวณหาค่า k ในสมการที่ (5.29) จะอาศัยค่าเริ่มต้นของ $i(t)$ จากสมการที่ 5.26 ทราบว่าที่ก่อนเวลา $t = 0$ ค่า $i(0^-) = 0$ A และเนื่องจากกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำไม่สามารถเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด ดังนั้น $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 0$ A จากการกำหนดค่าเริ่มต้นดังกล่าวทำให้ค่าคงที่ k ในสมการที่ (5.29) คำนวณได้ดังสมการต่อไปนี้

$$k = -\frac{L}{R}\ln(V_0) \tag{5.30}$$

แทนค่า k จากสมการที่ (5.30) ลงในสมการที่ (5.29) ได้เป็น

$$-\frac{L}{R}\ln(V_0 - Ri) = t - \frac{L}{R}\ln(V_0)$$
$$-\frac{L}{R}\left[\ln(V_0 - Ri) - \ln(V_0)\right] = t$$
$$-\frac{L}{R}\left[\ln\left(\frac{V_0 - Ri}{V_0}\right)\right] = t$$
$$\ln\left(\frac{V_0 - Ri}{V_0}\right) = -\frac{Rt}{L}$$
$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-\frac{t}{\tau}},\ \tau = \frac{L}{R}$$

ดังนั้น

$$i(t) = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ สำหรับ } t > 0 \qquad (5.31)$$

จากสมการที่ (5.26) และสมการที่ (5.31) สามารถเขียนสมการ $i(t)$ สำหรับทุก ๆ ค่า t ได้ดังสมการที่ (5.32)

$$i(t) = \left(\frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) \qquad (5.32)$$

สมการที่ (5.32) เป็นสิ่งที่ต้องการในการวิเคราะห์หาผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงทันทีทันใดของแหล่งกำเนิดในวงจร แต่สมการที่ (5.32) เป็นสมการที่พิสูจน์จากวงจร RL อย่างง่ายไม่ซับซ้อน เพื่อความง่ายสำหรับการวิเคราะห์เบื้องต้น ในกรณีทั่วไปอาจพิจารณาสมการที่ (5.32) ว่าประกอบด้วยสองส่วนด้วยกัน ส่วนแรกคือ ส่วนของฟังชันเอ็กซ์โพเนนเชียลซึ่งอยู่ในรูปของผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RL โดยมีค่าคงตัวทางเวลา R/L และขนาดของฟังก์ชันขึ้นอยู่กับค่า V_0 ของแหล่งกำเนิด ส่วนที่สองคือ ค่าคงที่ V_0/R ค่าคงที่นี้เกิดจากการสวิตช์เปิดเป็นเวลานาน ($t \to \infty$) ทำให้ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร กระแสที่ไหลผ่านวงจร (ดูภาพที่ 5.14 ประกอบ) จะยังคงมีอยู่และมีค่าเท่ากับ V_0/R ค่านี้อาจเรียกว่า ค่าสุดท้าย (final value) หรือผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว (steady-state response) ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ผลตอบสนองของวงจร RL โดยทั่วไปประกอบด้วยผลตอบสนองสถานะอยู่ตัวกับผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร

แนวคิด การวิเคราะห์เพื่อหาผลตอบสนองของวงจร RL เมื่อได้รับอินพุตแบบขั้นบันได

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้ $i(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}},\ t > 0$

เมื่อ i_f คือ ผลตอบสนองสถานะอยู่ตัว

τ คือ ค่าคงตัวทางเวลาของวงจร RL ซึ่งมีค่าเท่ากับ R/L

A คือ ค่าคงที่

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนการเก็บข้อมูล

2.1) วงจรที่เวลา $t<0$ ($t=0^-$) (ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร)

คำนวณหาค่ากระแสตั้งต้นของตัวเหนี่ยวนำ และกำหนดให้

$$i(0^-)=i(0^+)=i(0)$$

2.2) วงจรที่เวลา $t>0$ แบ่งออกเป็นสองช่วงคือ $t=0^+$ และ $t\to\infty$

วงจรที่ $t=0^+$: คำนวณหาค่าคงตัวทางเวลาของวงจรโดยที่ $\tau=R/L$ และวงจรช่วงเวลานี้จะเป็นตัวบ่งบอกว่าวงจรมีผลตอบสนองเป็นแบบใด เช่น ถ้าวงจรไม่มีแหล่งกำเนิด ผลตอบสนองของวงจรจะมีแค่ผลตอบสนองทางธรรมชาติ แต่ถ้าวงจรมีแหล่งกำเนิดปรากฏอยู่ด้วย ผลตอบสนองของวงจรจะประกอบไปด้วยผลตอบสนองสถานะอยู่ตัวและผลตอบสนองทางธรรมชาติ

วงจรที่ $t\to\infty$: คำนวณค่ากระแสในสถานะอยู่ตัว โดย $i(\infty)=i_f$ ในช่วงเวลานี้ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร ค่ากระแสที่คำนวณได้คือ ผลตอบสนองสถานะอยู่ตัว ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของผลตอบสนองของวงจร เมื่อวงจรได้รับอินพุตแบบขั้นบันได

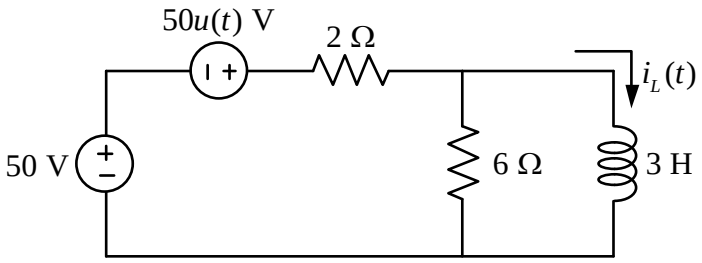
ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนการคำนวณ

3.1) ใช้สมการ $i(t)=i_f+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

3.2) คำนวณค่า A ของสมการจากค่า $i(0^-)=i(0^+)=i(0)$ ซึ่งได้จากขั้นตอนที่ 2.1

3.3) วาดกราฟและสรุปคำตอบที่คำนวณได้

ตัวอย่าง 5.6 จากวงจรภาพที่ 5.15 จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา t ใดๆ



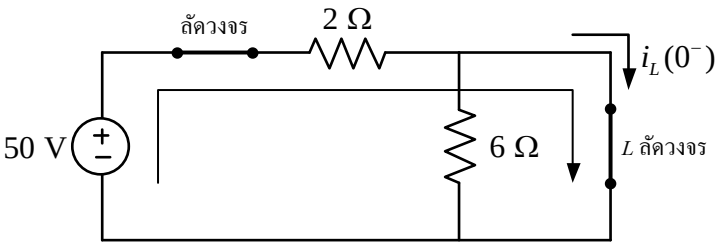
ภาพที่ 5.15 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.6

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: กำหนดให้ $i(t)=i_f+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

ขั้นตอนที่ 2: ขั้นตอนการเก็บข้อมูล

2.1) วงจรที่เวลา $t<0$ ($t=0^-$)

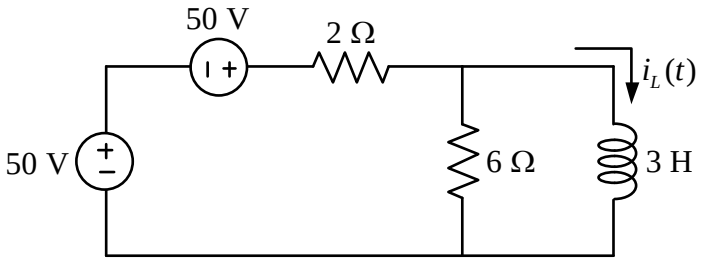
วงจรในช่วงเวลานี้ ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจร และฟังก์ชัน $u(t)$ จะเท่ากับศูนย์ ทำให้แหล่งกำเนิดแรงดัน $50u(t)$ V ลัดวงจร วงจรช่วงเวลานี้แสดงได้ดังภาพ



จากวงจร $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 50/2 = 25$ A

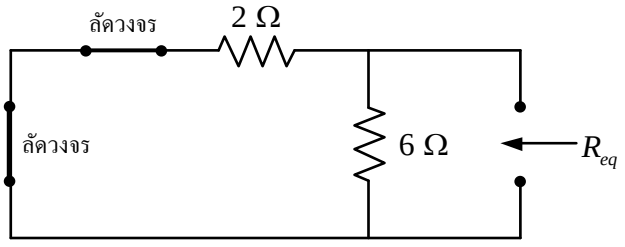
2.2) วงจรที่เวลา $t > 0$

วงจรที่ $t = 0^+$: ค่าฟังก์ชัน $u(t)$ จะเท่ากับหนึ่งทำให้แหล่งกำเนิดแรงดัน $50u(t)$ V วงจรที่ช่วงเวลานี้มีค่าเท่ากับ 50 V (แหล่งกำเนิดแรงดันนี้จะมาเชื่อมต่อกับวงจรแบบทันทีทันใด) แสดงได้ดังภาพที่ 5.16



ภาพที่ 5.16 แหล่งกำเนิดแรงดันเชื่อมต่อกับวงจรแบบทันทีทันใด

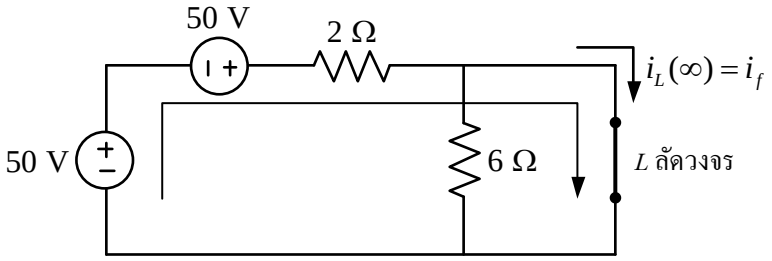
จากวงจรแสดงให้เห็นว่าเป็นวงจร RL ที่เชื่อมต่อกับแหล่งกำเนิด ดังนั้นผลตอบสนองของวงจรต้องประกอบไปด้วยผลตอบสนองสถานะอยู่ตัวและผลตอบสนองทางธรรมชาติดังที่ได้กำหนดไว้แล้วในขั้นตอนที่ 1 แต่ถ้าวงจรในช่วงเวลานี้ไม่ปรากฏแหล่งกำเนิด ผลตอบสนองของวงจรจะมีการคำนวณดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1 จากวงจรในช่วงเวลานี้คำนวณหาค่าคงตัวทางเวลาได้โดยการปลดตัวเหนี่ยวนำออกและหาค่า R_{eq} ด้วยการลัดวงจรที่แหล่งกำเนิดแรงดันทั้งสองตัวได้วงจรดังนี้



ค่า $R_{eq} = 2 \,||\, 6 = 12/8 = 3/2\ \Omega$

ค่า $\tau = L/R_{eq} = 3/3/2 = 2$ s.

วงจรที่ $t \to \infty$: ตัวเหนี่ยวนำจะลัดวงจรเช่นกัน ดังนั้นวงจรที่ช่วงเวลานี้จะมีลักษณะเหมือนกับวงจรที่ $t = 0^+$ เพียงแต่ตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร แสดงได้ดังภาพที่ 5.17



ภาพที่ 5.17 แหล่งกำเนิดแรงดันต่อเชื่อมกับวงจรเมื่อตัวเหนี่ยวนำลัดวงจร

จากวงจร $i_L(\infty) = i_f = \dfrac{100}{2} = 50 \text{ A}$

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนการคำนวณ

3.1) เขียนสมการได้เป็น

$i_L(t) = i_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 50 + Ae^{-\frac{t}{2}}$ (จากขั้นตอนที่ 2 ค่า $i_f = 50 \text{ A}$ และ $\tau = 2 \text{ s.}$)

3.2) คำนวณค่า A จากค่า $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 25 \text{ A}$ ดังนี้

$i_L(t=0) = 50 + A = 25$ ดังนั้น $A = -25$ นำไปแทนค่าในสมการ $i_L(t)$ ได้เป็น

$i_L(t) = 50 - 25e^{-\frac{t}{2}}$ ที่เวลา $t > 0$

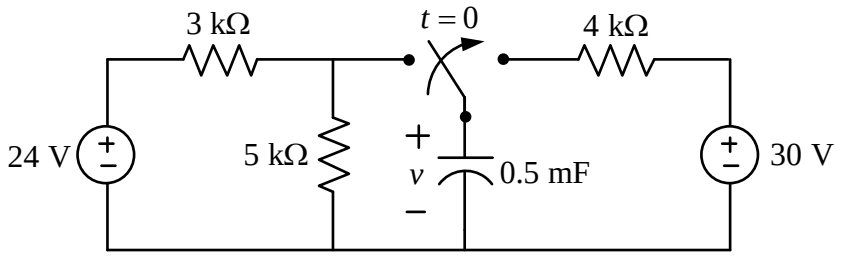
3.3) ค่า $i_L(t)$ ที่ช่วงเวลา t ใดๆ คือ

$$i_L(t) = \begin{cases} 25 \text{ A}, & t < 0 \\ 50 - 25e^{-\frac{t}{2}}, & t > 0 \end{cases}$$

5.7 ผลตอบสนองของวงจร RC เมื่อได้รับสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได

การวิเคราะห์หาผลตอบสนองของวงจร RC เมื่อได้รับอินพุตแบบขั้นบันได มีขั้นตอนการวิเคราะห์เช่นเดียวกับวงจร RL รายละเอียดการวิเคราะห์ศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.7 จากวงจรภาพที่ 5.18 จงคำนวณหา $v(t)$ ที่เวลา t ใดๆ และคำนวณหา $v(t)$ ที่เวลา t = 1 s. และ t = 4 s.

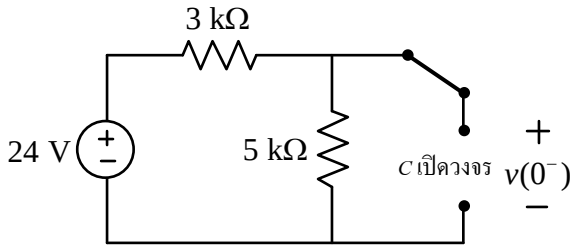


ภาพที่ 5.18 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 5.7

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: กำหนดให้ $v(t) = v_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

ขั้นตอนที่ 2: ขั้นตอนการเก็บข้อมูล

2.1) วงจรที่เวลา $t < 0$

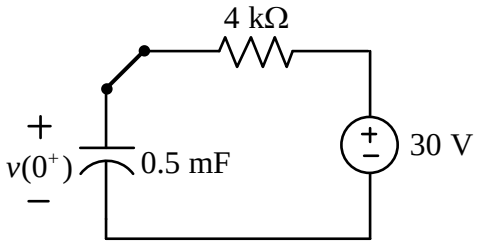


จากวงจรใช้กฎการแบ่งแรงดันได้ค่า

$$v_L(0^-) = \frac{24(5)\times 10^3}{(3+5)\times 10^3} = 15 \text{ V}$$

2.2) วงจรที่เวลา $t > 0$

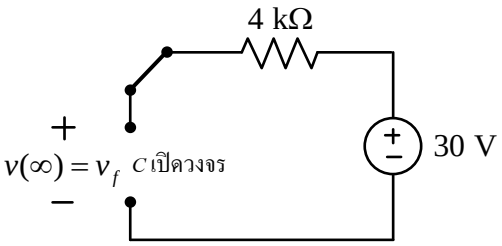
วงจรที่ $t = 0^+$:



การคำนวณค่า τ ทำได้โดยการลัดวงจรแหล่งกำเนิดแรงดัน 30 V

จากนั้น $\tau = RC = (4\times 10^3)(0.5\times 10^{-3}) = 2 \text{ s.}$

วงจรที่ $t \to \infty$:



จากวงจรในช่วงเวลานี้ $v(\infty) = v_f = 30 \text{ V}$

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนการคำนวณ

3.1) เขียนสมการได้เป็น

$$v(t) = v_f + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = 30 + Ae^{-0.5t}$$

3.2) คำนวณค่า A จากค่า $v(0^-) = v(0^+) = v(0) = 15\ \text{V}$ ดังนี้

$v(t=0) = 30 + A = 15$ ดังนั้น $A = -15$ นำไปแทนค่าในสมการ $v(t)$ ได้เป็น

$v(t) = 30 - 15e^{-0.5t}$ ที่เวลา $t > 0$

3.3) ค่า $v(t)$ ที่ช่วงเวลา t ใดๆ คือ

$$v(t) = \begin{cases} 15\ \text{V}, & t < 0 \\ 30 - 15e^{-0.5t}, & t > 0 \end{cases}$$

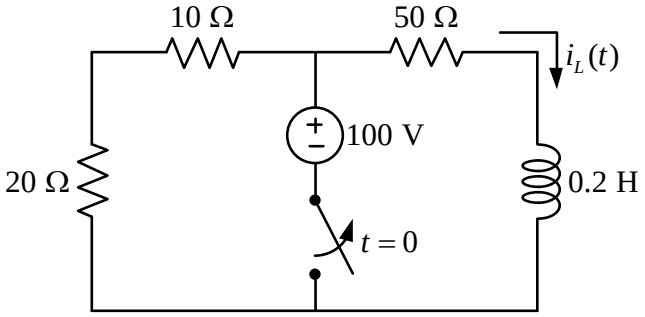
ดังนั้น $v(t = 1\ \text{s.}) = 30 - 15e^{-0.5} = 20.92\ \text{V}$ และ $v(t = 4\ \text{s.}) = 30 - 15e^{-0.5\times 4} = 27.97\ \text{V}$

5.8 สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอวงจรไฟฟ้าอันดับหนึ่งซึ่งเป็นพฤติกรรมของปริมาณทางไฟฟ้าที่เป็นผลการตอบสนองแบบธรรมชาติของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับที่มีอุปกรณ์ RL และ RC และผลการตอบสนองแบบทั่วไปของวงจร RL และ RC เมื่อเชื่อมต่ออยู่ในวงจรที่มีสัญญาณอินพุตเป็นแบบขั้นบันไดหนึ่งหน่วย ซึ่งผลการวิเคราะห์และศึกษาในบทนี้จะเป็นพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับสองต่อไป

5.9 คำถามท้ายบท

1. จากวงจรภาพที่ 5.19



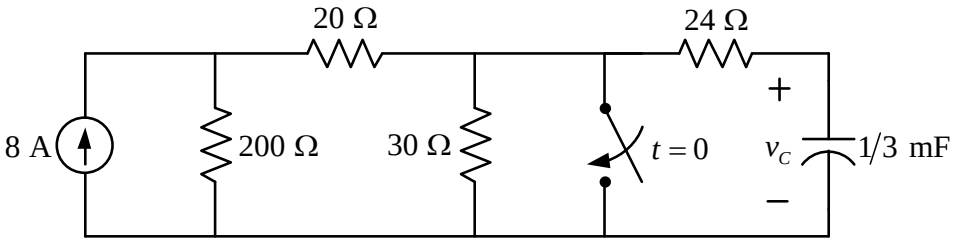
ภาพที่ 5.19 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 1

จงหา 1.1) กระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0$

1.2) ค่ากระแส $i_L(t = 10\ \text{ms.})$

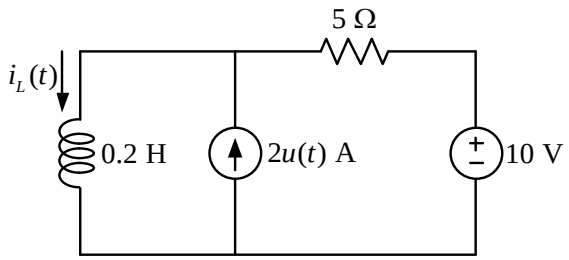
1.3) เวลาที่ t_1 ทำให้ $i_L(t_1) = 0.5 i_L(0)$

2. จากวงจรภาพที่ 5.20 จงคำนวณหาค่าแรงดัน $v_C(t)$ ที่เวลา $t > 0$



ภาพที่ 5.20 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 2

3. จากวงจรภาพที่ 5.21



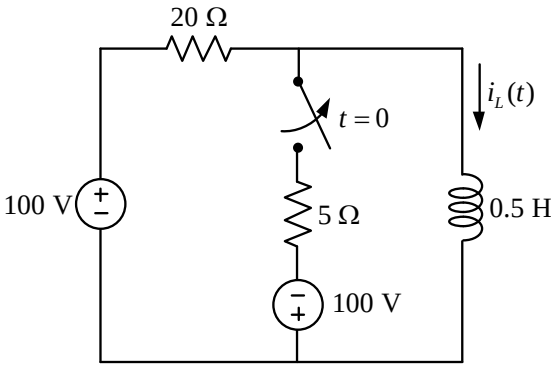
ภาพที่ 5.21 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 3

จงหา $i_L(t)$ ที่เวลา 3.1) $t = -0.5$ s.

3.2) $t = 0.5$ s.

3.3) $t = 1.5$ s.

4. จากวงจรภาพที่ 5.22



ภาพที่ 5.22 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 4

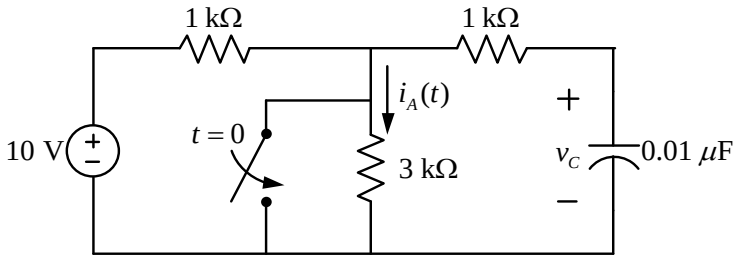
จงหาคำนวณหา 4.1) ค่ากระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t < 0$

4.2) ค่ากระแส $i_L(0^+)$

4.3) ค่ากระแส $i_L(\infty)$

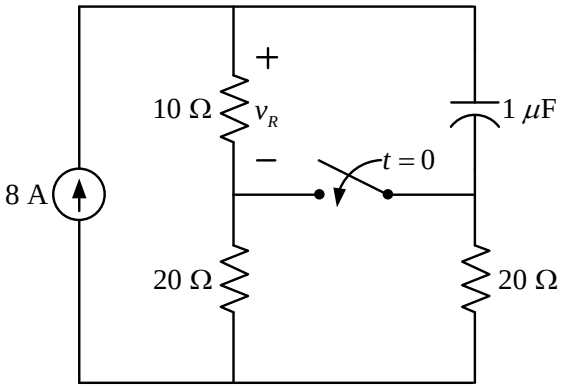
4.4) ค่ากระแส $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0$

5. จากวงจรภาพที่ 5.23 จงคำนวณหาค่าแรงดัน $i_A(t)$ ที่เวลา t ใด ๆ



ภาพที่ 5.23 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 5

6. จากวงจรภาพที่ 5.24



ภาพที่ 5.24 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 5 ข้อที่ 6

จงหาคำนวณหา 6.1) ค่าแรงดัน $v_R(t)$ ที่เวลา $t < 0$

6.2) ค่าแรงดัน $v_R(t)$ ที่เวลา $t > 0$

ถ้าสมมุติว่าสวิตช์ปิดเป็นเวลานาน แล้วสวิตช์เปิดที่เวลา $t = 0$ จงคำนวณหา

6.3) ค่าแรงดัน $v_R(t)$ ที่เวลา $t < 0$

6.4) ค่าแรงดัน $v_R(t)$ ที่เวลา $t > 0$

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 6
วงจรอันดับสอง

หัวข้อเนื้อหา

6.1 บทนำ
6.2 การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย
6.3 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน
6.4 รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน
  6.4.1 ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน
  6.4.2 ผลตอบสนองแบบหน่วยวิกฤต
  6.4.3 ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต
6.5 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม
6.6 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC ที่มีอินพุตแบบขั้นบันได
6.7 สรุป
6.8 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. ขั้นตอนการหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายในการหาผลฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับสอง
2. พฤติกรรมการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรอับดับสองแบบขนานและอนุกรม
3. รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรอันดับสองแบบขนานและอนุกรม
4. พฤติกรรมการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรอันดับสองที่มีสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย
1.2 แบบอภิปราย
1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

บทที่ 6

วงจรอันดับสอง

6.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์หาผลตอบสนองทางธรรมชาติและผลตอบสนองกรณีอินพุตของวงจรเป็นแบบขั้นบันไดของวงจร RLC การศึกษาพิจารณาเฉพาะวงจร RLC ที่ต่อแบบขนานและอนุกรมเท่านั้น การวิเคราะห์วงจรที่มีตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำอยู่ในวงจรเดียวกันจะมีสมการแบบจำลองของวงจรอยู่ในลักษณะสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง จึงเรียกว่า วงจรอันดับสอง รายละเอียดการแก้สมการอนุพันธ์อันดับสองเพื่อหาผลตอบสนองของวงจรจะได้รับการอธิบายดังต่อไปนี้

6.2 การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย

การหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย (final value) มีความสำคัญต่อการวิเคราะห์วงจรอันดับสอง ค่าเริ่มต้นคือค่าพารามิเตอร์ที่เวลา $t=0$ ในขณะที่ค่าสุดท้ายคือค่าพารามิเตอร์ที่เวลา $t\to\infty$ ค่าเหล่านี้จะถูกในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย

ขั้นตอนที่ 1: เขียนวงจรที่เวลา $t<0$ (เป็นเวลานาน) หาค่า $v_c(0^-)$ และ $i_L(0^-)$ โดยทำการลัดวงจรที่ตัวเหนี่ยวนำและเปิดวงจรที่ตัวเก็บประจุ

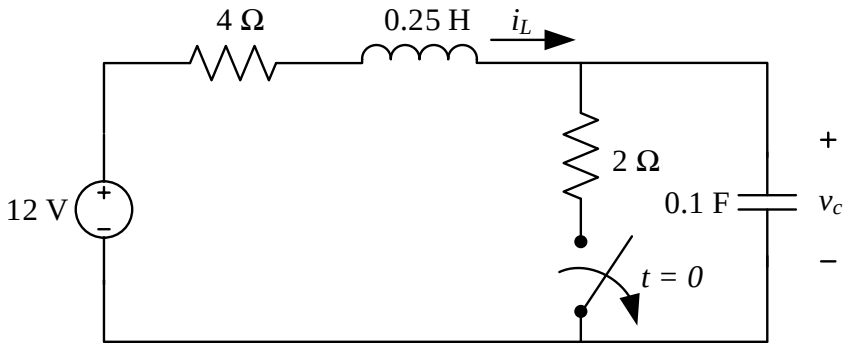
ขั้นตอนที่ 2: เขียนวงจรที่เวลา $t>0$ โดยแบ่งออกเป็นสองช่วงเวลา คือ

- วงจรที่ $t=0^+$: หาค่า $i_C(0^+)$ จากนั้นคำนวณหา $\dfrac{dv_c(0^+)}{dt}=\dfrac{i_c(0^+)}{C}$

  หาค่า $v_L(0^+)$ จากนั้นคำนวณหา $\dfrac{di_L(0^+)}{dt}=\dfrac{v_L(0^+)}{L}$

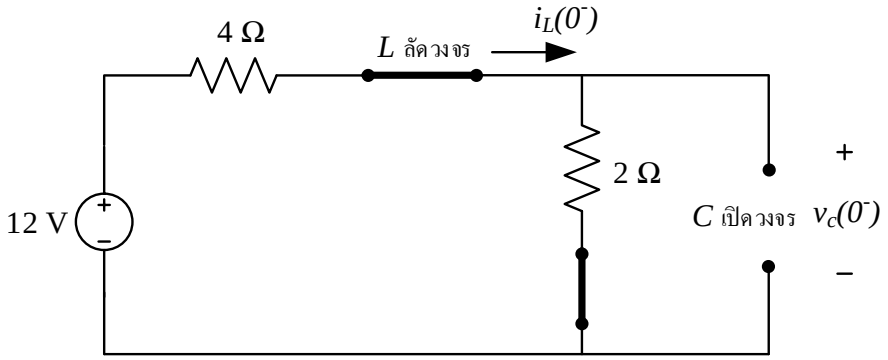
- วงจรที่ $t\to\infty$: หาค่าสุดท้าย $v_c(\infty)$ และ $i_L(\infty)$ โดยทำการลัดวงจรที่ตัวเหนี่ยวนำและเปิดวงจรที่ตัวเก็บประจุ

ตัวอย่าง 6.1 จากวงจรในภาพที่ 6.1 จงคำนวณหา $i_L(0^-)$, $v_c(0^-)$, $\dfrac{di_L(0^+)}{dt}$, $\dfrac{dv_c(0^+)}{dt}$, $i_L(\infty)$ และ $v_c(\infty)$



ภาพที่ 6.1 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 6.1

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: วงจรที่เวลา $t < 0$ (เป็นเวลานาน) แสดงได้ดังภาพที่ 6.2



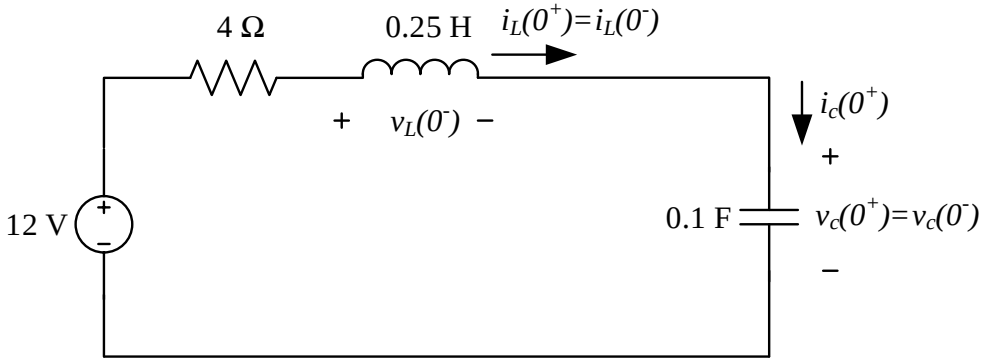
ภาพที่ 6.2 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 6.1 ที่เวลา $t < 0$

จากภาพที่ 6.2 จะได้ว่า

$$i_L(0^-) = \frac{12}{4+2} = 2A \text{ และ } v_c(0^-) = 2(2) = 4V$$

ขั้นตอนที่ 2: วงจรที่เวลา $t > 0$ แบ่งเป็นสองช่วงเวลา คือ

- วงจรที่ $t = 0^+$



(ข้อสังเกต: วงจรในช่วงเวลานี้ แสดงให้เห็นว่าวงจรในภาพที่ 6.1 เป็นวงจร RLC ที่ต่ออนุกรม สำหรับช่วงเวลา $t > 0$)

จากภาพที่ 6.2

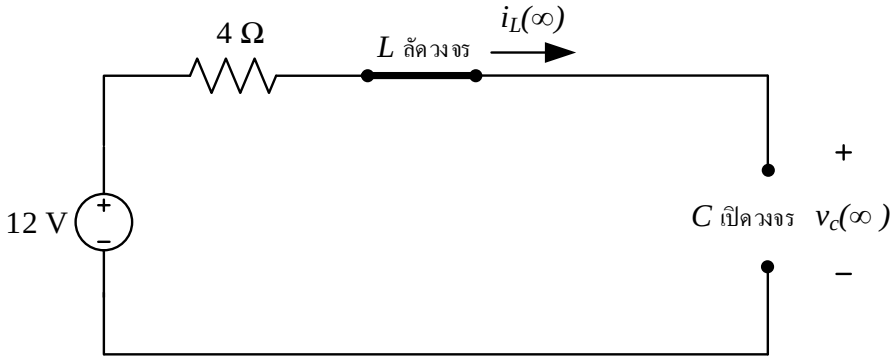
$$i_c(0^+) = i_L(0^+) = 2A \text{ ดังนั้น } \frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{2}{0.1} = 20 V/s$$

ประยุกต์ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์สามารถเขียนสมการได้เป็น

$v_{4\Omega} + v_L(0^+) + v_c(0^+) - 12 = 0$ แก้สมการหาค่าแรงดัน $v_L(0^+) = 12 - 4 - 8 = 0V$

ดังนั้น $$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{0}{0.25} = 0 A/s$$

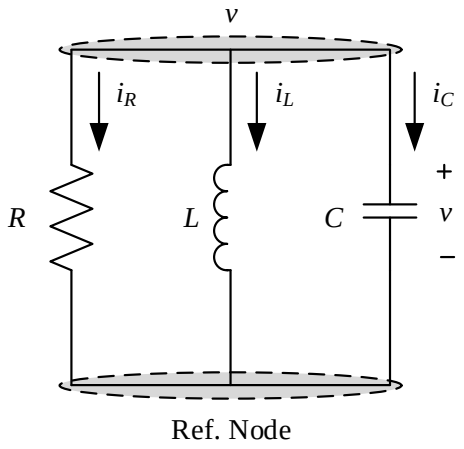
- วงจรที่ $t \to \infty$



จากวงจร $i_L(\infty) = 0A$ และ $v_c(\infty) = 12V$

6.3 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

วงจร RLC แบบขนานแสดงได้ดังภาพที่ 6.3



ภาพที่ 6.3 วงจร RLC แบบขนาน

ใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์กับวงจรภาพที่ 6.3 ที่โนด v เขียนสมการได้ดังนี้

$$i_R + i_L + i_c = 0 \tag{6.1}$$

เปลี่ยนสมการที่ (6.1) ให้อยู่ในรูปของแรงดัน v ได้เป็น

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v dt + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{6.2}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ตลอดสมการที่ (6.2) จะได้

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = 0 \tag{6.3}$$

สมการที่ (6.3) คือ สมการอนุพันธ์อันดับสอง คำตอบของสมการคือ $v(t)$ ซึ่งเป็นผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน การแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองในสมการที่ (6.3) ดำเนินการได้โดยสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูปของ

$$v = Ae^{st} \tag{6.4}$$

ถ้าสมการที่ (6.4) คือ ผลเฉลยของสมการที่ (6.3) จริง เมื่อนำค่า v จากสมการที่ (6.4) ไปแทนในสมการที่ (6.3) จะต้องทำให้สมการเป็นจริง สำหรับทุก ๆ ค่าของ t จากการแทนค่าได้สมการเป็น

$$CAs^2e^{st} + \frac{1}{R}Ase^{st} + \frac{1}{L}Ae^{st} = 0$$

หรือ

$$Ae^{st}\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0 \tag{6.5}$$

สมการที่ (6.5) จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $A = 0$ หรือ เทอมในวงเล็บเท่ากับศูนย์ ในกรณีที่ $A = 0$ หมายถึง แรงดันจะมีค่าเป็นศูนย์ทุก ๆ ค่าของ t ซึ่งในความเป็นจริงเป็นไปไม่ได้ เนื่องจากตัวเหนี่ยวนำหรือตัวเก็บประจุมีการสะสมพลังงานอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น เพื่อให้สมการที่ (6.5) เป็นจริงเทอมในวงเล็บจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right) = 0 \tag{6.6}$$

สมการที่ (6.6) เรียกว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) คำตอบของสมการที่ (6.6) คือ

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (6.7)$$

และ

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (6.8)$$

ถ้านำค่า s_1 และ s_2 จากสมการที่ (6.7) และสมการที่ (6.8) ตามลำดับ ไปแทนในสมการที่ (6.4) จากนั้นนำค่า v ในสมการที่ (6.4) ในเทอมของ s_1 และ s_2 ไปแทนในสมการที่ (6.3) จะทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้น ผลเฉลยของสมการที่ (6.3) คือ $v_1 = A_1 e^{s_1 t}$ และ $v_2 = A_2 e^{s_2 t}$ สามารถแสดงให้เห็นว่า ผลบวกของผลเฉลยทั้งสองก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ นั่นคือ สมการที่ (6.3) เช่นกัน โดยกำหนดให้

$$v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (6.9)$$

แทนค่า v จากสมการที่ (6.9) ลงในสมการที่ (6.3) ได้เป็น

$$A_1 e^{s_1 t}\left(s_1^2 + \frac{1}{RC}s_1 + \frac{1}{LC}\right) + A_2 e^{s_2 t}\left(s_2^2 + \frac{1}{RC}s_2 + \frac{1}{LC}\right) = 0 \qquad (6.10)$$

จากสมการที่ (6.10) สังเกตได้ว่าเทอมในวงเล็บมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจาก s_1 และ s_2 คือคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะ ดังนั้น สามารถกล่าวได้ว่าค่า v ในสมการที่ (6.9) คือผลเฉลยในรูปแบบทั่วไปของสมการที่ (6.3) ได้เช่นกัน อีกนัยหนึ่งก็คือ ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน คือ

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \qquad (6.11)$$

จากสมการที่ (6.11) ค่า s_1 และ s_2 สามารถหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะดังที่ได้แสดงไว้แล้วในสมการที่ (6.6) ซึ่งค่า s_1 และ s_2 นี้ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ของวงจร ซึ่งก็คือ ค่า R L และ C ส่วนค่า A_1 และ A_2 สามารถหาได้จากค่าเริ่มต้น ซึ่งการหาค่าเริ่มต้นได้อธิบายไว้แล้วในหัวข้อที่ 6.2 รายละเอียดการหาค่า A_1 และ A_2 จะกล่าวในหัวข้อต่อไป

จากผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน ในสมการที่ (6.11) เทอมของฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลจะต้องไม่มีหน่วยหรืออีกนัยหนึ่งคือ s_1 และ s_2 จะต้องมีหน่วยเป็น s^{-1} (ต่อวินาที) หน่วยนี้เรียกว่า ความถี่

ในหัวข้อนี้จะกำหนดนิยามของความถี่ต่าง ๆ ดังนี้ คือ ค่าความถี่เรโซแนนซ์ (resonant frequency) ใช้สัญลักษณ์ ω_0 มีหน่วยเป็น rad/s แสดงได้ดังสมการที่ (6.12)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.12}$$

ค่าความถี่เนเปอร์ (neper frequency) ใช้สัญลักษณ์ α มีหน่วยเป็น s^{-1} แสดงได้ดังสมการ

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{6.13}$$

ค่า s_1 และ s_2 จากสมการที่ (6.7) และสมการที่ (6.8) สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของ ω_0 และ α ได้ดังสมการที่ (6.14) และสมการที่ (6.15)

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{6.14}$$

และ

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tag{6.15}$$

ซึ่งค่า s_1 และ s_2 มีชื่อเรียกว่า ความถี่เชิงซ้อน (complex frequency)

6.4 รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน (ในที่นี้คือ แรงดัน $v(t)$ ในวงจร) ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่างค่า α และ ω_0 ของวงจร แบ่งออกเป็น 3 รูปแบบคือ ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน (overdamped) ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต (critically damped) และผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต (underdamped)

6.4.1 ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน

เงื่อนไข: $\alpha > \omega_0$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (6.14) และสมการที่ (6.15) ในกรณีที่ $\alpha > \omega_0$ จะทำให้ค่า s_1 และ s_2 เป็นจำนวนจริงที่มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นผลตอบสนองทางธรรมชาติในรูปทั่วไปของแรงดันสำหรับวงจร RLC แบบขนาน คือ

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{6.16}$$

6.4.2 ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต

เงื่อนไข: $\alpha = \omega_0$

เมื่อ $\alpha = \omega_0$ ทำให้ค่า s_1 และ s_2 มีค่าเท่ากัน โดย $s_1 = s_2 = -\alpha$ ผลการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรสำหรับกรณีนี้คือ

$$v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \tag{6.17}$$

6.4.3 ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต

เงื่อนไข: $\alpha < \omega_0$

เมื่อ $\alpha < \omega_0$ ทำให้ค่า s_1 และ s_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรในกรณีนี้ คือ

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \tag{6.18}$$

เมื่อ

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha_0^2} \tag{6.19}$$

การหาค่าคงที่ A_1 A_2 B_1 และ B_2 ในสมการที่ (6.17) ถึงสมการที่ (6.18) สามารถหาได้จากค่าเริ่มต้นที่ได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 6 2

การหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนาน สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ ดังนี้

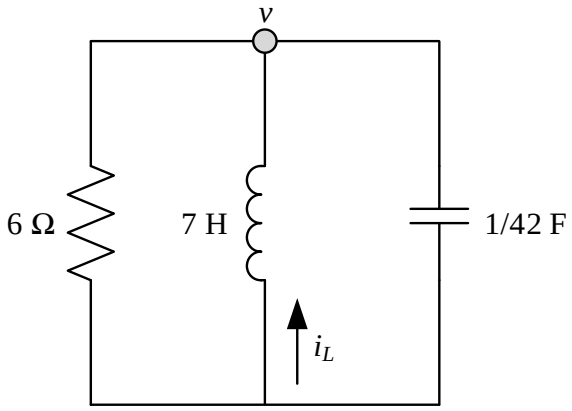
ขั้นตอนที่ 1: ขั้นตอนการเก็บข้อมูล (ดูหัวข้อที่ 6.2)

ขั้นตอนที่ 2: คำนวนค่า α และ ω_0 จากค่าพารามิเตอร์ R L และ C ของวงจร

ขั้นตอนที่ 3: ตรวจสอบชนิดของผลตอบสนอง จากนั้นเขียนสมการผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรและคำนวรค่าต่าง ๆ ที่เหลือ

ขั้นตอนที่ 4: หาค่าคงที่ จากข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 และสรุปคำตอบ

ตัวอย่างที่ 6.2 จากวงจรดังภาพที่ 6.4 จงหา $v(t)$ ที่เวลา $t > 0$ เมื่อกำหนดให้ $v(0) = 0\,V$ และ $i_L(0) = 10\,A$



ภาพที่ 6.4 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 6.2

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: โจทย์กำหนดค่าเริ่มต้นให้แล้วคือ $v(0)=0\,V$ และ $i_L(0)=10\,A$ จากค่าเริ่มต้น เมื่อพิจารณาวงจรในภาพที่ 6.4 พบว่า $i_c(0)=10\,A$ ดังนั้น

$$\frac{dv(0)}{dt}=\frac{i_c(0)}{C}=\frac{10}{1/42}=420\,V/s$$

ขั้นตอนที่ 2: คำนวนค่า α และ ω_0 ได้ดังนี้

$$\alpha=\frac{1}{2RC}=\frac{1}{2(6)(1/42)}=3.5\ s^{-1} \qquad \text{และ}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{7(1/42)}}=\sqrt{6}\quad rad/s$$

ขั้นตอนที่ 3: ตรวจสอบชนิดของผลตอบสนอง

จากขั้นตอนที่ 2 แสดงให้เห็นว่า ค่า $\alpha>\omega_0$ ดังนั้นผลตอบสนองทางธรรมชาติเป็นแบบหน่วงเกิน คือ $v(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}$ เมื่อ

$s_1=-3.5+\sqrt{3.5^2-6}=-1\ s^{-1}$ และ $s_2=-3.5-\sqrt{3.5^2-6}=-6\ s^{-1}$

ดังนั้นผลตอบสนองทางธรรมชาติ คือ $v(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}\ V$

ขั้นตอนที่ 4: หาค่าคงที่ A_1 และ A_2 จากค่าเริ่มต้น $v(0)=0\,V$ และ $\frac{dv(0)}{dt}=420\,V/s$ ดังนี้

$$v(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}\ V$$

ดังนั้น $$v(0)=A_1+A_2=0$$

และ

$$\frac{dv(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-6A_2e^{-6t} \qquad (6.20)$$

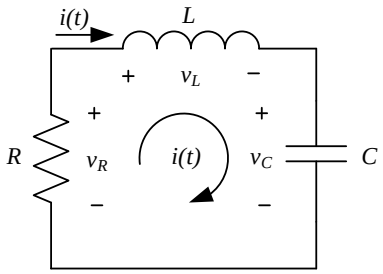
ดังนั้น

$$\frac{dv(0)}{dt}=-A_1-6A_2=420 \qquad (6.21)$$

แก้สมการที่ (6.20) และสมการที่ (6.21) ได้ค่า $A_1=84$, $A_2=-84$ ดังนั้นผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจรในตัวอย่างนี้คือ $v(t)=84e^{-t}-84e^{-6t}\ V$ ที่เวลา $t>0$

6.5 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม

วงจร RLC แบบอนุกรม แสดงได้ดังภาพที่ 6.5



ภาพที่ 6.5 วงจร RLC แบบอนุกรม

ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์กับวงจรภาพที่ 6.5 สามารถเขียนสมการได้ ดังนี้

$$v_R + v_L + v_C = 0 \tag{6.22}$$

แทน $v_R = Ri$ $v_L = L\dfrac{di}{dt}$ และ $v_C = \dfrac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt$ ลงในสมการที่ (6.22) จะได้

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt = 0 \tag{6.23}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ตลอดสมการที่ (6.23) ได้เป็น

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{6.24}$$

สมการที่ (6.24) มีลักษณะคล้ายคลึงกับสมการที่ (6.3) (วงจร RLC แบบขนาน) ดังนั้น สามารถกล่าวได้ว่า ผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรม คือ

$$i = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{6.25}$$

เมื่อ

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{6.26}$$

ถ้ากำหนดให้ความถี่เนเปอร์ของวงจร RLC แบบอนุกรม คือ

$$\alpha = \frac{R}{2L} \tag{6.27}$$

และความถี่เรโซแนนซ์ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ให้มีค่าเช่นเดิม ค่า s_1 และ s_2 สามารถหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะเช่นเดียวกับวงจร RLC แบบขนาน ดังที่ได้แสดงไว้แล้วในสมการที่ (6.6) คือ

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

รูปแบบการตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบอนุกรมมีลักษณะการพิจารณาเช่นเดียวกันกับวงจร RLC แบบขนาน ต่างกันแค่การคำนวณความถี่เรโซแนนซ์เท่านั้น ซึ่งอาจกล่าวสรุปได้ ดังนี้

$\alpha > \omega_0$: ผลตอบสนองแบบหน่วงเกิน

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{6.28}$$

เมื่อ $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ และ $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$\alpha = \omega_0$: ผลตอบสนองแบบหน่วงวิกฤต

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1 + A_2) \tag{6.29}$$

$\alpha < \omega_0$: ผลตอบสนองแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต

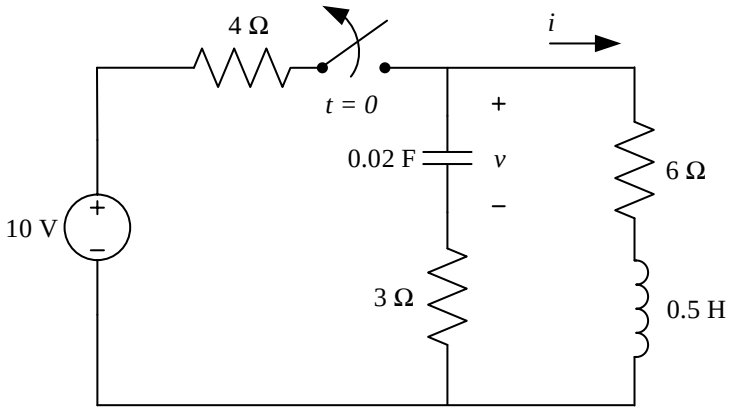
$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \tag{6.30}$$

เมื่อ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

การหาผลตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC แบบขนานและวงจร RLC แบบอนุกรมมีหลักการในการวิเคราะห์เหมือนกัน ต่างกันเพียงแค่การคำนวณหาความถี่เนเปอร์ ดังนี้

- วงจร RLC แบบขนาน: $\alpha = \dfrac{1}{2RC}$
- วงจร RLC แบบอนุกรม: $\alpha = \dfrac{R}{2L}$

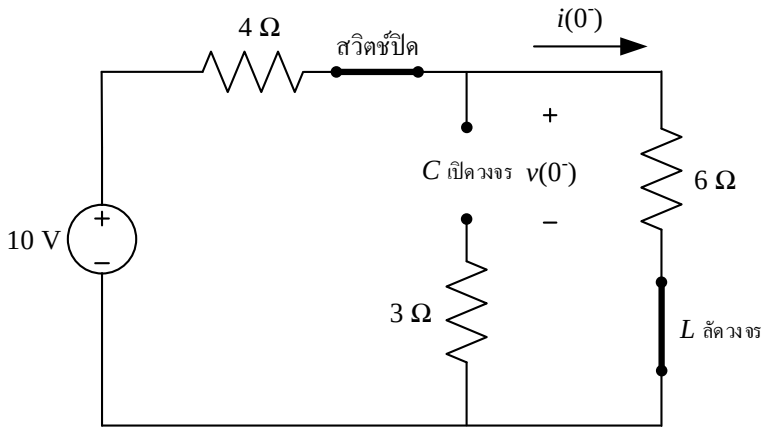
ตัวอย่างที่ 6.3 จากวงจรภาพที่ 6.6 จงคำนวณหา $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$



ภาพที่ 6.6 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 6.3

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: เก็บข้อมูล

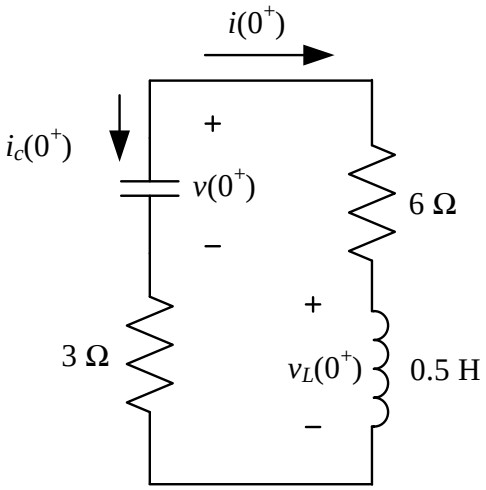
- วงจรที่เวลา $t < 0$



จากวงจร $i(0^-) = \dfrac{10}{4+6} = 1\ A$ และ $v(0^-)(6) = 6\ V$

- วงจรที่เวลา $t > 0$

$t = 0^+$:



จากวงจรที่ช่วงเวลานี้แสดงให้เห็นว่าที่เวลา $t > 0$ เป็นวงจร RLC แบบอนุกรม โดยมีค่า

$$C = 0.02\ F$$

$$L = 0.02\ H$$

และ $$R = 3 + 6 = 9\ \Omega$$

ทราบว่า $v(0^+) = 6\ V$ และ $i(0^-) = i(0^+) = 1\ A$ จากวงจร ใช้กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์เขียนสมการได้ดังนี้

$$-v(0^+) + 6i(0^+) + v_L(0^+) + 3i(0^+) = 0$$

ดังนั้น $$v_L(0^+) = 6 - 9 = 3\ V$$

และ $$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{-3}{0.5} = -6\ A/s$$

ขั้นตอนที่ 2: คำนวณหาค่า α และ ω_0

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{2(0.5)} = 9\ s^{-1} \text{ และ } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.5)(0.02)}} = 10\ rad/s$$

ขั้นตอนที่ 3: ตรวจสอบชนิดของผลการตอบสนอง

$\alpha > \omega_0$: ผลตอบสนองเป็นแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต ดังนั้น

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$$

เมื่อ

$$\alpha = 9\ s^{-1} \text{ และ } \omega_d = \sqrt{10^2 - 9^2} = 4.359\ rad/s$$

ดังนั้น $i(t) = e^{-9t}(B_1 \cos 4.359t + B_2 \sin 4.359t)\ A$ ที่เวลา $t > 0$

ขั้นตอนที่ 4: หาค่าคงที่ B_1 และ B_2 จาก $i(0^+) = 1\ A$ และ $\frac{di(0^+)}{dt} = -6\ A/s$ ดังนี้

จาก $i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2 \sin\omega_d t)$

$i(0) = B_1 + B_2(0) = 1$ ดังนั้น $B_1 = 1$

และ

$$\frac{di(t)}{dt} = B_1 e^{-9t}(-\sin 4.359t)(4.359) + B_1(\cos 4.359t)(-9e^{-9t})$$
$$+ B_2 e^{-9t}(\cos 4.359t)(4.359) + B_2(\sin 4.359t)(-9e^{-9t})$$

$\frac{di(0)}{dt} = -9B_1 + 4.359B_2 = -6$ ดังนั้น $B_2 = 0.6882$ (เนื่องจาก $B_1 = 1$)

ดังนั้นค่า $i(t)$ ที่เวลา $t > 0$ คือ

$$i(t) = e^{-9t}(\cos 4.359t + 0.6882 \sin 4.359t)\ A$$

6.6 การตอบสนองทางธรรมชาติของวงจร RLC ที่มีอินพุตแบบขั้นบันได

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลตอบสนองของวงจร RLC ทั้งแบบอนุกรมและแบบขนาน เมื่อวงจรได้รับอินพุตแบบขั้นบันได หลักการวิเคราะห์จะมีลักษณะคล้ายกับการวิเคราะห์วงจร RL และวงจร RC ซึ่งก็คือ ผลการตอบสนองของวงจรโดยทั่วไปจะประกอบด้วยผลตอบสนองทางธรรมชาติและผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว (ค่าสุดท้าย) แนวคิดการวิเคราะห์วงจรสรุปได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1: เก็บข้อมูลค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้าย สำหรับวงจรที่เวลา $t < 0$ และ $t > 0$ ($t = 0^+$ และ $t \to \infty$) ซึ่งได้รับการอธิบายไว้แล้วในหัวข้อที่ 2

ขั้นตอนที่ 2: พิจารณาวงจรที่เวลา $t = 0^+$ เพื่อระบุว่าเป็นวงจร RLC แบบขนานหรืออนุกรม จากนั้นระบุค่า R L และ C ของวงจรสำหรับการคำนวณในขั้นตอนต่อไป

ขั้นตอนที่ 3:

3.1) คำนวณหา α โดยที่ $\alpha = \frac{1}{2RC}$ สำหรับวงจร RLC แบบขนาน และ $\alpha = \frac{R}{2L}$ สำหรับวงจร RLC แบบอนุกรม

3.2) คำนวณหาค่า $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

3.3) พิจารณาชนิดการตอบสนองของวงจร (ผลการตอบสนองทางธรรมชาติ)

3.3.1) ถ้า $\alpha > \omega_0$ ผลการตอบสนองเป็นแบบหน่วงเกิน มีสมการดังนี้

$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ เมื่อ $f_n(t)$ อาจเป็น $i_L(t)$ หรือ $v_c(t)$ ก็ได้

3.3.2) ถ้า $\alpha = \omega_0$ ผลตอบสนองเป็นแบบหน่วงวิกฤต มีสมการดังนี้

$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$

3.3.3) ถ้า $\alpha < \omega_0$ ผลการตอบสนองเป็นแบบหน่วงต่ำกว่าวิกฤต มีสมการดังนี้

$$f_n(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

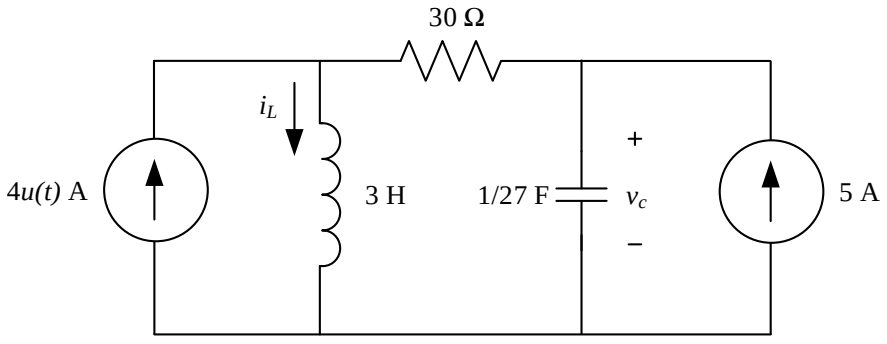
ขั้นตอนที่ 4: ผลตอบสนองของวงจรคือ $f(t) = f_f(t) + f_n(t)$

เมื่อ $f_f(t)$ คือ ผลตอบสนองสถานะอยู่ตัว และ $f_n(t)$ คือ ผลตอบนองทางธรรมชาติที่ได้จากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ 3

ขั้นตอนที่ 5: หาค่าคงที่ A_1 และ A_2

โดยอาศัยสมการผลตอบสนองของวงจรในขั้นตอนที่ 4 คือ $f(t) = f_f(t) + f_n(t)$ โดยอาศัยค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายที่ได้คำนวณไว้แล้วในขั้นตอนที่ 1

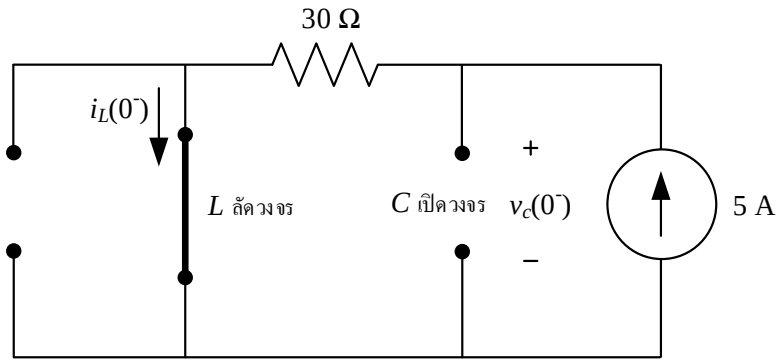
ตัวอย่างที่ 6.4 จากวงจรภาพที่ 6.7 จงคำนวณหา $v_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$



ภาพที่ 6.7 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 6.4

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: เก็บข้อมูล ในกรณีการคำนวณหาค่า $v_c(t)$ ค่าที่เป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์คือ $i_L(0^-)$, $v_c(0^-)$, $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$, $v_c(\infty)$ โดยมีวิธีการคำนวณดังนี้

- วงจรที่เวลา $t < 0$ (เป็นเวลานาน)



จากวงจร $i_L(0^-) = 5A$ และ $v_c(0^-) = i_L(0^-)(30) = 150V$

- วงจรที่เวลา $t > 0$

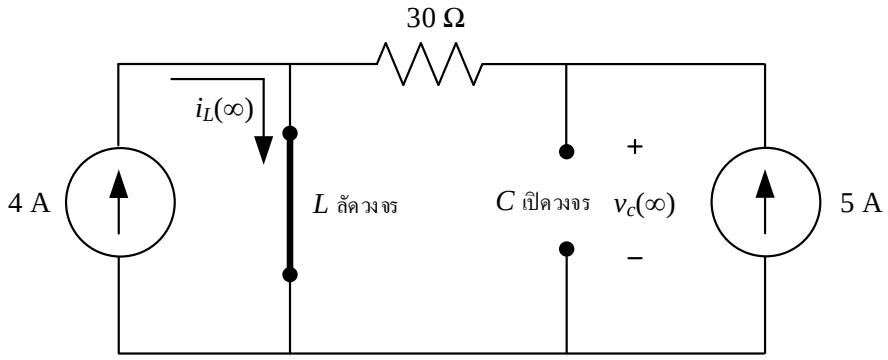
$t = 0^+$:

ทราบว่า $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 5A$ และ $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 150V$

จากวงจร ค่า $i_{30\Omega}(0^+) = 1A$ ดังนั้น $i_c(0^+) = 5 - 1 = 4A$ เมื่องทราบค่า $i_c(0^+)$ สามารถคำนวณหาค่า $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108 V/s$

เนื่องจากวงจรที่เวลา $t = 0^+$ มีแหล่งกำเนิดเชื่อมต่ออยู่ด้วย ดังนั้นการคำนวณหาค่าต่าง ๆ สำหรับวงจรที่ $t \to \infty$ จึงเป็นสิ่งจำเป็น ซึ่งมีวงจรดังนี้

$t \to \infty$



จากวงจร $v_c(\infty) = 5(30) = 150V$

ขั้นตอนที่ 2: พิจารณาวงจรที่เวลา $t = 0^+$

วงจร $t = 0^+$ แสดงให้เห็นว่าวงจรในตัวอย่างนี้เป็นวงจร RLC แบบอนุกรมซึ่งมีค่า $R = 30\Omega$, $L = 3H$ และ $C = 1/27F$

ขั้นตอนที่ 3: คำนวณหาค่า α และ ω_0 จากค่าพารามิเตอร์ของวงจร RLC แบบอนุกรม ดังนี้

$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{30}{2(3)} = 5s^{-1}$ และ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(3)(1/27)}} = 3\ rad/s$

ค่า $\alpha > \omega_0$ ผลตอบสนองเป็นแบบหน่วงเกิน ผลตอบสนองทางธรรมชาติที่เวลา $t > 0$ ดังนี้

$v_{cn}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ เมื่อ $s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-9} = -1, -9$ ดังนั้น

$v_{cn}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-9t} V$

ขั้นตอนที่ 4: ผลตอบสนองของวงจร คือ

$v_c(t) = v_{cf}(t) + v_{cn}(t) = v_c(\infty) + v_{cn}(t) = 150 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-9t}\ V,\ t > 0$

ขั้นตอนที่ 5: หาค่าคงที่ A_1 และ A_2

จาก $v_c(0^-) = 150V$ และ $\frac{dv_c(0^+)}{dt} = 108\ V/s$ ดังนี้

$v_c(t) = 150 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-9t}$ และ $\frac{dv_c(t)}{dt} = -A_1 e^{-t} - 9A_2 e^{-9t}$ ดังนั้น

$v_c(0) = 150 + A_1 + A_2 = 150$

$\frac{dv_c(0)}{dt} = -A_1 - 9A_2 = 108$

จากสมการที่ (6.24) และสมการที่ (6.25) แก้สมการได้ค่า $A_1 = 13.5$ และ $A_2 = -13.5$

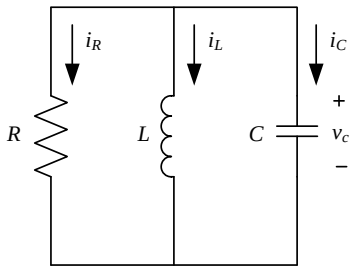
ดังนั้น $v_c(t) = 150 + 13.5e^{-t} - 13.5e^{-9t}\ V,\ t > 0$

6.7 สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับสองซึ่งประกอบไปด้วยโหลดความต้านทาน ความเหนี่ยวนำ และความจุไฟฟ้า ซึ่งได้อธิบายขั้นตอนการหาค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายสำหรับหาผลเฉลยของวงจรอับดับสอง วิเคราะห์เพื่อศึกษาพฤติกรรมของปริมาณทางไฟฟ้าของวงจรอันดับสองที่มีการต่อแบบขนานและอนุกรม ศึกษารูปแบบของวงจรอันดับสองและวิเคราะห์ผลการตอบสนองทางธรรมชาติเมื่อมีสัญญาณอินพุตแบบขั้นบันได โดยเนื้อหาในบทนี้จะนำไปสู่การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับในรูปแบบอื่น ๆ ในบทต่อไป

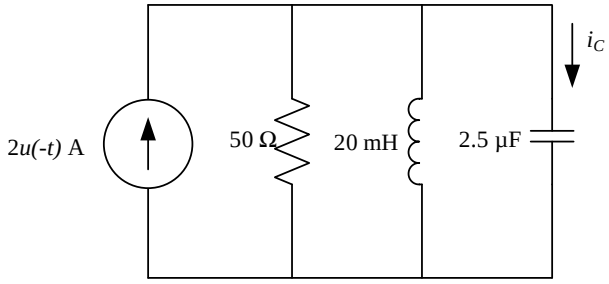
6.8 คำถามท้ายบท

1. จากวงจรภาพที่ 6.8 กำหนดให้ $i_L(0) = 40A$ และ $v_c(0) = 40V$ ถ้า $L = 12.5mH$ $R = 0.1\Omega$ และ $C = 0.2F$ จงคำนวณหา $v_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$



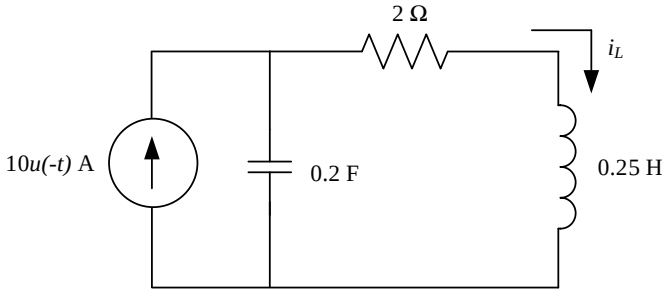
ภาพที่ 6.8 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 6 ข้อที่ 1

2. จงคำนวณหา $i_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$ ในวงจรภาพที่ 6.9



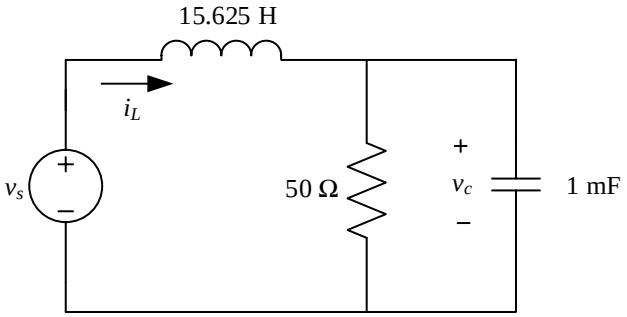
ภาพที่ 6.9 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 6 ข้อที่ 2

3. จงคำนวณหา $i_L(t)$ ที่เวลา $t > 0$ ในวงจรภาพที่ 6.10



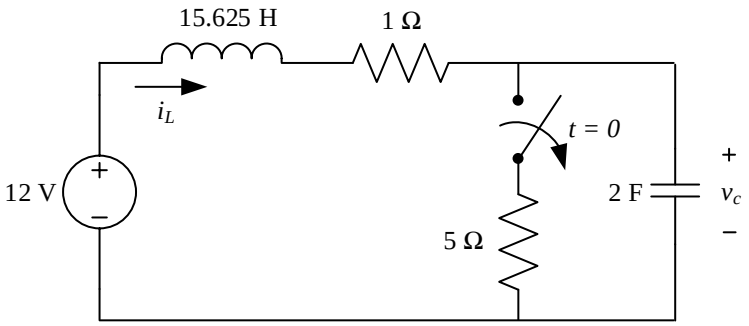
ภาพที่ 6.10 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 6 ข้อที่ 3

4. จากวงจรภาพที่ 6.11 ถ้า $v_s = 10 + 20u(t)\,V$ จงคำนวณหา $i_L(0)$, $v_c(0)$, i_{Lf} และ $i_L(t = 0.1s.)$



ภาพที่ 6.11 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 6 ข้อที่ 4

5. จงคำนวณหา $v_c(t)$ ที่เวลา $t > 0$ ในวงจรภาพที่ 6.12



ภาพที่ 6.12 วงจรสำหรับคำถามท้ายบทที่ 6 ข้อที่ 5

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 7
วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ ผลตอบสนองสัญญาณกระตุ้นแบบไซน์ และการวิเคราะห์เฟสเซอร์

หัวข้อเนื้อหา

7.1 บทนำ

7.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันไซนูซอยด์

7.3 เฟสเซอร์

- 7.3.1 จำนวนเชิงซ้อน
- 7.3.2 การแปลงสัญญาณคลื่นรูปซายน์ให้เป็นเฟสเซอร์
- 7.3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแส
- 7.3.4 อิมพิแดนซ์
- 7.3.5 แอตมิตแตนซ์
- 7.3.6 การต่ออนุกรมและขนานของอิมพิแดนซ์

7.4 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

7.5 ค่ารากเฉลี่ยกำลังสอง

7.6 กำลังไฟฟ้าวงจรกระแสสลับ

- 7.6.1 กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย
- 7.6.2 กำลังไฟฟ้าปรากฏและตัวประกอบกำลัง
- 7.6.3 กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

7.7 สรุป

7.8 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. คุณสมบัติของฟังก์ชันชนิดไซนูซอยด์และพฤติกรรมของปริมาณกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าที่อยู่ในรูปของเฟสเซอร์
2. ความหมายและส่วนประกอบของอิมพิแดนซ์ และแอตมิตแตนซ์
3. วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเฟสเซอร์แรงดันไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าเมื่อวงจรมีการต่ออิมพิแดนซ์หรือแอตมิตแตนซ์ ซึ่งอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน
4. วิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับเมื่อมีการต่ออนุกรมและขนานของอิมพิแดนซ์

5. ความหมายของค่ารากเฉลี่ยกำลังสอง

6. ความหมายของกำลังไฟฟ้าประเภทต่าง ๆ และคำนวณค่ากำลังไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่างๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

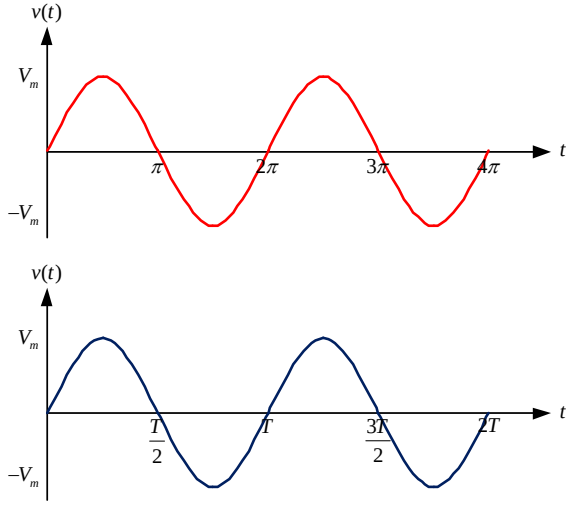
บทที่ 7
วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ ผลตอบสนองสัญญาณกระตุ้นแบบไซน์ และการวิเคราะห์เฟสเซอร์

7.1 กล่าวนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงการวิเคราะห์วงจรไซนูซอยด์หรือวงจรกระแสสลับในสถานะอยู่ตัว องค์ประกอบของวงจรประกอบไปด้วย แหล่งกำเนิดกระแสและแหล่งกำเนิดแรงดันที่เป็นไซนูซอยด์ ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ แบบจำลองของพารามิเตอร์ในวงจร ถูกแปลงจากค่าในโดเมนเวลาไปอยู่ในโดเมนความถี่ เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากอันเนื่องมาจากการหาผลเฉลยของ สมการเชิงอนุพันธ์ แหล่งกำเนิดที่เป็นฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์ เรียกว่า ไซนูซอยด์ และแสดงให้เห็นว่าสามารถใช้การวิเคราะห์แบบโนด แบบเมช หรือทฤษฎีของเทวินินและนอร์ตัน หรือการใช้ทฤษฎีซ้อนทับ ดังที่เคยได้อธิบายในบทก่อนหน้านี้แล้วนั้น โดยนำแนวความคิดเกี่ยวกับเฟสเซอร์ มาใช้ควบคู่กับขบวนการวิเคราะห์นั้นในการหาผลตอบสนองบังคับของวงจร (หรือผลตอบสนองที่สภาวะคงตัว) ต่อการป้อนอินพุตที่เป็นสัญญาณไซนูซอยด์ ซึ่งขั้นตอนการวิเคราะห์เป็นดังนี้

7.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันไซนูซอยด์

ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ ค่าแรงดันและค่ากระแสจะแปรตามเวลา เราจะพิจารณาเฉพาะแรงดันและกระแสที่แปรตามเวลาเป็นคลื่นรูปซายด์ โดยที่สัญญาณไซนูซอยด์ คือ สัญญาณรายคาบ (periodic signal) ที่มีขนาด (amplitude) เปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นแบบฟังก์ชัน sine หรือ cosine



ภาพที่ 7.1 สัญญาณไซนูซอยด์

สัญญาณไซนูซอยด์ถูกวาดเทียบกับเวลาโดยจะมีรูปสัญญาณครบหนึ่งรอบทุก ๆ คาบเวลา T โดยสัญญาณไซนูซอยด์ข้างต้นมีสมการเป็น

$$v(t) = V_m \sin \omega t \tag{7.1}$$

โดยที่ V_m คือ ขนาด(amplitude)

ω คือ ความเร็วเชิงมุม (angular frequency หรือ radian frequency) มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที (radian/sec)

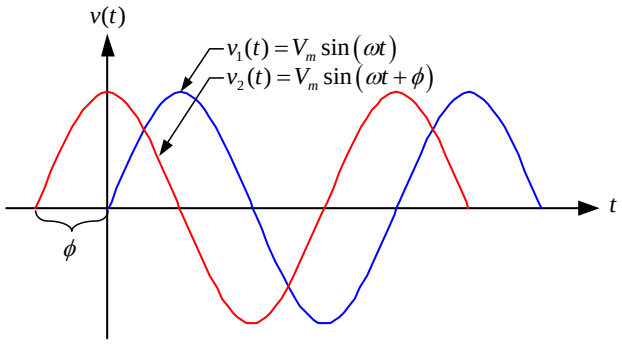
t คือ เวลาในขณะใดๆ

เนื่องจากสัญญาณไซน์เป็นสัญญาณรายคาบโดยมี T เป็นคาบเวลาของสัญญาณใด ๆ ในหนึ่งลูกคลื่นจะได้

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{7.2}$$

จำนวนลูกคลื่นของสัญญาณไซน์ในหนึ่งวินาทีซึ่งนิยามเป็นความถี่ (frequency, f) มีหน่วยเป็นเฮิรต์ซ (Hz) สามารถหาได้จาก

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{7.3}$$



ภาพที่ 7.2 สัญญาณไซนูซอยด์ที่มีการเลื่อนเฟส

สัญญาณไซน์โดยทั่วไปยังสามารถถูกเขียนในรูปที่มีการเลื่อนเฟสได้ดังนี้

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \tag{7.4}$$

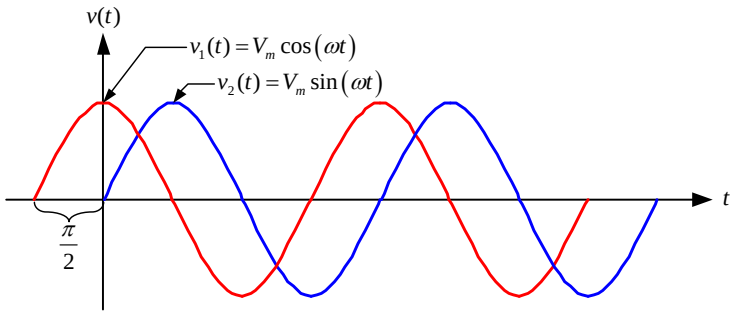
เมื่อ ϕ คือ คือเฟส (phase) ของสัญญาณ ซึ่งมีหน่วยเป็น เรเดียน (radian) แต่ในบางกรณีสามารถใช้หน่วยของเฟสเป็นองศาได้ด้วยโดยอาศัยความสัมพันธ์ดังสมการที่ (7.5)

360 องศา = 2π เรเดียน (7.5)

เมื่อมีสัญญาณไซน์ตั้งแต่ 2 สัญญาณ สามารถเปรียบเทียบสัญญาณไซน์ 2 สัญญาณที่มีความถี่ที่เท่ากันและมีขนาดที่เป็นบวก จะได้ว่ามีเฟสต่างกันเท่าไรได้โดยนำมุมของสัญญาณไซน์ทั้งสองมาลบกัน ดังตัวอย่าง

สัญญาณ $V_m \sin \omega t$ นั้นมีเฟสตามหลัง(lagging) สัญญาณ $V_m \sin(\omega t + \phi)$ อยู่ ϕ เรเดียน หรือ

สัญญาณ $V_m \sin(\omega t + \phi)$ นั้นมีเฟสนำ (leading) สัญญาณ $V_m \sin \omega t$ อยู่ ϕ เรเดียน

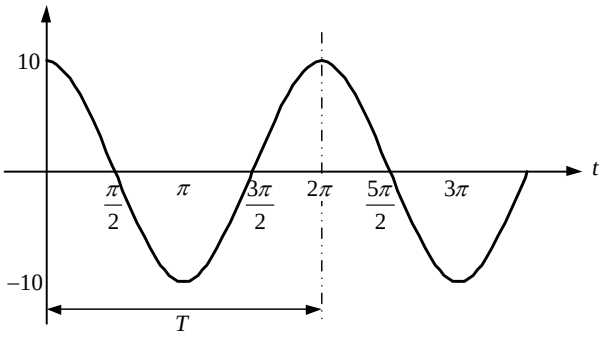


ภาพที่ 7.3 สัญญาณไซน์และสัญญาณโคไซน์

จากภาพที่ 7.3 สัญญาณไซน์ที่มีการเลื่อนมุมไป 90 องศา ก็คือสัญญาณโคไซน์ เขียนเป็นสมการได้ดังสมการที่ (7.6)

$$V_m \sin(\omega t + 90°) = V_m \cos(\omega t) \tag{7.6}$$

ตัวอย่างที่ 7.1 จากสัญญาณต่อไปนี้จงหา T f และ ω



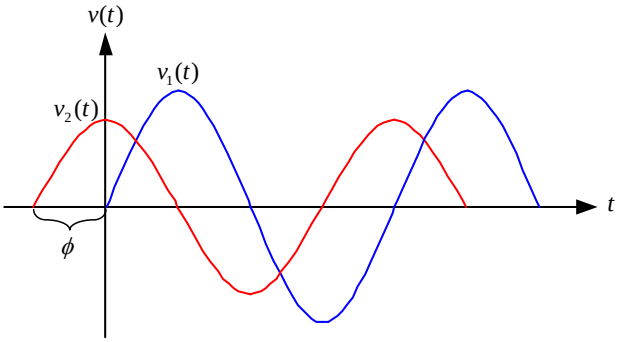
วิธีทำ

$$T = 2\pi \text{ sec}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 1 \text{ rad/s}$$

เมื่อพิจารณาคลื่นไซน์ 2 คลื่นที่มีความถี่เดียวกันแต่มีมุมเฟสต่างกันระหว่าง $v_1(t) = V_{m1}\sin(\omega t)$ และ $v_2(t) = V_{m2}\sin(\omega t + \phi)$



จากกราฟมองผ่านตาจะเห็นเส้นสีแดงก่อนจะได้ว่า $v_2(t)$ นำหน้า $v_1(t)$ หรือ $v_1(t)$ ล้าหลัง $v_2(t)$

7.3 เฟสเซอร์

เฟสเซอร์ (phasor) คือ การแสดงปริมาณของกระแสและแรงดันในระบบเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะรวมไว้เพียงขนาดและเฟสโดยละไว้เป็นที่เข้าใจว่าสัญญาณกระแสและแรงดันของทั้งวงจร เป็นสัญญาณไซน์และมีความถี่เป็น ω เช่น

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi) \tag{7.7}$$

เขียนในรูปของเฟสเซอร์ได้เป็น

$$\mathrm{V} = V_m\angle\phi \tag{7.8}$$

ก่อนจะแปลงเฟสเซอร์จำเป็นต้องรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

7.3.1 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (complex Number) สามารถเขียนได้ 2 รูปแบบ คือ

1) รูปแบบ polar form

$$Z = r\angle\phi \tag{7.9}$$

โดยที่ r คือ ขนาด

ϕ คือ มุมเฟส

2) รูปแบบrectangular form

$$Z = x + jy \tag{7.10}$$

โดยที่ x คือ จำนวนจริง (real number)

j คือ องค์ประกอบจินตภาพ ($\sqrt{-1}$)

y คือ จำนวนจินตภาพ (imaginary number)

ความสัมพันธ์ระหว่าง polar form และ rectangular form

1) การแปลง rectangular form เป็น polar form

$$x + jy \text{ (rec)} \quad \rightarrow \quad r\angle\phi \text{ (pol)} \tag{7.11}$$

โดยที่

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{7.12}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.13}$$

2) การแปลง polar form เป็น rectangular form

$$r\angle\theta \text{ (Pol)} \rightarrow x + jy \text{ (Rec)} \tag{7.14}$$

โดยที่

$$x = r\cos\theta \tag{7.15}$$

$$y = r\sin\theta \tag{7.16}$$

การบวก/ลบจำนวนเชิงซ้อน ให้กระทำในรูปแบบของ rectangular form : $x + jy$

เมื่อ $Z_1 = x_1 + jy_1$ และ $Z_2 = x_2 + jy_2$

ดังนั้น $Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$

การคูณ/หารจำนวนเชิงซ้อน ให้กระทำในรูปแบบของ polar form : $r\angle\theta$

เมื่อ $Z_1 = r_1\angle\phi_1$ และ $Z_2 = r_2\angle\phi_2$

ดังนั้น $Z_1 Z_2 = r_1 r_2\angle\phi_1 + \phi_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\phi_1 - \phi_2$$

สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)

rectangular form $Z = x + jy$

จะได้ complex conjugate คือ $Z^* = x - jy$

หรือ $A = x - jy \quad \Rightarrow \quad A^* = x + jy$

polar form $Z = r\angle\phi$

จะได้ Complex Conjugate คือ $Z^* = r\angle -\phi$

หรือ $A = r\angle -\phi \quad \Rightarrow \quad A = r\angle\phi$

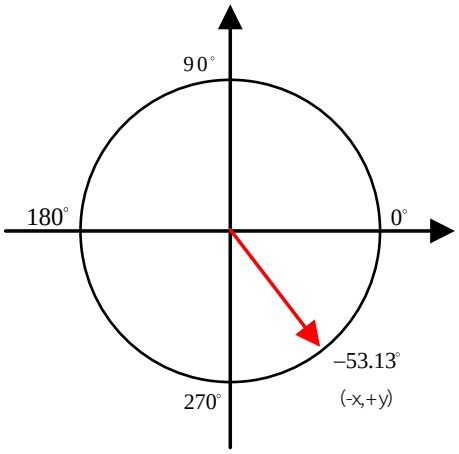
ตัวอย่างที่ 7.2 $(6+j5)+(3+j4)(10\angle 40^\circ)$ จงหาค่าจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูป rectangular form. และ polar form

วิธีทำ พิจารณา $(3+j4)(10\angle 40^\circ)$

$3+j4$ แปลงเป็น $r\angle\theta$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53.13$$



จากปริมาณในรูปของ polar form $50\angle -13.13^\circ$ แปลงเป็น rectangular form จะได้จำนวนจริงเท่ากับ 48.7 และได้จำนวนจินตภาพเท่ากับ -11.35 จะได้ $48.7 - j11.35$

$$(6+j5)+(48.7-j11.35) = (6+48.7)+j(5-11.35)$$

$$= 54.7 - j6.35$$

$$= 55.06\angle -6.62^\circ$$

ตัวอย่างที่ 7.3 จงหาค่าต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบ $Z = x + jy$

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°}$$

วิธีทำ ทำการแปลง $3-j4$ เป็น polar form และ $30\angle 40°$ เป็น rectangular form

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°} = \frac{(5\angle -53.13°)(10\angle 40°)}{6+(18+j24)}$$

จัดรูปใหม่

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°} = \frac{(50\angle -13.13°)}{(24+j24)}$$

ทำการแปลง $24+j24$ เป็น polar form

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°} = \frac{(50\angle -13.13°)}{(33.94\angle 45°)}$$

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°} = (1.473\angle -58.13°)$$

$$\frac{(3-j4)(10\angle 40°)}{6+30\angle 40°} = 0.778-j1.251$$

7.3.2 การแปลงสัญญาณคลื่นรูปซายน์ให้เป็นเฟสเซอร์

การแปลงสัญญาณคลื่นรูปซายน์ให้เป็นเฟสเซอร์จะใช้ฟังก์ชัน cos เป็นหลักโดยที่ฟังก์ชันของสัญญาณโดยทั่วไปอยู่ในรูปของสมการที่ (7.17)

$$v_1(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \tag{7.17}$$

ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูปของเฟสเซอร์ได้เป็นดังสมการที่ (7.18)

$$v_1(t) = \mathrm{V_m}\angle\phi \tag{7.18}$$

.ในกรณีที่ฟังก์ชันของสัญญาณไม่ได้อยู่ในรูปของฟังก์ชันตามสมการที่ (7.17) สามารถดำเนินการได้ดังนี้

$$v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

จากสูตร $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90°)$

นั้นคือ $v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) = V_m \cos(\omega t + \phi - 90°)$

ดังนั้น $V_2 = \mathrm{V_m}\angle\phi - 90°$

ตัวอย่างที่ 7.4 จงให้เป็นเฟสแปลงคลื่นรูปซายด์ให้เป็นเฟสเซอร์

1) $v(t) = 100\cos(400\omega t - 30°)$

$$\mathrm{V} = 100\angle -30°$$

2) $$i(t) = -5\sin(550t - 110°)$$

เนื่องจากฟังก์ชันกระแส เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของฟังก์ชัน sine จำเป็นต้องแปลงค่าจากฟังก์ชัน sine ให้เป็นฟังก์ชัน cosine จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} i(t) &= -5\sin(550t - 110°) \\ &= -5\cos(550t - 110° - 90°) \end{aligned}$$

จากสูตร $-\cos(\omega t) = \cos(\omega t \pm 180°)$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} i(t) &= -5\cos(550t - 110° - 90°) \\ &= 5\cos(550t - 110° - 90° + 180) \\ &= 5\cos(550t - 20°) \end{aligned}$$

นั่นคือสามารถเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของเฟสเซอร์ได้ดังนี้ $\mathrm{I} = 5\angle -20°$

ตัวอย่างที่ 7.5 จงแปลงเฟสเซอร์ $\mathrm{V} = 10\angle 30°\ \mathrm{V}$ เป็นฟังก์ชัน cosine

วิธีทำ การแปลงเฟสเซอร์ให้เป็นฟังก์ชัน cosine นั้นสามารถดำเนินการได้ดังนี้

$$v(t) = 10\cos(\omega t + 30°)\ \mathrm{V}$$

โดยที่ การนำเสนอข้อมูลในรูปของเฟสเซอร์นั้นจะไม่มีข้อมูลความถี่ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 7.6 จงแปลงเฟสเซอร์ $\mathrm{V} = -10\angle 30°\ \mathrm{V}$ เป็นฟังก์ชัน cosine

วิธีทำ แปลงเป็นฟังก์ชัน cosine จะได้

$$\begin{aligned} v(t) &= -10\cos(\omega t + 30°)\ \mathrm{V} \\ &= 10\cos(\omega t + 30° - 180°)\ \mathrm{V} \\ &= 10\cos(\omega t - 150°)\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.7 $v(t) = 10\cos(100\pi t + 30°)$ การแปลงตัวแปรขึ้นกับเวลามาเป็นเฟสเซอร์ เนื่องจากการคำนวณเชิงตัวเลขฟังก์ชัน sin, cos ยากและมีความซับซ้อน เช่น

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 10\cos(2t) \\ v_2(t) &= 5\sin(2t + 40°) \\ v_1(t) + v_2(t) &= 10\cos(2t) + 5\sin(2t + 40°) \end{aligned}$$

จากสมการข้างต้นจำเป็นที่จะต้องใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเข้ามาช่วยซึ่งทำให้เกิดความยุ่งยากและซับซ้อน

จาก $v(t) = 10\cos(100\pi t + 30°)$ แปลงในรูปของเฟสเซอร์ได้ $\mathrm{V} = 10\angle 30°\ \mathrm{V}$

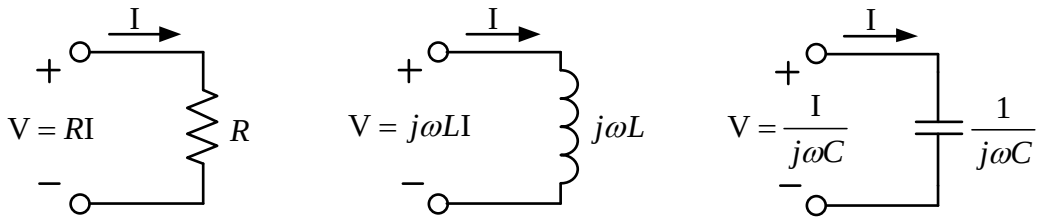
นำเฉพาะขนาดและมุมเฟสของรูปคลื่น cosine มาใส่ในเฟสเซอร์โดยที่ยึดฟังก์ชัน cos

$$\begin{aligned} v(t) &= 5\sin(2t+30^\circ) \\ &= 5\cos(2t+30^\circ-90^\circ) \\ &= 5\cos(2t-60^\circ) \end{aligned}$$

ดังนั้น $v(t)=5\cos(2t-60^\circ)$ แปลงได้เป็น $\mathrm{V}=10\angle 60^\circ$ V

7.3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแส

เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแสที่ตัวอุปกรณ์ต่าง ๆ ดังแสดงในภาพที่ 7.4



ภาพที่ 7.4 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแสของอุปกรณ์ต่าง ๆ

ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแสที่ตัวต้านทานเป็นดังสมการที่ (7.19)

$$\mathrm{V}=R\mathrm{I} \tag{7.19}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแสที่ตัวเหนี่ยวนำเป็นดังสมการที่ (7.20)

$$\mathrm{V}=j\omega L\mathrm{I} \tag{7.20}$$

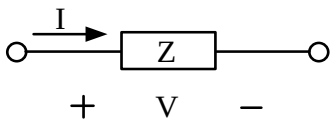
ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดันและเฟสเซอร์ของกระแสที่ตัวเก็บประจุเป็นดังสมการที่ (7.21)

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{I}}{j\omega C} \tag{7.21}$$

เมื่อ $j=\sqrt{-1}$

7.3.4 อิมพิแดนซ์

อิมพิแดนซ์ (impedance) คือ อัตราของเฟสเซอร์แรงดันและเฟสเซอร์กระแสที่อุปกรณ์ตัวหนึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ Z แสดงได้ดังภาพที่ 7.5



ภาพที่ 7.5 อิมพิแดนซ์

เมื่ออุปกรณ์หนึ่งมีแรงดันตกคร่อมเป็น V และมีกระแสไหลผ่านเป็น I ดังภาพที่ 7.5 จะนิยามอิมพิแดนซ์ (Z) ว่าเป็นอัตราส่วนระหว่างเฟสเซอร์ของแรงดัน (V) ต่อเฟสเซอร์ของกระแส (I) มีความสัมพันธ์ดังสมการที่ (7.22)

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{I}} \tag{7.22}$$

อิมพิแดนซ์มีหน่วยเป็นโอห์ม สามารถเขียนอิมพิแดนซ์ได้สองรูปแบบคือ ในรูป polar form แสดงได้ดังสมการที่ (7.23)

$$\mathrm{Z} = |Z| \angle \theta^{\circ} \tag{7.23}$$

หรือ rectangular form แสดงได้ดังสมการที่ (7.24)

$$\mathrm{Z} = R + jX \tag{7.24}$$

โดยที่ R เป็นส่วนจริงของอิมพิแดนซ์เรียกว่า resistance

X เป็นส่วนจินตภาพของอิมพิแดนซ์เรียกว่า reactance

ดังนั้นจะได้อิมพิแดนซ์ของตัวต้านทานเป็นดังสมการที่ (7.25)

$$\mathrm{Z}_R = R \tag{7.25}$$

อิมพิแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำเป็นดังสมการที่ (7.26)

$$\mathrm{Z}_L = j\omega L \tag{7.26}$$

และอิมพิแดนซ์ของตัวเก็บประจุเป็นดังสมการที่ (7.27)

$$\mathrm{Z}_C = \frac{1}{j\omega L} \tag{7.27}$$

7.3.5 แอตมิตแตนซ์

แอตมิตแตนซ์ (admittance) คือส่วนกลับของอิมพิแดนซ์หรือเป็นอัตราส่วนระหว่างเฟสเซอร์ของกระแส (I) ต่อเฟสเซอร์ของแรงดัน (V) มีความสัมพันธ์แสดงได้ดังสมการที่ (7.28)

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{V}} \tag{7.28}$$

แอตมิตแตนซ์มีหน่วยเป็นซีเมน สามารถเขียนแอตมิตแตนซ์ได้สองรูปแบบคือ ในรูป polar form แสดงได้ดังสมการที่ (7.29)

$$\mathrm{Y} = \left|\mathrm{Y}\right| \angle \phi^{\circ} \tag{7.29}$$

หรือ rectangular form แสดงได้ดังสมการที่ 7.30

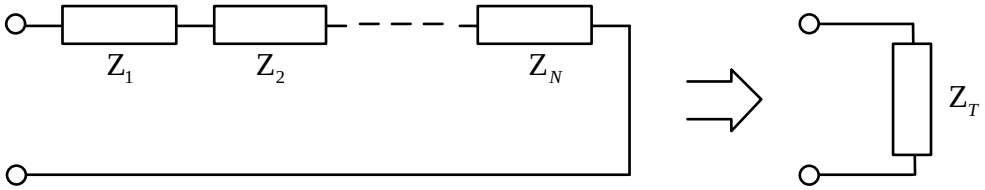
$$\mathrm{Y} = G + jB \tag{7.30}$$

โดยที่ G เป็นส่วนจริงของแอตมิตแตนซ์เรียกว่า conductance

B เป็นส่วนจินตภาพของแอตมิตแตนซ์เรียกว่า susceptance

7.3.6 การต่ออนุกรมและขนานของอิมพิแดนซ์

การต่ออนุกรมของอิมพิแดนซ์แสดงดังภาพที่ 7.6

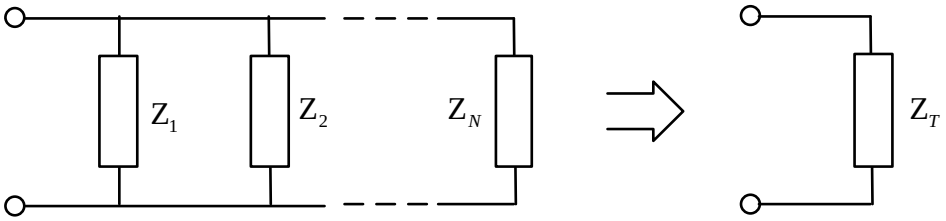


ภาพที่ 7.6 อิมพิแดนซ์ต่ออนุกรม

อิมพิแดนซ์ต่ออนุกรมกันจะได้อิมพิแดนซ์รวมเป็นดังสมการที่ 7.31

$$\mathrm{Z}_T = \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 + \cdots + \mathrm{Z}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Z}_i \tag{7.31}$$

การต่อขนานของอิมพิแดนซ์แสดงดังภาพที่ 7.7



ภาพที่ 7.7 อิมพิแดนซ์ต่อขนาน

อิมพิแดนซ์ต่อขนานกันจะได้อิมพิแดนซ์รวมเป็นดังสมการที่ 7.32

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i} \tag{7.32}$$

หรือ

$$Z_T = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_N}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i}}$$

หรือ

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

7.4 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

การวิเคราะห์แบบโนด แบบเมช หรือทฤษฎีของเทวินินและนอร์ตัน หรือการใช้ทฤษฎีซ้อนทับดังที่เคยได้อธิบายในบทก่อนหน้านี้แล้วนั้น โดยนำแนวความคิดเกี่ยวกับเฟสเซอร์ มาใช้ควบคู่กับขบวนการวิเคราะห์นั้นในการหาผลตอบสนองบังคับของวงจร (หรือผลตอบสนองที่สภาวะคงตัว) ต่อการป้อนอินพุตที่เป็นสัญญาณไซนูซอยด์ ซึ่งขั้นตอนการวิเคราะห์เป็นดังนี้

1. แปลงแหล่งจ่ายคลื่นรูปซายด์ให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์ และหาค่า ω ของคลื่นรูปซายด์จากแหล่งจ่าย

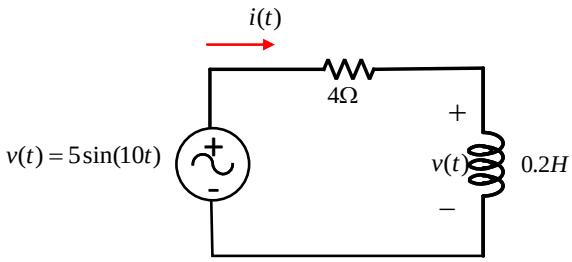
2. แปลง R, L, และ C ให้เป็นค่าอิมพีแดนซ์

3. แปลงตัวแปรกระแสและแรงดันทุกตัวในวงจรอยู่นรูปเฟสเซอร์

4. ทำการแก้ไขปัญหาโดยใช้ เทคนิคการแก้ไขต่างๆ เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ เช่นการวิเคราะห์แบบโนด แบบเมช หรือทฤษฎีการซ้อนทับซึ่งจะเลือกใช้วิธีไหนนั้น ต้องพิจารณาตามความเหมาะสม โดยใช้หลักการเช่นเดียวกันกับวงจรไฟฟ้ากระแสตรง (ขั้นตอนนี้ใช้การบวกลบคูณหารจำนวนเชิงซ้อน)

5. ทำการแปลงผลลัพธ์ที่ได้จากขบวนการวิเคราะห์ซึ่งอยู่ในรูปของเฟสเซอร์ให้อยู่ในรูปของสัญญาณไซนูซอยด์ โดยมีความถี่เดียวกันกับความถี่ของคลื่นรูปซายด์จากแหล่งจ่าย

ตัวอย่างที่ 7.7 จงหาค่าตัวแปรในรูปต่อไปนี้



วิธีทำ แปลงวงจรให้อยู่ในรูปเฟสเซอร์และอิมพีแดนซ์

แหล่งจ่าย

$$v(t) = 5\sin(10t)$$
$$= 5\cos(10t - 90^\circ)$$

จากสมการแหล่งจ่าย

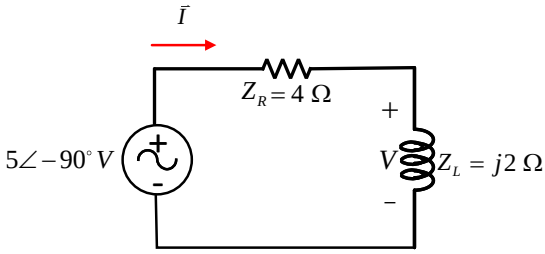
$$\omega = 10 \text{ rad/s}$$

จะได้เฟสเซอร์แรงดัน $\mathrm{V} = 5\angle -90^\circ \text{ V}$

พิจารณาตัวต้านทาน $\mathrm{Z}_R = R = 4 \ \Omega$

พิจารณาตัวเหนี่ยวนำ $\mathrm{Z}_L = j\omega L = j(10)(0.2) = j2 \ \Omega$

นำค่าเฟสเซอร์ทั้งหมดมาใส่ในวงจรเดิมจะได้



หากระแส I โดยใช้หลักการวิเคราะห์เหมือน DC

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}_{eq}} = \frac{5\angle -90^\circ}{4 + j2} = \frac{5\angle -90^\circ}{4.47\angle 26.57^\circ}$$
$$= \left(\frac{5}{4.47}\right)\angle -90^\circ - 26.57^\circ$$
$$= 1.18\angle -116.57^\circ \text{ A}$$

หา V จากการแบ่งแรงดัน $\mathrm{V} = \dfrac{j2}{4 + j2} \times 5\angle -90^\circ$

หรือหาจาก

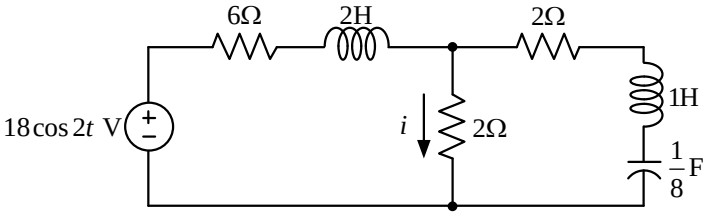
$$\mathrm{V} = (j2)\mathrm{I}$$
$$= (2\angle 90^\circ)(1.18\angle -116.57^\circ)$$
$$= 2.36\angle -26.57^\circ \text{ V}$$

แปลงกลับจากเฟสเซอร์ให้เป็นคลื่นรูปซายด์โดยที่ ω ยังคงเดิม ได้ดังต่อไปนี้

$$i(t) = 1.18\cos\left(10t - 116.57^\circ\right) \text{ A}$$

$$v(t) = 2.36\cos\left(10t - 26.57^\circ\right) \text{ V}$$

ตัวอย่างที่ 7.8 จากภาพที่ 7.8 จงหากระแส *i*

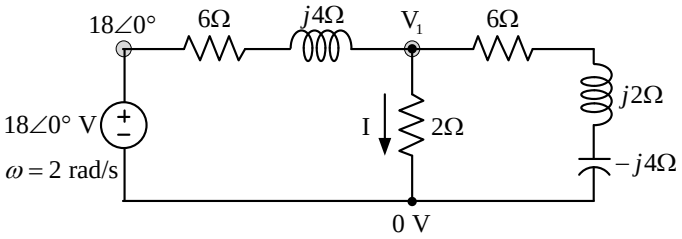


ภาพที่ 7.8 วงจรที่มีอินพุตเป็นสัญญาณไซนูซอยด์

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1 เปลี่ยนอุปกรณ์ในวงจรทั้งหมดเพื่อวิเคราะห์แบบเฟสเซอร์ โดยใช้ความถี่จากแหล่งจ่ายคือ ω = 2 rad/s

แหล่งจ่าย	$18\cos 2t$ V	- - - >	$18\angle 0^\circ$ V
ตัวต้านทาน	6Ω	- - - >	6Ω
	2Ω	- - - >	2Ω
	2Ω	- - - >	2Ω
ตัวเหนี่ยวนำ	2H	- - - >	$j\omega L = (j2)(2) = j4\Omega$
	1H	- - - >	$j\omega L = (j2)(1) = j2\Omega$
ตัวเก็บประจุ	$\frac{1}{8}$F	- - - >	$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{(j2)(\frac{1}{8})} = -j4\Omega$

ขั้นตอนที่ 2 เลือกวิธีการวิเคราะห์เช่นในที่นี้ใช้วิธีการวิเคราะห์แบบโนด



ภาพที่ 7.9 วงจรที่เปลี่ยนรูปเป็นเฟสเซอร์

KCL :
$$\frac{V_1 - 18\angle 0^\circ}{6 + j4} + \frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{2 + j2 - j4} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6 + j4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 - j2}\right)V_1 = \frac{18\angle 0^\circ}{6 + j4}$$

จะได้ $\mathrm{V}_1 = 2.828\angle -45^\circ \text{ V}$

จะได้กระแสไฟฟ้าในรูปแบบเฟสเซอร์เป็น

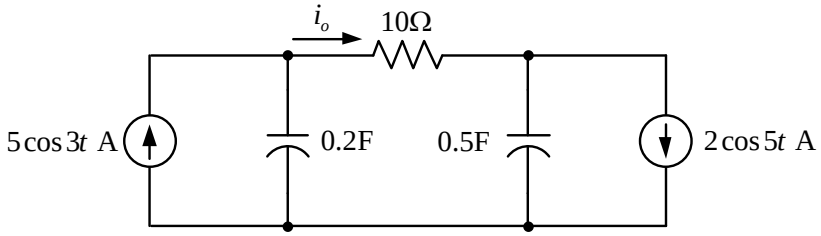
$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}_1}{2} = 1.414\angle -45^\circ \text{ A}$$

ขั้นตอนที่ 3 แปลงกลับให้อยู่ในรูปสัญญาณไซนูซอยด์

$$i(t) = 1.414\cos(2t - 45^\circ) \text{ A}$$

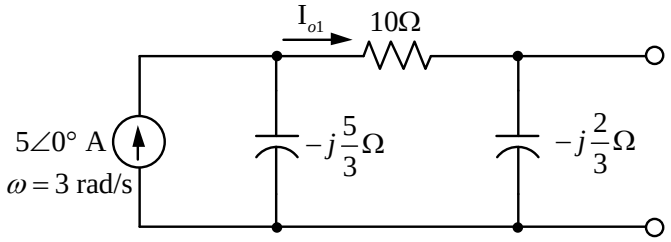
การวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการทับซ้อนกับเฟสเซอร์ ในกรณีที่วงจรมีแหล่งจ่ายมากกว่าหนึ่งแหล่งโดยที่มีแหล่งจ่ายหนึ่งตัว(หรือมากกว่า) มีความถี่ไม่เท่ากับแหล่งจ่ายตัวอื่นๆ เราจำเป็นที่ต้องใช้ทฤษฎีการทับซ้อนในการวิเคราะห์วงจร เนื่องจากว่าค่าอิมพิแดนซ์ของตัวเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุมีค่าที่ขึ้นกับความถี่ ดังนั้นการวิเคราะห์จึงต้องแยกคิดผลตอบสนองที่เกิดจากแหล่งจ่ายแต่ละความถี่นั้น

ตัวอย่างที่ 7.9 จากภาพที่ 7.10 จงหา i_o



ภาพที่ 7.10 วงจรที่มีแหล่งจ่ายความถี่ไม่เท่ากัน

คิดผลของแหล่งจ่ายที่มีความถี่ ω = 3 rad/s



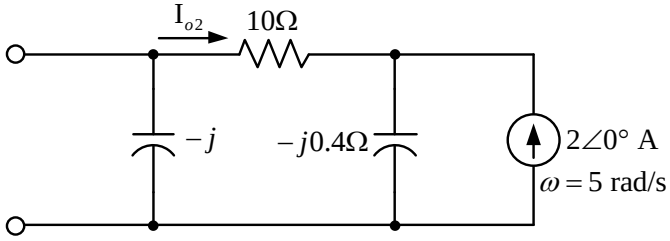
ภาพที่ 7.11 วงจรที่คิดผลของแหล่งจ่ายที่มีความถี่ ω = 3 rad/s

$$\mathrm{I}_{o1} = \left[\frac{\left(-j\frac{5}{3}\right)}{\left(-j\frac{5}{3}\right)+\left(10-j\frac{2}{3}\right)}\right] 5\angle 0^\circ$$

$$\mathrm{I}_{o1} = 0.811\angle -76.87^\circ \text{ A}$$

ได้ $i_{o1}(t) = 0.811\cos(3t - 76.87^\circ) \text{ A}$

คิดผลของแหล่งจ่ายที่มีความถี่ ω = 5 rad/s



ภาพที่ 7.12 วงจรที่คิดผลของแหล่งจ่ายที่มีความถี่ ω = 5 rad/s

$$\mathrm{I}_{o2} = \left[\frac{(-j0.4)}{(-j0.4)+(10-j)}\right] 2\angle 0^\circ$$

$$\mathrm{I}_{o2} = 0.079\angle -82.03^\circ \text{ A}$$

ได้ $i_{o2}(t) = 0.079\cos(5t - 82.03^\circ) \text{ A}$

ดังนั้นผลตอบสนองรวมที่เกิดจากแหล่งจ่ายทั้งสองคือ

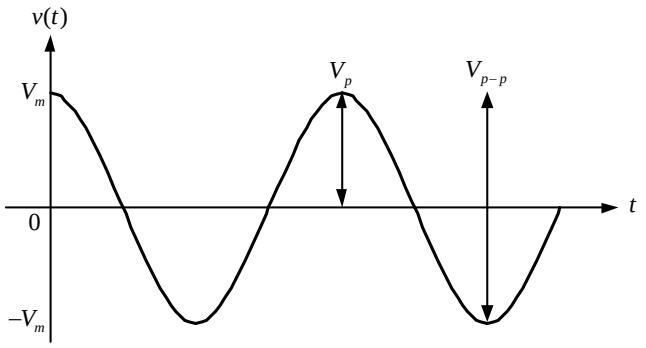
$$i_o(t) = i_{o1}(t) + i_{o2}(t)$$

นั่นคือ

$$i_o(t) = 0.811\cos(3t - 76.87^\circ) + 0.079\cos(5t - 82.03^\circ) \text{ A}$$

7.5 ค่ารากเฉลี่ยกำลังสอง

ค่ารากเฉลี่ยกำลังสองหรือค่าอาร์เอ็มเอส rms (root mean square) หรือ effective กำหนดให้ $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$



ภาพที่ 7.13 การวัดค่ารากเฉลี่ยกำลังสอง และค่าสูงสุด ของสัญญาณรูปคลื่นไซนูซอยด์

นิยามของคำว่า

peak voltage (V_p) จากรูปกราฟ $V_p = V_m$

peak – to – peak voltage (V_{p-p}) จากรูปกราฟ $V_{p-p} = 2V_m$

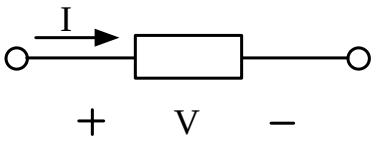
ดังนั้นค่า effective หรือค่า rms (root mean square) ของ $v(t)$ หาได้จากสมการที่ (7.33)

$$V_{ef} = V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \tag{7.33}$$

เช่น ไฟฟ้าบ้านขนาด $220V_{rms}$ นั่นคือ $220 \times \sqrt{2} = 311.3 \text{ V} = 311.3 \text{ V}$

7.6 กำลังไฟฟ้าวงจรกระแสสลับ

การหากำลังไฟฟ้ากระแสสลับของวงจรไฟฟ้าในภาพที่ 6.14 สามารถพิจารณาหาค่ากำลังไฟฟ้าได้ดังนี้



ภาพที่ 7.14 วงจรไฟฟ้าพื้นฐาน

ถ้าอุปกรณ์มีกระแสไหลผ่านซึ่งอยู่ในรูปของสมการที่ (7.34) หรือ สมการที่ (7.35)

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \tag{7.34}$$

หรือ

$$\mathrm{I} = I_m \angle \phi_i \tag{7.35}$$

และมีแรงดันตกคร่อมซึ่งอยู่ในรูปของสมการที่ (7.36) หรือ สมการที่ (7.37)

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \tag{7.36}$$

หรือ

$$\mathrm{V} = V_m \angle \phi_v \tag{7.37}$$

ดังนั้นหากำลังไฟฟ้ากระแสสลับได้ดังนี้

7.6.1 กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย (average power) หรือ กำลังไฟฟ้าจริง (real power) มีหน่วยเป็นวัตต์ สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (7.38)

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i) \tag{7.38}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}V_{rms}\right)\left(\sqrt{2}I_{rms}\right)\cos(\phi_v - \phi_i) \\ &= V_{rms} I_{rms} \cos(\phi_v - \phi_i) \end{aligned} \tag{7.39}$$

7.6.2 กำลังไฟฟ้าปรากฏ และ ตัวประกอบกำลัง

จากสูตรกำลังไฟฟ้าเฉลี่ย

$$\mathrm{P} = \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m}_{S} \underbrace{\cos(\phi_v - \phi_i)}_{pf} \tag{7.40}$$

ดังนั้นกำลังไฟฟ้าปรากฏ คือ

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{rms} I_{rms} \tag{7.41}$$

มีหน่วยเป็น โวลต์-แอมป์ (VA) และตัวประกอบกำลังคือ

$$pf = \cos(\phi_v - \phi_i) \tag{7.42}$$

ดังนั้น

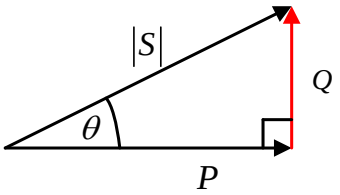
$$\mathrm{P} = Spf \tag{7.43}$$

ค่าตัวประกอบกำลังมี 2 แบบ คือ

- leading pf หมายความว่า มุมของกระแสนำหน้ามุมแรงดัน $(\phi_v - \phi_i)$ มีค่าเป็น “ลบ”

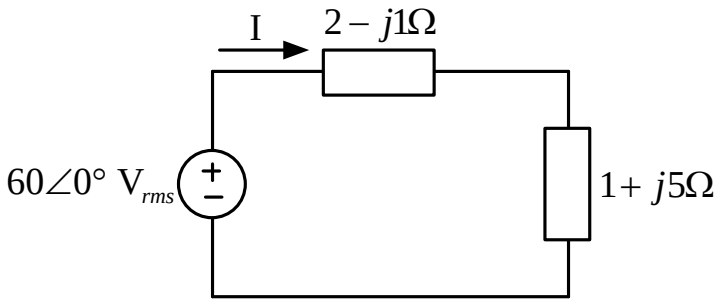
- lagging pf หมายความว่า มุมของกระแสตามหลังหรือล้าหลังมุมแรงดัน $(\phi_v - \phi_i)$ มีค่าเป็น “บวก”

ในการคำนวณตัวประกอบกำลังต้องระบุด้วยว่าเป็นแบบนำหน้าหรือล้าหลังซึ่งจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 สามารถเขียนความสัมพันธ์ของกำลังไฟฟ้าและตัวประกอบกำลังในรูปของสามเหลี่ยมกำลังได้ดังนี้



$$pf = \cos\theta \text{ มุมระหว่าง } \left(0^\circ - 90^\circ\right)$$
$$= \cos 0^\circ = 1$$
$$= \cos 30^\circ = 0.86$$
$$= \cos 90^\circ = 0$$

ตัวอย่างที่ 7.10 จงหากระแส I กำลังเฉลี่ย กำลังปรากฏ และตัวประกอบกำลังที่แหล่งจ่ายแรงดัน



วิธีทำ หากระแสที่ไหลผ่านแหล่งกำเนิดแรงดัน

$$\mathrm{I} = \frac{60\angle 0^\circ}{(2 - j)(1 + j5)} = 12\angle -53.13^\circ \text{ A}_{rms}$$

ค่าแรงดันที่ตกคร่อมแหล่งจ่ายแรงดันมีค่าเป็น $60\angle 0^\circ \text{ V}_{rms}$ สามารถหาค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ย กำลังไฟฟ้าปรากฏ และตัวประกอบกำลังที่แหล่งจ่ายแรงดันได้ดังนี้

กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย :

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)$$
$$= V_{rms} I_{rms} \cos(\phi_v - \phi_i)$$
$$= (60)(12)\cos(0^\circ - (-53.13^\circ))$$
$$= 432 \text{ W}$$

กำลังไฟฟ้าปรากฏ :

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{rms} I_{rms} = (60)(12) = 720 \text{ VA}$$

หาตัวประกอบกำลังที่แหล่งจ่ายแรงดัน :

$$\begin{aligned} pf &= \cos(\phi_v - \phi_i) \\ &= \cos(0° - (-53.13°)) \\ &= \cos(53.13°) \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

$\phi_v - \phi_i$ มีค่าเป็นบวกแสดงว่ามุมเฟสแรงดันนำมุมเฟสกระแส ดังนั้นตัวประกอบกำลังเป็นแบบล้าหลัง

7.6.3 กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

จากภาพที่ 7.14 กำหนดให้ $\mathrm{V} = V_m \angle \phi_v$ V และ $\mathrm{I} = I_m \angle \phi_i$ A ดังนั้น สูตรการคำนวณกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{V}\mathrm{I}^* \tag{7.44}$$

หน่วยของกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนมีหน่วยเป็นโวลต์-แอมป์ (VA)

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \frac{1}{2}\mathrm{V}\mathrm{I}^* \\ &= \frac{1}{2}\left(V_m \angle \phi_v\right)\left(I_m \angle \phi_i\right)^* \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m}_{S} \angle \phi_v - \phi_i \end{aligned} \tag{7.45}$$

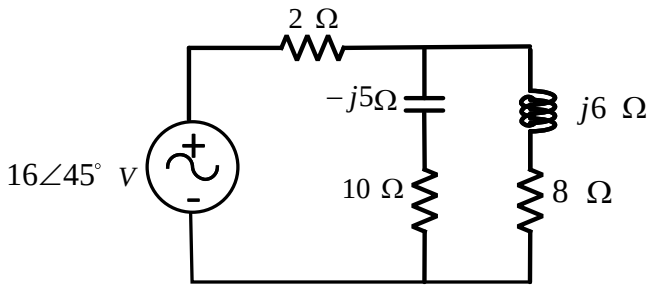
แปลงเป็นจำนวนเชิงซ้อนรูปแบบ rectangular form

$$\mathrm{S} = \underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \cos(\phi_v - \phi_i)}_{P} + j\underbrace{\frac{1}{2}V_m I_m \sin(\phi_v - \phi_i)}_{Q} \tag{7.46}$$

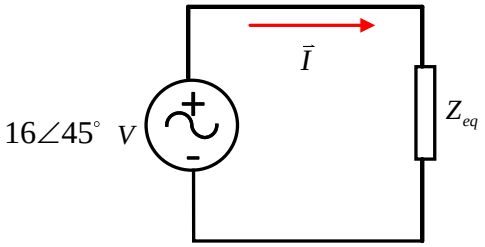
กำลังไฟฟ้ากำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ (reactive power) แทนด้วย Q มีหน่วยเป็นวาร์ (VAR)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}V_m I_m \sin\left(\phi_v - \phi\right) \\ &= V_{rms} I_{rms} \sin\left(\phi_v - \phi_i\right) \end{aligned} \tag{7.47}$$

ตัวอย่างที่ 7.11 จากวงจรต่อไปนี้ จงหาค่า I กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย กำลังไฟฟ้าปรากฏ กำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน และตัวประกอบกำลังที่แหล่งจ่ายแรงดัน



วิธีทำ โจทย์ถามกำลังไฟฟ้าที่อุปกรณ์ตัวใดจะต้องหาเฟสเซอร์แรงดันและเฟสเซอร์กระแสที่อุปกรณ์ตัวนั้น



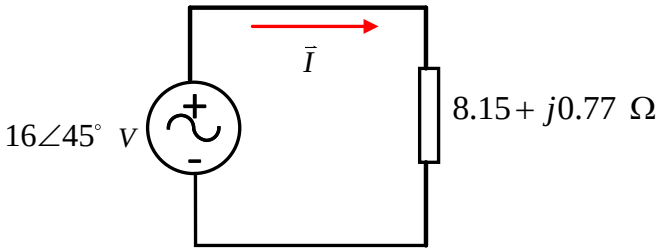
$$Z_{eq} = (10 - j5)//(8 + j6) + 2$$

$$= \frac{(10 - j5)(8 + j6)}{(10 - j5) + (8 + j6)} + 2$$

$$= \frac{(11.18\angle -26.57^\circ)(10\angle 36.86^\circ)}{(18 + j1)} + 2$$

$$= \frac{111.8\angle 10.29^\circ}{18.03\angle 3.18^\circ} + 2 = 6.2\angle 7.11^\circ + 2$$

$$Z_{eq} = 6.15 + j0.77 + 2 = 8.15 + j0.77 \ \ \Omega$$



$$V = 16\angle 45^\circ \ \text{V}$$

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{16\angle 45^\circ}{8.15 + j0.77}$$

$$\bar{I} = 1.954\angle 39.62^\circ \ \ A$$

พิจารณาวงจรหา $P,\ Q,\ S,\ pf$

ตัวประกอบกำลังไฟฟ้า

$$p.f. = \cos\left(\theta_v - \theta_i\right)$$
$$= \cos\left(45 - 39.62\right) = 0.995 \quad \text{lagging}$$

กำลังไฟฟ้าจริง

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\left(\theta_v - \theta_i\right)$$
$$V = 16\angle 45^\circ \quad \text{V}$$
$$P = \frac{1}{2}(16)(1.954)(0.995)$$
$$= 15.56 \quad \text{W}$$

กำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin\left(\theta_v - \theta_i\right)$$
$$= \frac{1}{2}(16)(1.954)\sin\left(45 - 39.62\right)$$
$$Q = 1.466 \quad \text{VAR}$$

กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน

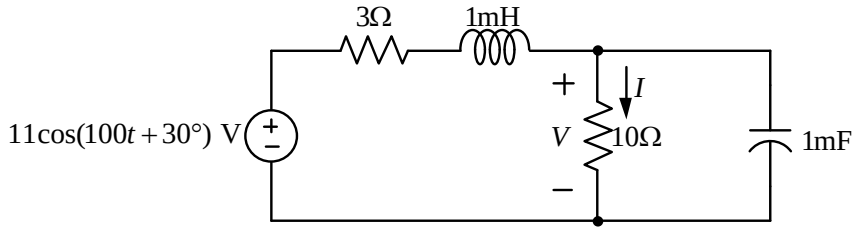
$$S = P + jQ$$
$$= 15.56 + j1.466 \quad \text{VA}$$

กำลังไฟฟ้าปรากฏ

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$
$$= \sqrt{15.56^2 + 1.466^2}$$
$$= 15.63 \quad \text{VA}$$

$$S = \frac{1}{2} V_m I_m{}^*$$
$$= \frac{1}{2}\left(16\angle 45^\circ\right)\left(1.954\angle 39.62^\circ\right)^*$$
$$= \frac{1}{2}\left(16\angle 45^\circ\right)\left(1.954\angle -39.62^\circ\right)$$
$$S = 15.63\angle 5.38^\circ \quad \text{VA} \quad \text{(Polar)}$$
$$S = 15.56 + j1.466 \quad \text{VA} \quad \text{(Rect.)}$$

ตัวอย่างที่ 7.12 จากวงจรต่อไปนี้ จงหาค่า V I กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน กำลังไฟฟ้าเฉลี่ย กำลังไฟฟ้าปรากฏ กำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ และตัวประกอบกำลังที่ R (10Ω)



วิธีทำ ทำการแปลงเฟสเซอร์แหล่งจ่ายไฟฟ้า $11\cos(100t+30°)\ \text{V}$ - - > $11\angle 30°\ \text{V}$

แปลงอิมพีแดนซ์ที่ตัวอุปกรณ์ทุกตัวในวงจร จะได้

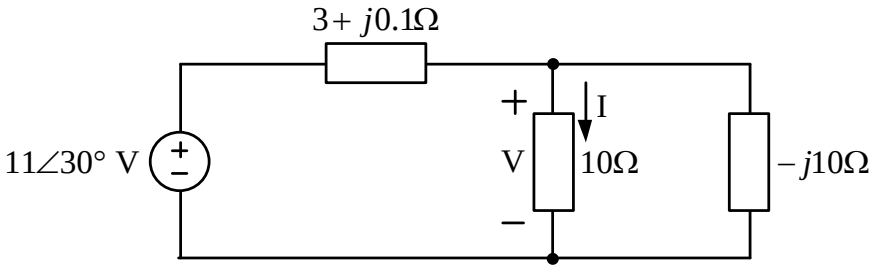
$$R = 3\ \Omega \quad \text{- - >} \quad \text{Z} = 3\ \Omega$$

$$R = 10\ \Omega \quad \text{- - >} \quad \text{Z} = 10\ \Omega$$

$$L = 1\ \text{mH} \quad \text{- - >} \quad \text{Z} = j\omega L = j(100)(1\times 10^{-3}) = j0.1\ \Omega$$

$$C = 1\ \text{mF} \quad \text{- - >} \quad \text{Z} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(100)(1\times 10^{-3})} = -j10\ \Omega$$

เขียนวงจรใหม่จะได้



วิเคราะห์หา V จากการแบ่งแรงดัน จะได้

$$\begin{aligned}\text{V} &= \frac{(10 \,||\, -j10)}{(3+j0.1)+(10 \,||\, -j10)}\times 11\angle 30° \\ &= \frac{(5-j5)}{(3+j0.1)+(5-j5)}\times 11\angle 30° \\ &= \frac{(5-j5)}{(8+j4.9)}\times 11\angle 30° \\ &= \frac{7.07\angle -45°}{9.38\angle -31.49°}\times 11\angle 30° \\ &= 8.29\angle 16.49°\ \text{V}\end{aligned}$$

หรือ $\text{V} = 8.29\cos(100t+16.49°)\ \text{V}$

วิเคราะห์กระแส I จากกฎของโอห์ม จะได้

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Z}} = \frac{8.29\angle 16.49^\circ}{10} = \frac{8.29\angle 16.49^\circ}{10\angle 16.49^\circ}$$
$$= 0.829\angle 16.49^\circ \text{ V}$$

หรือ $\mathrm{I} = 0.829\cos(100t + 16.49^\circ)$ A

วิเคราะห์หากำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน (S) จาก

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{VI}^*$$
$$= \frac{1}{2}(8.29\angle 16.49^\circ)(0.829\angle -16.49^\circ)$$
$$= 3.44\angle 0^\circ \text{ VA}$$

หรือ $\mathrm{S} = 3.44 + j0$ VA

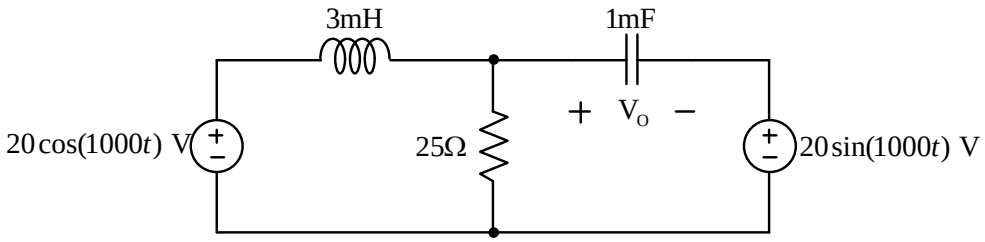
ผลการคำนวณกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนจะได้ว่า

ค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ย (P)	=	Re(S)	=	3.44 W
ค่ากำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ (G)	=	Im(S)	=	0 VAR
ค่าตัวกำลังไฟฟ้าปรากฏ (S)	=	|S|	=	3.44 VA
ค่าตัวประกอบกำลัง (pf)	=	cos(0)	=	1

ตัวอย่างที่ 7.13 วงจรไฟฟ้ากระแสสลับดังรูป แสดงวิธีคำนวณ ซึ่งกำหนดให้ใช้ทฤษฎีการซ้อนทับ (superposition) เท่านั้น ร่วมกับเทคนิคอื่น ๆ เพื่อหาดังต่อไปนี้

ก) ค่า Vo

ข) ค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ย กำลังไฟฟ้าปรากฏ กำลังไฟฟ้ารีแอกทีฟ และกำลังไฟฟ้าของอุปกรณ์ตัวเก็บประจุ



วิธีทำ

แปลงเฟสเซอร์ที่แหล่งจ่ายทุกตัว

$20\cos(1000t)$ V - - > $20\angle 0^\circ$ V

$20\sin(1000t)$ V - - > $20\angle -90^\circ$ V

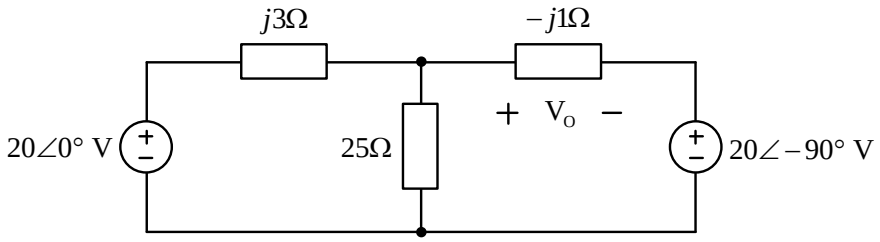
แปลงอิมพีแดนซ์ที่ตัวอุปกรณ์ทุกตัวในวงจร

$R = 25\ \Omega$ - - > $\mathrm{Z} = 25\ \Omega$

$L = 3$ mH - - > $\mathrm{Z} = j\omega L = j(1000)(3\times 10^{-3}) = j3\ \Omega$

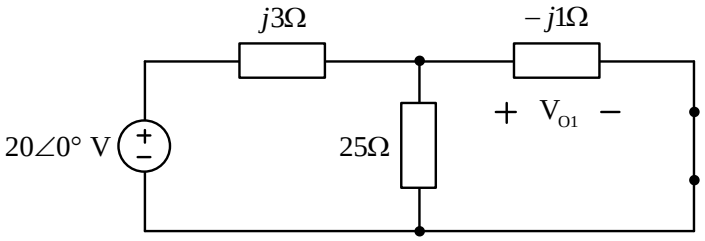
$$C = 1\ \text{mF} \qquad \text{- - >} \qquad \text{Z} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{(1000)(1\times10^{-3})} = -j1\ \Omega$$

เขียนวงจรใหม่จะได้



วิเคราะห์หา V_O ใช้ทฤษฎีการซ้อนทับ

พิจารณาที่แหล่งจ่าย $20\angle0°\ \text{V}$



จากวงจรข้างต้น หา V_{O1} จากการแบ่งแรงดันจะได้

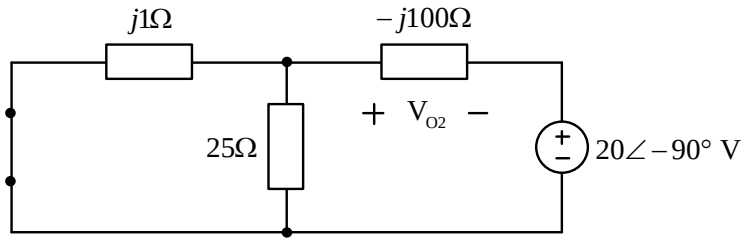
$$\text{V}_{\text{O1}} = \frac{(25\,||\,-j1)}{j3+(25\,||\,-j1)}\times20\angle0°$$

$$= \frac{1\angle-87.7°}{2\angle88.85°}\times20\angle0°$$

$$= 10\angle-176.55°\ \text{V}$$

หรือ $\text{V}_{\text{O1}} = -9.98 - j0.6\ \text{V}$

พิจารณาที่แหล่งจ่าย $20\angle-90°\ \text{V}$



จากวงจรข้างต้น สามารถหา V_{O2} จากการแบ่งแรงดันจะได้

$$\text{V}_{\text{O2}} = \frac{-j1}{-j1+(j3\,||\,25)}\times20\angle-90°$$

$$= \frac{1\angle-90°}{1.97\angle79.77°}\times20\angle-90°$$

$$= 10.15\angle-259.77°\ \text{V}$$

เนื่องจากกระแสไหลเข้าขั้วลบของ V_{O2} ดังนั้น

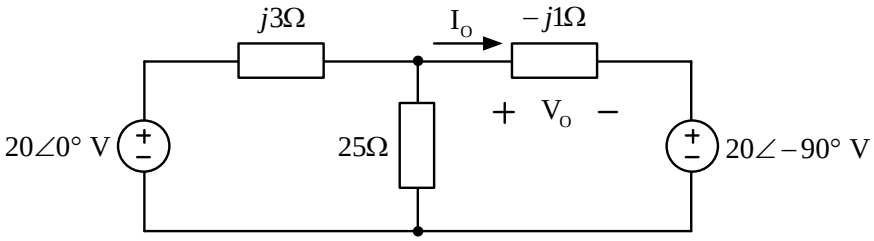
$$\mathrm{V}_{O2} = -(-1.80 + j9.98)$$
$$= 1.80 - j9.98 \text{ V}$$

รวมทั้งสองแหล่งจ่ายเพื่อหา V_O จะได้

$$\mathrm{V}_O = \mathrm{V}_{O1} + \mathrm{V}_{O2}$$
$$= -9.98 - j0.6 + 1.80 - j9.98$$
$$= -8.18 - j10.58 \text{ V}$$

หรือ $\mathrm{V}_O = 13.37\angle 52.92° \text{ V}$

วิเคราะห์หา I_O ของวงจร



$$\mathrm{I}_O = \frac{\mathrm{V}_O}{\mathrm{Z}} = \frac{13.37\angle 52.92°}{-j1} = \frac{13.37\angle 52.92°}{1\angle -90°} = 13.37\angle 142.29° \text{ A}$$

วิเคราะห์หากำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน (S)

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{VI}^*$$
$$= \frac{1}{2}(13.37\angle 52.29°)(13.37\angle -142.29°)$$
$$= 89.37\angle -90° \text{ VA}$$

หรือ $\mathrm{S} = 0 - j89.37° \text{ VA}$ ($\mathrm{S} = P + jQ \text{ VA}$)

7.7 สรุป

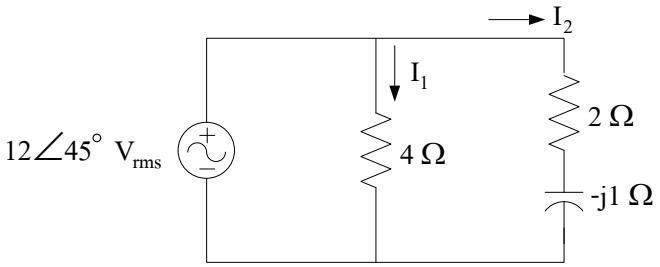
เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงวงจรกระแสสลับในสถานะอยู่ตัว องค์ประกอบของวงจรประกอบไปด้วยแหล่งกำเนิดกระแสและแหล่งกำเนิดแรงดันที่เป็นไซนูซอยด์ ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ แบบจำลองของพารามิเตอร์ในวงจรที่ถูกแปลงจากค่าในโดเมนเวลาไปอยู่ในโดเมนความถี่ รวมถึงการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับจะใช้หลักการเทคนิคเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสตรง

7.8 คำถามท้ายบท

1. ถ้ากระแสที่ไหลผ่านโหลดเป็น $i(t)=2\cos(1000t-30^\circ)$ mA และแรงดันที่ตกคร่อมโหลดเป็น $v(t)=10\cos(1000t+25^\circ)$ V โหลดอิมพิแดนซ์ Z_L มีค่าเท่าใด

ก). $5\angle 55^\circ$ kΩ ข). $20\angle 55^\circ$ kΩ ค). $5\angle -5^\circ$ kΩ ง). $20\angle -5^\circ$ kΩ

2. จงหากระแส I_2 ในรูปวงจร



ก). $5.36\angle 71.6^\circ$ A_{rms} ข). $3.34\angle 82.7^\circ$ A_{rms}

ค). $5.47\angle 68.6^\circ$ A_{rms} ง).$4.33\angle 72.1^\circ$ A_{rms}

3. จากข้อที่ 2 จงหากำลังไฟฟ้าที่แหล่งจ่าย $12\angle 45^\circ$ V_{rms} จ่ายออกมา

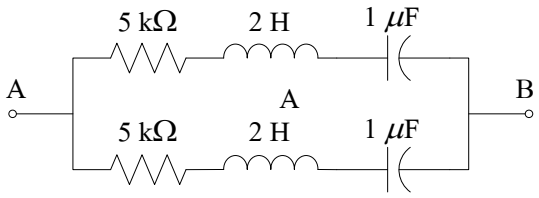
ก). 93.5 W (จ่าย) ข). 46.8 W (จ่าย)

ค). $97.85\angle -17.1^\circ$ VA (จ่าย) ง). 93.5 + j28.8 VA (จ่าย)

4 สืบเนื่องจากข้อที่ 3 ตัวประกอบกำลังมีค่าเท่าไหร่

ก). 0 ข). 1 ค). 0.96 lagging ง). 0.96 leading

5 กำหนดให้ ω = 1000 rad/sec จงหา Z_{AB}



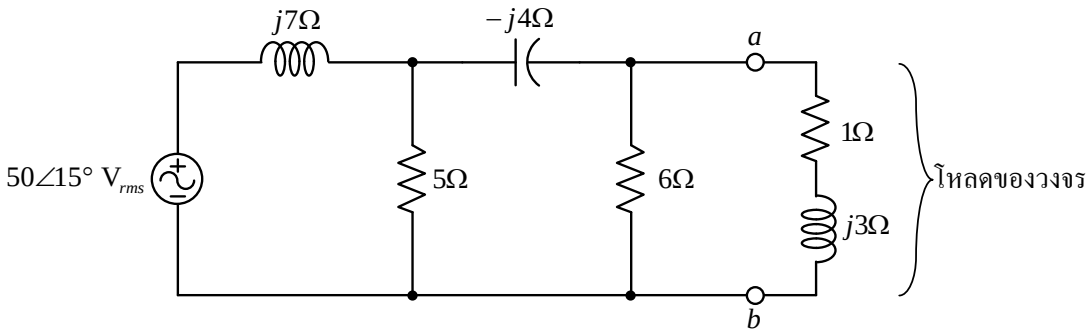
ก). 5 + j3 kΩ ข). 5 + j1 kΩ ค). 2.5 + j1.5 kΩ ง). 2.5 + j0.5 kΩ

6 ถ้ากระแสที่ไหลผ่านโหลดเป็น $i(t)=2\cos(1000t-30^\circ)$ mA และแรงดันที่ตกคร่อมโหลดเป็น $v(t)=10\cos(1000t+25^\circ)$ V โหลดอิมพิแดนซ์ Z_L มีค่าเท่าใด

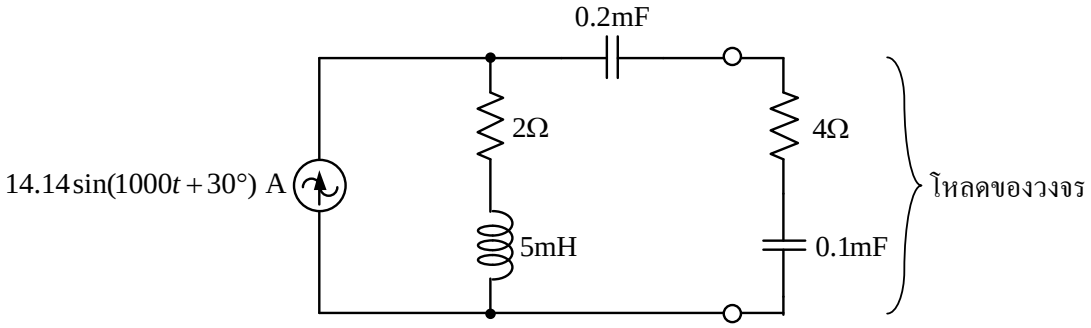
ก). $5\angle 55^\circ$ kΩ ข). $20\angle 55^\circ$ kΩ ค). $5\angle -5^\circ$ kΩ ง). $20\angle -5^\circ$ kΩ

7. จงหาคำตอบของ $(5+j3)\div(2+j1)$

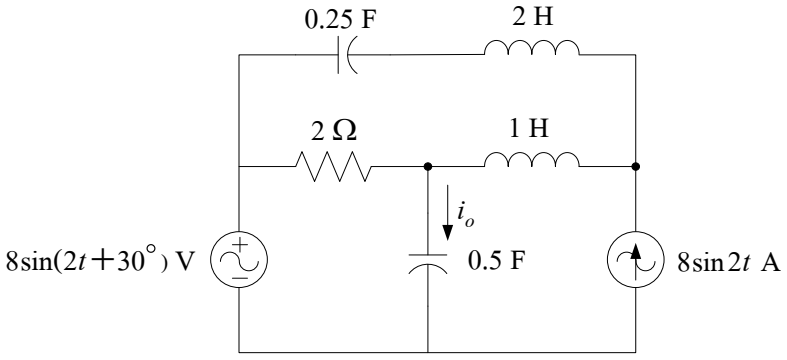
8 จากวงจรต่อไปนี้จงหาจงหากระแสโหลด โดยใช้วิธีหาวงจรสมมูลเทวินิน พิจารณาที่ขั้วต่อ a-b



9. จากรูปวงจรที่กำหนดให้ จงหากำลังไฟฟ้าจริง กำลังไฟฟ้ารีแอคทีฟ กำลังไฟฟ้าปรากฏ กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนและค่าตัวประกอบกำลังของโหลด เมื่อโหลดคือ ตัวต้านทาน 4 Ω ต่ออนุกรมกับตัวเก็บประจุ 0.1 mF



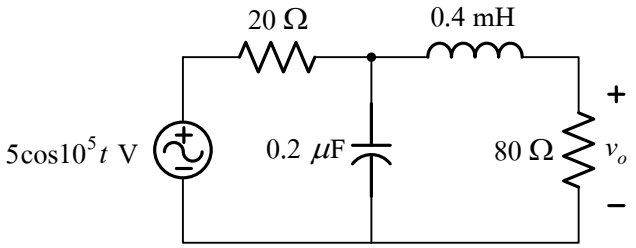
10 จากรูปวงจรจงตอบคำถามต่อไปนี้



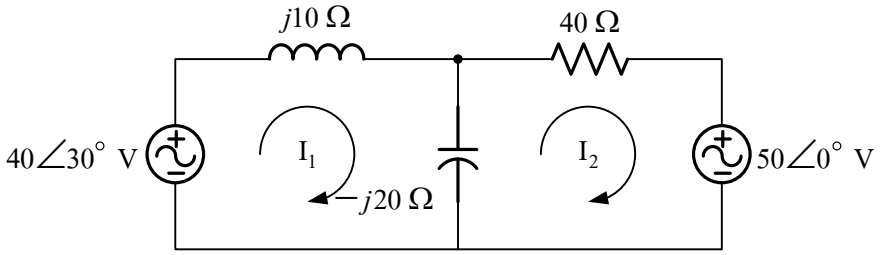
10.1) จงหา i_o โดยใช้วิธีการวิเคราะห์วงจรแบบ Node Analysis

10.2) จงหากำลังไฟฟ้าจริง กำลังไฟฟ้ารีแอคทีฟ กำลังไฟฟ้าปรากฏ กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อน และค่าตัวประกอบกำลังที่แหล่งจ่าย

11. จากรูปวงจรต่อไปนี้ จงคำนวณหา v_o



12. จากรูปวงจรต่อไปนี้ จงคำนวณหา I_1 และ I_2



แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 8
ระบบไฟฟ้าสามเฟส

หัวข้อเนื้อหา

8.1 บทนำ

8.2 ระบบไฟฟ้ากำลัง

- 8.2.1 ระบบผลิตกำลังไฟฟ้า
- 8.2.2 ระบบส่งกำลังไฟฟ้า
- 8.2.3 ระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้า
- 8.2.4 ระบบไฟฟ้าในประเทศไทยและหน่วยงานที่รับผิดชอบในระบบไฟฟ้ากำลัง

8.3 ระบบกำลังไฟฟ้าสามเฟส

8.4 การวิเคราะห์วงจรแบบวาย-วาย

8.5 การวิเคราะห์วงจรแบบวาย-เดลต้า

8.6 สรุป

8.7 คำถามท้ายบท

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

นักศึกษาสามารถอธิบายสิ่งต่อไปนี้ได้

1. องค์ประกอบของระบบไฟฟ้ากำลัง
2. บทบาทและหน้าที่ความรับผิดชอบขององค์กรที่เกี่ยวข้องกับระบบไฟฟ้ากำลัง
3. วิเคราะห์และคำนวณระบบกำลังไฟฟ้าสามเฟส
4. วิเคราะห์วงจรในระบบไฟฟ้าสามเฟสที่มีการต่อวงจรแบบ วาย-วาย และ วาย-เดลต้า

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1. วิธีสอน

1.1 แบบบรรยาย

1.2 แบบอภิปราย

1.3 แบบเน้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง

1.4 แบบค้นคว้าหาความรู้

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 ผู้สอนจะมีการตั้งคำถามระหว่างการสอน เพื่อเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฝึกคิดและแก้ไขปัญหาต่างๆ ในระหว่างการจัดการเรียนการสอน

2.2 เปิดโอกาสให้นักศึกษาร่วมอภิปรายเนื้อหา และทำแบบฝึกหัดในชั้นเรียน

2.3 มอบหมายแบบฝึกหัดให้ทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนวิชา ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า
2. เว็บไซต์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

1. ทดสอบท้ายคาบ
2. ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมเมื่อมีการตั้งโจทย์ระหว่างกระบวนการเรียนการสอน
3. ให้นำแบบฝึกหัดท้ายบทกลับไปทำที่บ้านและ นำกลับมาส่งในสัปดาห์ถัดไป
4. มีการให้คะแนนทั้งสามส่วนตามที่กล่าวมาข้างต้น เพื่อใช้เป็นคะแนนเก็บระหว่างภาค

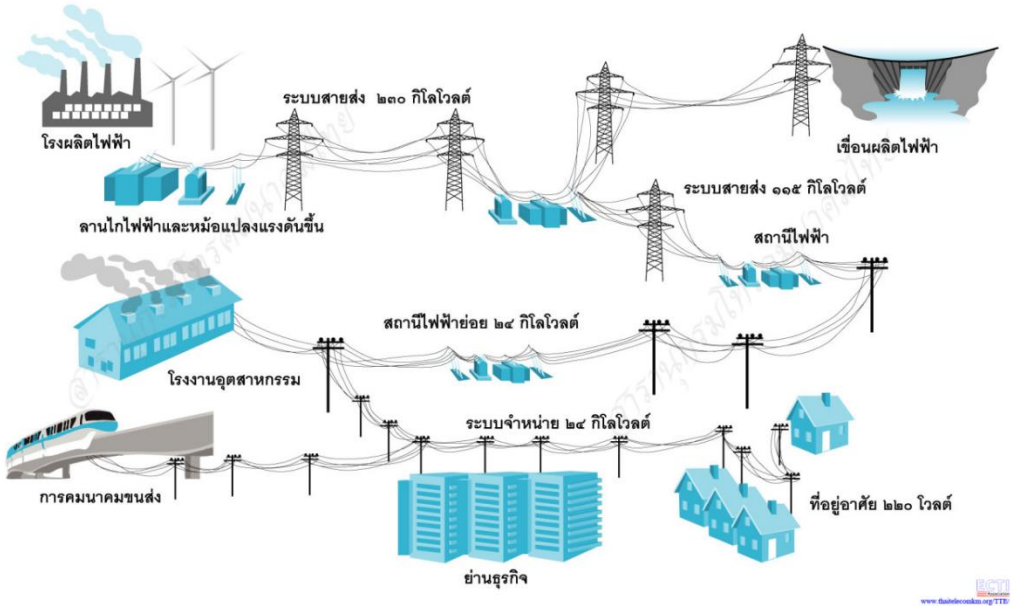
บทที่ 8
ระบบไฟฟ้าสามเฟส

8.1 กล่าวนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงระบบไฟฟ้าสามเฟสซึ่งประกอบไปด้วย ระบบไฟฟ้ากำลัง ระบบกำลังไฟฟ้าสามเฟส การวิเคราะห์วงจรแบบ Y-Y การวิเคราะห์วงจรแบบ Y-Δ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

8.2 ระบบไฟฟ้ากำลัง

ระบบไฟฟ้ากำลังสามารถที่จะให้คำจำกัดความอย่างกว้างๆ พอที่จะสร้างความเข้าใจได้คือ “ระบบไฟฟ้ากำลัง” หมายถึง โครงข่ายที่รวบรวมระบบและอุปกรณ์ต่างๆ เข้าด้วยกันเพื่อทำการเปลี่ยนรูปพลังงานที่ไม่ใช่ไฟฟ้าไปเป็นพลังงานไฟฟ้าในรูปแบบที่ต้องการ และส่งผ่านพลังงานไฟฟ้าด้วยระดับแรงดันไฟฟ้าสูงๆ ไปยังแหล่งหรือระบบใช้งานในรูปโครงข่ายปิดขนาดใหญ่ ซึ่งจะแปลงพลังงานไฟฟ้าเหล่านี้ไปใช้งานในรูปของพลังงานที่ไม่ใช่ไฟฟ้า ระบบไฟฟ้ากำลังใช้งานที่ดีนั้นจะต้องคำนึงถึง ระบบความปลอดภัยความมั่นคงแน่นอนมีประสิทธิภาพเป็นที่น่าเชื่อถือ ราคาประหยัดเหมาะสมตามหลักเศรษฐศาสตร์และผลกระทบต่อสภาวะแวดล้อม โดยเป็นระบบที่เป็นที่ยอมรับของสังคมท้องถิ่น



ภาพที่ 8.1 ระบบไฟฟ้ากำลัง

ที่มา (ชวลิต ดำรงรัตน์, 2546, หน้า 22)

โครงสร้างของระบบไฟฟ้ากำลัง ไม่ว่าจะเป็นระบบเล็กหรือระบบใหญ่จะถูกแบ่งย่อยออกเป็น 3 ระบบย่อยที่สำคัญ คือ

8.2.1 ระบบผลิตกำลังไฟฟ้า

ระบบผลิตกำลังไฟฟ้า หมายถึง โรงไฟฟ้าที่ใช้กันอยู่อย่างมากมายหลายรูปแบบและมีอยู่หลายลักษณะในปัจจุบันประกอบด้วยเครื่องกำเนิดไฟฟ้า เช่น โรงไฟฟ้าพลังน้ำ โรงจักรไอน้ำ โรงจักรแบบกังหันแก๊ส ตลอดจนโรงไฟฟ้านิวเคลียร์ โรงจักรใช้ถ่านหิน การที่เราจะพิจารณาใช้โรงไฟฟ้าแบบใดนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่าง เช่น สภาพแวดล้อม ทรัพยากร และระดับราคาเป็นต้น ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะมีระดับแรงดันตั้งแต่ระดับ 11kV ถึง 27kV ซึ่งผู้ผลิตจะต้องทำการยกระดับแรงดันผ่านหม้อแปลงไฟฟ้ากำลัง โรงไฟฟ้าประกอบไปด้วยส่วนสำคัญ 3 ส่วนดังนี้

1) ระบบผลิตกระแสไฟฟ้า ประกอบไปด้วยตัวต้นกำลังหรือเครื่องกังหันไฟฟ้าซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวหมุนเครื่องกำเนิดไฟฟ้า แรงดันไฟฟ้าที่ผลิตออกมาจะเป็นแรงดัน 3 เฟส โดยส่วนใหญ่ไม่เกิน 20 kV เช่น เครื่องกำเนิดไฟฟ้าที่เขื่อนภูมิพลผลิตที่ 13.8kV เป็นต้น เพราะหากมากกว่า 20 kV จะก่อให้เกิดอันตรายต่อฉนวนตัวนำและส่งผลต่ออายุการใช้งานของโรงไฟฟ้าได้

2) ส่วนลานไกไฟฟ้า หรือ switchyard เป็นส่วนที่ทำหน้าที่แปลงแรงดันที่ผลิตจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้าให้สูงขึ้นเพื่อส่งต่อไปยังสถานีไฟฟ้าที่อยู่ห่างไกล ลดความสูญเสียในระบบ ซึ่งประกอบไปด้วยหม้อแปลงไฟฟ้ากำลังที่ทำหน้าที่แปลงแรงดันขึ้นและระบบป้องกันทางไฟฟ้า

3) ส่วนป้องกันการเดินเครื่องและการควบคุมไฟฟ้า ได้แก่ การป้องกันเครื่องกำเนิดไฟฟ้า หม้อแปลงไฟฟ้ากำลัง และรีเลย์ตรวจจับความผิดปกติทางไฟฟ้า

ความสามารถในการผลิตจะถูกกำหนดเป็น “กิโลวัตต์” หรือ “เมกะวัตต์” ส่วนความสามารถในการผลิตหรือกำลังการผลิตที่ควบคู่ไปกับระยะเวลาในการผลิต เรียกว่า “พลังงานไฟฟ้าที่ได้” ถ้ามองในแง่กำลังไฟฟ้าที่ผลิตนำมาใช้ควบคู่กับระยะเวลาในการใช้ เรียกว่า“พลังงานไฟฟ้าที่ใช้ไป” มีหน่วยเป็น “วัตต์-ชั่วโมง” หรือ “กิโลวัตต์-ชั่วโมง”

8.2.2 ระบบส่งกำลังไฟฟ้า

ระบบส่งกำลังไฟฟ้า เป็นระบบที่รับพลังงานไฟฟ้าที่ถูกยกระดับแรงดันต่อจากระบบผลิตกำลังไฟฟ้าสำหรับประเทศไทยนั้นจะมีระดับแรงดันตั้งแต่ระดับ 69 kV จนถึงระดับ 500 kV ซึ่งสามารถส่งพลังงานไฟฟ้าไปเป็นระยะทางที่ไกลได้โดยรักษารับแรงดันนั้นไว้ได้เนื่องจากระยะทางจากระบบผลิตกำลังไฟฟ้าจะอยู่ห่างไกลจากโหลดมาก ระบบส่งกำลังไฟฟ้าแบ่งออกได้ดังนี้

1) ระบบไฟฟ้าเหนือศีรษะ (over line system) เป็นระบบที่ซึ่งสายตัวนำบนเสาส่งผ่านที่โล่งแจ้งจากสถานีไฟฟ้าหนึ่งไปยังอีกสถานีไฟฟ้าหนึ่ง ง่ายต่อการบำรุงรักษาและตรวจสอบข้อขัดข้องของระบบ

2) ระบบไฟฟ้าใต้ดิน (under ground cable system) สายตัวนำจะถูกฝังลงไปในดินตามรางเดินสาย และมีบ่อพักเป็นช่วงๆ เหมาะสำหรับติดตั้งในที่ชุมชนหรือพื้นที่แออัด มีความต้องการพลังงานไฟฟ้า (โหลด) สูง แต่การบำรุงรักษาทำได้ไม่สะดวกและมีราคาค่อนข้างสูงตามไปด้วย

ระบบส่งกำลังไฟฟ้ามี 3 ระดับ คือ

1) ไฟฟ้าแรงสูง (high voltage : HV) มีระดับแรงดันไฟฟ้าไม่เกิน 230 kV.

2) ไฟฟ้าแรงสูงเอกซ์ตรา(extra high voltage :EHV)มีระดับแรงดันไฟฟ้าตั้งแต่ 230 kV-1,000 kV

3) ไฟฟ้าแรงสูงอัลตรา(ultra high voltage : UHV) มีระดับแรงดันไฟฟ้าตั้งแต่ 1,000 kV.ขึ้นไป

8.2.3 ระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้า

ระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้า เป็นระบบที่รับพลังงานไฟฟ้าที่ถูกสร้างมาจากระบบผลิตกำลังไฟฟ้า ผ่านมายังระบบส่งกำลังไฟฟ้าเพื่อทำการกระจายกำลังไฟฟ้าไปยังโหลดผู้ใช้ไฟซึ่งมีส่วนประกอบที่สำคัญคือสถานีไฟฟ้าซึ่งมีหน้าที่ปรับลดระดับแรงดันให้กับผู้ใช้ไฟ โดยส่วนใหญ่แล้วระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้าจะมีระดับแรงดันครอบคลุมทั้งทางด้านปฐมภูมิและทุติยภูมิและสูงสุด สำหรับประเทศไทยไม่เกิน 115 kV

ระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้าที่ดีต้องมีการวางแผนการก่อสร้างระบบจำหน่ายกำลังไฟฟ้า โดยคำนึงถึงองค์ประกอบต่างๆ เช่นระดับแรงดันไฟฟ้า ชนิดวงจรการจ่ายไฟ ตลอดจนความเหมาะสมสำหรับสถานที่ใช้งานแต่ละแห่ง โดยชนิดวงจรการจ่ายไฟนั้นจะมีลักษณะการจัดโครงข่ายพื้นฐานสองแบบ คือ แบบลูป และแบบเรนเดียล

8.2.4 ระบบไฟฟ้าในประเทศไทยและหน่วยงานที่รับผิดชอบในระบบไฟฟ้ากำลัง

หน่วยงานที่ทำหน้าที่รับผิดชอบในการให้บริการด้านพลังงานไฟฟ้าในประเทศไทยประกอบไปด้วยหน่วยงานหลัก 3 หน่วยงาน อันได้แก่ การไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย (กฟผ.) การไฟฟ้านครหลวง (กฟน.) และ การไฟฟ้าส่วนภูมิภาค (กฟภ.) ซึ่งแต่ละหน่วยงานมีอำนาจหน้าที่ดังนี้

กฟผ. มีอำนาจหน้าที่ในการจัดหาพลังงานไฟฟ้าแก่ประชาชน โดยการผลิตและจำหน่ายพลังงานไฟฟ้า ให้แก่ การไฟฟ้านครหลวง , การไฟฟ้าส่วนภูมิภาค และผู้ใช้พลังงานไฟฟ้ารายอื่นตามที่กฎหมายกำหนด รวมทั้งประเทศใกล้เคียง และดำเนินการต่างๆ ที่เกี่ยวข้องทางด้านพลังงานไฟฟ้า ตลอดจนงานอื่นๆ ที่ส่งเสริมกิจการของ กฟผ. อย่างไรก็ดีเพื่อให้สามารถดำเนินการตามวัตถุประสงค์ข้างต้น กฟผ. จึงมีหน้าที่รวมไปถึงการสร้างเขื่อน อ่างเก็บน้ำ โรงไฟฟ้า ระบบส่งไฟฟ้า และสิ่งอื่นอันเป็นอุปกรณ์ประกอบต่างๆ รวมทั้งการวางแผนนโยบายควบคุมการผลิต การส่ง การจำหน่ายพลังงานไฟฟ้า และวัตถุเคมีจากลิกไนต์ ระดับแรงดันไฟฟ้าที่ กฟผ. ผลิตได้แก่ 500kV, 230kV, 115kV,

69kV, 33kV และ 22kV โดย กฟผ. จะดำเนินการก่อสร้างสถานีไฟฟ้าแรงสูงเพื่อลดระดับแรงดันตามที่ผู้รับซื้อมีความต้องการ

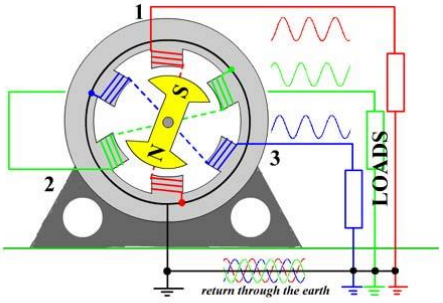
กฟน. มีอำนาจหน้าที่ในการให้บริการด้านการจัดจำหน่ายพลังงานไฟฟ้าให้กับผู้ใช้ไฟ โดยเป็นผู้รับซื้อพลังงานไฟฟ้าจาก กฟผ. และผู้ผลิตไฟฟ้าพลังงานหมุนเวียนขนาดเล็กมาก (very small power producer) มาจัดจำหน่ายให้กับผู้ใช้ไฟ ภายในเขตกรุงเทพมหานคร สมุทรปราการ และนนทบุรี โดยเป็นผู้ดำเนินการก่อสร้างสถานีไฟฟ้าย่อย ระบบจำหน่ายและสายส่ง ซึ่งประกอบไปด้วยผู้ใช้ไฟระดับแรงดัน 69kV , 24kV, 400V และ 240V

8.3 ระบบไฟฟ้ากำลังสามเฟส

ในระบบการส่งกำลังไฟฟ้าในระยะทางไกลๆนั้นนิยมส่งกำลังในระบบแบบ 3 เฟสเนื่องจากระบบ 3 เฟส มีข้อดีเมื่อเทียบกับระบบแบบเฟสเดียวคือ

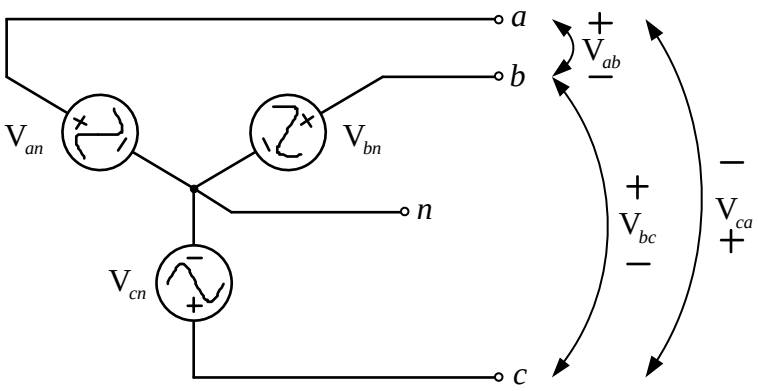
- การส่งกำลังไฟฟ้าจากแหล่งจ่ายไปยังโหลดมีค่าคงที่และไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา
- เมื่อพิจารณาปริมาณกำลังไฟฟ้าที่โหลดเท่ากัน จะเห็นได้ว่า ระบบสามเฟสจะใช้ปริมาณของสายไฟน้อยกว่าระบบไฟฟ้าหนึ่งเฟส และการสูญเสียกำลังไฟฟ้าในสายส่งของระบบไฟฟ้าสามเฟสจะมีการสูญเสียน้อยกว่าระบบไฟฟ้าหนึ่งเฟส

ระบบไฟฟ้าสามเฟสเกิดจากเครื่องกำเนิดแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับที่สร้างสัญญาณแรงดันแบบรูปคลื่นไซน์ 3 เฟส ที่เหมือนกันทุกประการแต่มุมเฟสต่างกัน 120 องศา ดังแสดงในภาพที่ 8.2 โดยส่วนใหญ่จะให้เฟสทั้งสามมีชื่อเป็น เฟส A เฟส B และเฟส C แสดงในภาพที่ 8.3 ตามลำดับ



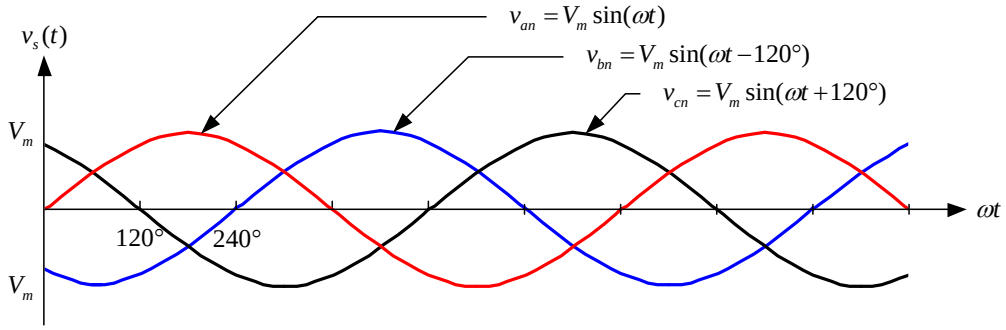
ภาพที่ 8.2 เครื่องกำเนิดไฟฟ้า

ที่มา (Gilbert M. Masters, 2013, p.145)



ภาพที่ 8.3 วงจรสมมูลแหล่งกำเนิดแรงดันสามเฟส 4 สาย ต่อแบบ Y

โดยลักษณะของแหล่งจ่ายแรงดันแบบ 3 เฟสประกอบด้วยแหล่งจ่ายแรงดัน 3 แหล่ง ที่จะต่อไปยังโหลดโดยใช้สายส่ง 3 หรือ 4 เส้น ซึ่งแหล่งจ่ายทั้ง 3 นี้สามารถต่อกันได้ 2 ลักษณะคือแบบวาย (wye) และแบบเดลต้า (delta, Δ)



ภาพที่ 8.4 แรงดันไฟฟ้าสามเฟส

การพิจารณาแหล่งกำเนิดแรงดันไฟฟ้าสามเฟส จะเริ่มต้นด้วยการสมมุติให้แหล่งกำเนิดสามเฟสเป็นแบบสมดุล ซึ่งขนาดของแรงดันในแต่ละเฟสจะมีค่าเท่ากันดังสมการที่ (8.1)

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| \tag{8.1}$$

และ

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \tag{8.2}$$

จากสมการที่ (8.2) แสดงให้เห็นว่า เมื่อนำเฟสเซอร์แรงดันทั้งสามเฟสมารวมกันทางเวกเตอร์จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากแต่ละเฟสมีขนาดเท่ากัน แต่มุมเฟสต่างกัน $120°$

จากภาพที่ 8.3 แรงดันระหว่างสายกับจุดนิวทรอน สำหรับเฟสใดเฟสหนึ่ง มีชื่อเรียกว่าแรงดันเฟส (phase voltage) โดยปกติแรงดันเฟส a จะกำหนดให้เป็นเฟสอ้างอิง ดังสมการที่ (8.3)

$$\mathrm{V}_{an} = V_{\phi}\angle 0° \tag{8.3}$$

เมื่อ V_{ϕ} คือ ขนาดของแรงดันในแต่ละเฟส

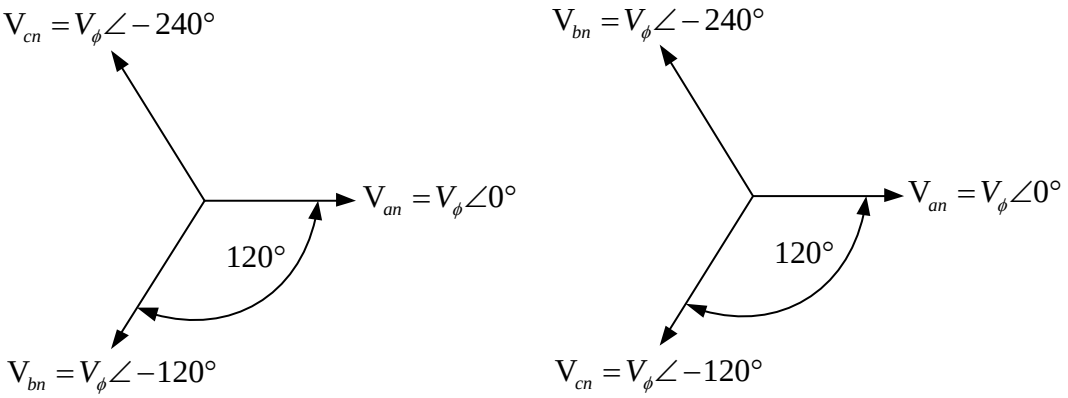
เมื่อกำหนดให้แรงดันเฟส a เป็นเฟสอ้างอิง แรงดันในเฟสที่เหลือแสดงได้ดังสมการที่ (8.4)

$$\mathrm{V}_{bn} = V_{\phi}\angle -120° \text{ และ } \mathrm{V}_{cn} = V_{\phi}\angle -240° \tag{8.4}$$

หรือ

$$\mathrm{V}_{cn} = V_{\phi}\angle -120° \text{ และ } \mathrm{V}_{bn} = V_{\phi}\angle -240° \tag{8.5}$$

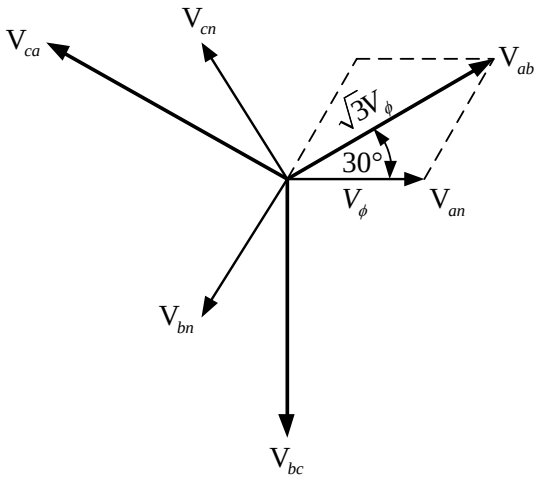
สังเกตได้ว่าสมการที่ (8.3) และสมการที่ (8.4) แรงดันแต่ละเฟสมีขนาดเท่ากัน และมีมุมเฟสต่างกัน $120°$ มีชื่อเรียกว่า ลำดับเฟสแบบบวก (positive phase sequence) หรือ ลำดับเอบีซี (abc phase sequence) สำหรับสมการที่ (8.3) และสมการที่ (8.5) แรงดันแต่ละเฟสมีขนาดเท่ากัน และมีมุมเฟสต่างกัน $120°$ เช่นกันแต่มีลำดับเฟสที่ต่างกัน สำหรับกรณีนี้มีชื่อเรียกว่า ลำดับเฟสแบบลบ (negative phase sequence) หรือ ลำดับเอบีซี (acb phase sequence) แผนภาพเฟสเซอร์ของแรงดันสามเฟสสมดุลที่มีลำดับเฟสแบบบวกและแบบลบ แสดงได้ดังภาพที่ 8.5 ก) และ ข) ตามลำดับ



ก) ลำดับเฟสแบบบวก ข) ลำดับเฟสแบบลบ

ภาพที่ 8.5 แผนภาพเฟสเซอร์ของแรงดันสามเฟสสมดุล

นอกจากนี้แรงดันตกคร่อมสายคู่ใดคู่หนึ่งระหว่างเฟสมีชื่อเรียกว่าแรงดันสาย (line voltage) ซึ่งอาจเป็น V_{ab} V_{bc} และ V_{ca} แสดงได้ดังภาพที่ 8.6



ภาพที่ 8.6 แผนภาพเฟสเซอร์ของแรงดันสายสำหรับลำดับเฟสแบบบวก

การพิสูจน์หาค่าแรงดันสาย (กรณีเฟส a) จะอาศัยแผนภาพเฟสเซอร์ในภาพที่ 8.6 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{ab} &= \mathrm{V}_{an} + \mathrm{V}_{nb} = \mathrm{V}_{an} - \mathrm{V}_{bn} \\
&= V_{\phi}\angle 0° - V_{\phi}\angle -120° \\
&= V_{\phi} - V_{\phi}(\cos 120° - j\sin 120°) \\
&= V_{\phi}(1.5 + j0.867) \\
&= \sqrt{3}V_{\phi}\angle 30°
\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์สรุปได้ว่า

$$\mathrm{V}_{ab} = \sqrt{3}V_{\phi}\angle 30° \qquad (8.6)$$

แรงดันสายสำหรับระบบสามเฟสสมดุล อีกสองคู่ที่เหลือคือ

$$\mathrm{V}_{bc} = \sqrt{3}V_{\phi}\angle 30° - 120° = \sqrt{3}V_{\phi}\angle -90° \qquad (8.7)$$

$$\mathrm{V}_{ca} = \sqrt{3}V_{\phi}\angle -90° - 120° = \sqrt{3}V_{\phi}\angle -210° \qquad (8.8)$$

จากสมการที่ (8.6) ถึงสมการที่ (8.8) แสดงให้เห็นว่าแรงดันสายแต่ละคู่จะมีขนาดเท่ากันคือ $\sqrt{3}V_{\phi}$ และมีมุมต่างกัน 120 องศาเช่นกัน นอกจากนี้จากการพิสูจน์เราอาจจะสรุปได้ว่า คุณสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่งของแหล่งจ่ายกำเนิดสามเฟสที่ต่อแบบ Y คือ

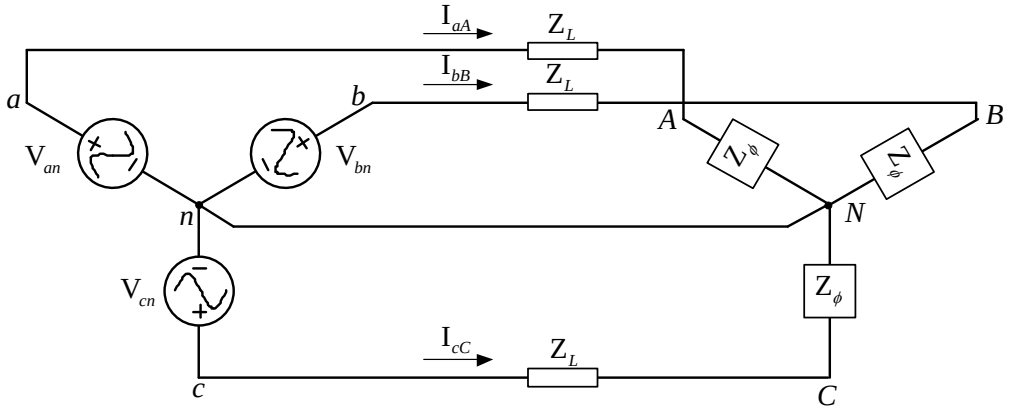
$$\mathrm{V}_{L} = \sqrt{3}V_{\phi}\angle 30° \qquad (8.9)$$

เมื่อ V_{L} คือ ขนาดของแรงดันสาย

V_{ϕ} คือ ขนาดของแรงดันเฟส

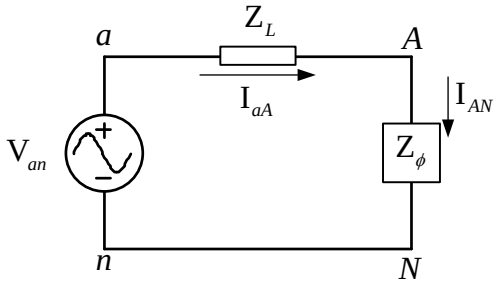
8.4 การวิเคราะห์วงจรแบบวาย-วาย

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์วงจรที่มีแหล่งจ่ายกำเนิดสามเฟสสมดุลต่อแบบ Y เชื่อมต่อกับโหลดสามเฟสสมดุลที่ต่อแบบ Y เช่นกันแสดงได้ดังภาพที่ 8.7



ภาพที่ 8.7 วงจรสามเฟสสมดุลแบบวาย-วาย

ภาพที่ 8.7 แสดงวงจรทั่วไปของระบบสามเฟสสมดุลแบบ Y-Y โดยที่ Z_L คือค่าอิมพีแดนซ์ที่สายส่ง การวิเคราะห์วงจารสามเฟสสมดุล จะอาศัยวงจรสมมูลเฟสเดียว (single-phase equivalent circuit) ของวงจรสามเฟสที่สมดุลโดยทำการลัดวงจรที่จุด n และ N ซึ่งเป็นวงจรสมมูลเฟสเดียวของระบบในภาพที่ 8.7 แสดงได้ดังภาพที่ 8.8



ภาพที่ 8.8 วงจรสมมูลเฟสเดียว

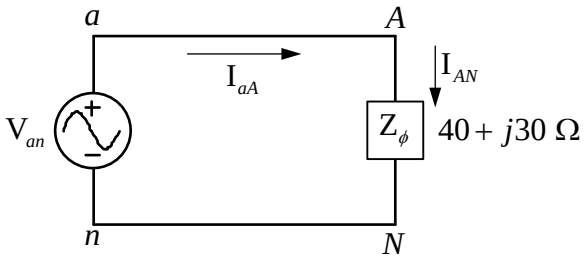
จากภาพวงจรที่ 8.8 I_{aA} เรียกว่ากระแสสาย (line current) และ I_{AN} เรียกว่ากระแสเฟส (phase current) ซึ่งจากวงจรคำนวณได้ดังนี้

$$I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{an}}{Z_L + Z_\phi}$$

เมื่อคำนวณค่า I_{aA} ได้แล้ว ค่า I_{bB} และ I_{aA} จะมีขนาดเท่ากันกับ I_{cC} และมีมุมเฟสต่างกัน 120 องศา

ตัวอย่างที่ 8.1 ระบบสามเฟสสมดุลทางด้านแหล่งกำเนิดต่อแบบ Y ให้ลำดับเฟสแบบบวก มีแรงดันเฟสของแหล่งกำเนิดเท่ากับ $120\ \mathrm{V}_{rms}$ เชื่อมต่อโหลดที่ต่อแบบ Y ที่มีค่าอิมพีแดนซ์ $40+j30$ โอห์มต่อเฟส จงคำนวณหากระสายในแต่ละสาย และกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยรวมที่โหลด

วิธีทำ เนื่องจากเป็นระบบสามเฟสสมดุล สามารถเขียนวงจรสมมูลเฟสเดียว สำหรับเฟส a ได้ดังนี้



$$\mathrm{I}_{aA}=\frac{\mathrm{V}_{an}}{\mathrm{Z}_{\phi}}=\frac{120\angle 0^{\circ}}{40+j30}=2.4\angle -36.87^{\circ}\ \mathrm{A}_{rms}$$

เมื่อคำนวณค่า I_{aA} ได้แล้ว ค่า I_{bB} และ I_{cC} สำหรับแรงดันเฟสแบบบวกคือ

$$\mathrm{I}_{bB}=2.4\angle -156.87^{\circ}\ \mathrm{A}_{rms}\ \text{ และ }\ \mathrm{I}_{bB}=2.4\angle -276.87^{\circ}\ \mathrm{A}_{rms}$$

ค่ากำลังไฟฟ้าเฉลี่ยที่โหลดต่อเฟสคือ

$$P_{1\phi}=\left|\mathrm{I}_{aA}^{2}\right|R=2.4^{2}(40)=230.40\ \mathrm{W}$$

ดังนั้นกำลังไฟฟ้าเฉลี่ยรวมที่โหลดคือ

$$P_{3\phi}=3P_{1\phi}=3(230.40)=691.20\ \mathrm{W}$$

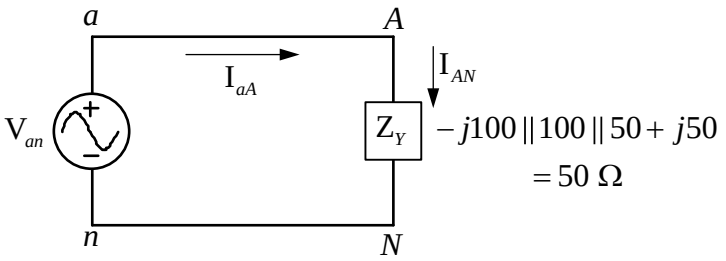
ตัวอย่างที่ 8.2 ระบบสามเฟสสมดุลต่อแบบ Y-Y ให้ลำดับเฟสแบบบวกและ $\mathrm{V}_{ab}=400\angle 0^{\circ}\ \mathrm{V}_{rms}$ ถ้าภายในของโหลดในแต่ละเฟสประกอบไปด้วย $-j100\ \Omega$ $100\ \Omega$ และ $50+j50\ \Omega$ ต่อขนานกัน จงคำนวณหา

ก) แรงดันเฟส V_{an}

ข) กระแสสาย I_{aA}

ค) กำลังไฟฟ้าเฉลี่ยรวมที่โหลด

วิธีทำ วงจรสมมูลเฟสเดียวสำหรับเฟส a เขียนได้ดังภาพ



โจทย์กำหนดให้แหล่งกำเนิดต่อแบบ Y ดังนั้นแรงดันสายจะมีค่าเป็น

$$\mathrm{V}_{ab}=\sqrt{3}\left|\mathrm{V}_{an}\right|\angle 30^{\circ}$$

ดังนั้น

$$\mathrm{V}_{an} = \frac{|\mathrm{V}_{ab}|}{\sqrt{3}} \angle -30° = \frac{400}{\sqrt{3}} \angle -30° = 230.94 \angle -30° \ \mathrm{V}_{rms}$$

จากวงจรสมมูลเฟสเดียว คำนวณค่ากระแสสายได้ดังนี้

$$\mathrm{I}_{aA} = \frac{\mathrm{V}_{an}}{\mathrm{Z}_Y} = \frac{230.94 \angle -30°}{50} = 4.62 \angle -30° \ \mathrm{A}_{rms}$$

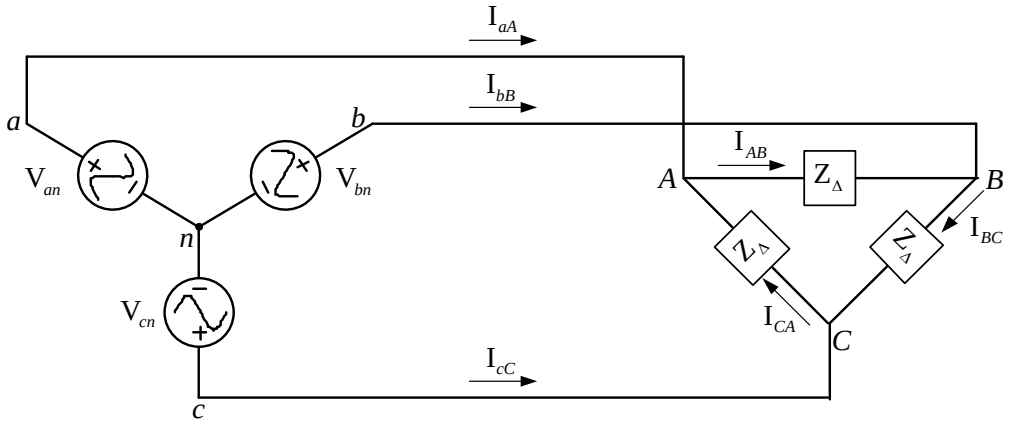
ดังนั้น

$$P_{1\phi} = \left|\mathrm{I}_{aA}^2\right| R = 4.62^2 (50) = 1067.22 \ \mathrm{W}$$

$$P_{3\phi} = 3P_{1\phi} = 3(1067.22) = 3201.66 \ \mathrm{W}$$

8.5 การวิเคราะห์วงจรแบบวาย-เดลต้า

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการวิเคราะห์วงจรที่มีแหล่งกำเนิดสามเฟสสมดุลต่อแบบ Y ที่มีการเชื่อมต่อกับโหลดแบบ Δ แสดงได้ดังภาพที่ 8.9



ภาพที่ 8.9 วงจรสามเฟสแบบวาย-เดลต้า

จากวงจรภาพที่ 8.9 กำหนดให้ขนาดแรงดันสายของแหล่งกำเนิดที่ต่อแบบ Y มีค่าเท่ากัน เนื่องจากเป็นระบบสามเฟสสมดุล ดังนั้น

$$\mathrm{V}_L = |\mathrm{V}_{ab}| = |\mathrm{V}_{bc}| = |\mathrm{V}_{ca}| \tag{8.10}$$

ดังนั้นของแรงดันเฟสก็จะมีค่าเท่ากัน ดังสมการ

$$\mathrm{V}_\phi = |\mathrm{V}_{an}| = |\mathrm{V}_{bn}| = |\mathrm{V}_{cn}| \tag{8.11}$$

เมื่อ $\mathrm{V}_L = \sqrt{3} V_\phi$ $\mathrm{V}_{an} = V_\phi \angle 0°$ และ $\mathrm{V}_{ab} = \sqrt{3} V_\phi \angle 30°$

เมื่อพิจารณาที่โหลด (ต่อแบบ Δ) ของวงจรภาพที่ 8.6 สามารถคำนวณหากระแสที่โหลดได้ดังนี้

$$\mathrm{I}_{AB}=\frac{\mathrm{V}_{AB}}{\mathrm{Z}_{\Delta}}=\frac{\mathrm{V}_{ab}}{\mathrm{Z}_{\Delta}}\quad \mathrm{I}_{BC}=\frac{\mathrm{V}_{BC}}{\mathrm{Z}_{\Delta}}=\frac{\mathrm{V}_{bc}}{\mathrm{Z}_{\Delta}}\quad \mathrm{I}_{CA}=\frac{\mathrm{V}_{CA}}{\mathrm{Z}_{\Delta}}=\frac{\mathrm{V}_{ca}}{\mathrm{Z}_{\Delta}} \tag{8.12}$$

กระแสสาย I_{aA} สามารถคำนวณได้จากกระแสเฟสที่โหลด โดยใช้กฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ที่โหนด A ได้ดังสมการ

$$\mathrm{I}_{aA}=\mathrm{I}_{AB}-\mathrm{I}_{CA} \tag{8.13}$$

เนื่องจากเป็นระบบสามเฟสสมดุล ดังนั้น

$$\mathrm{I}_{aA}=\mathrm{I}_{AB}-\mathrm{I}_{CA}\ I_{\phi}=\left|\mathrm{I}_{AB}\right|=\left|\mathrm{I}_{BC}\right|=\left|\mathrm{I}_{CA}\right| \tag{8.14}$$

และขนาดของกระแสสาย

$$I_{L}=\left|\mathrm{I}_{aA}\right|=\left|\mathrm{I}_{bB}\right|=\left|\mathrm{I}_{cC}\right| \tag{8.15}$$

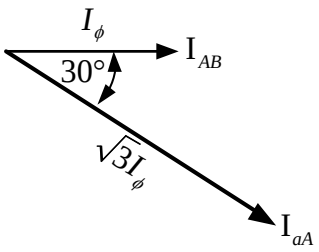
ถ้ากำเนิดให้ I_{AB} เป็นกระแสเฟสอ้างอิง จากสมการที่ 8.13 สำหรับลำดับเฟสแบบบวกจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{aA}&=I_{\phi}\angle 0^{\circ}-I_{\phi}\angle -240^{\circ}\\&=I_{\phi}-I_{\phi}\left[\cos(-240^{\circ})+j\sin(-240^{\circ})\right]\\&=I_{\phi}\left[1.5-j0.867\right]\\&=\sqrt{3}I_{\phi}\angle -30^{\circ}\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์สรุปได้ว่า

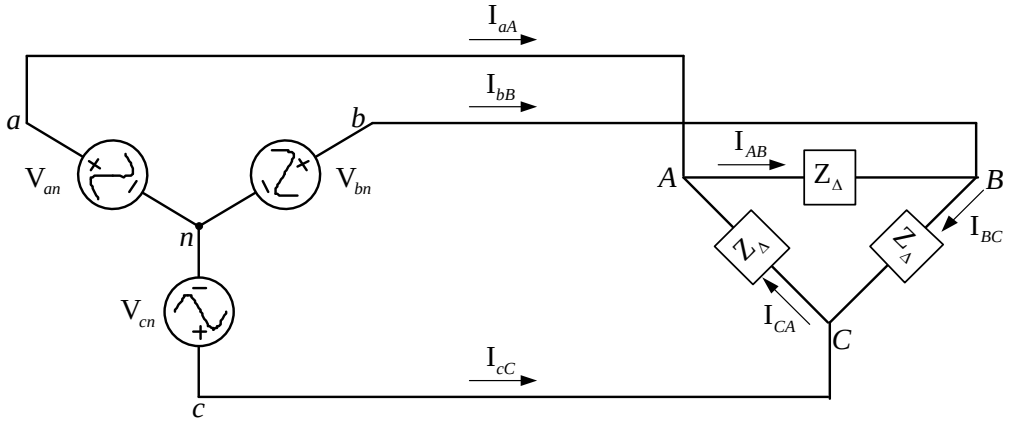
$$\mathrm{I}_{aA}=\sqrt{3}I_{\phi}\angle -30^{\circ} \tag{8.16}$$

จากสมการที่ (8.16) สรุปได้ว่ากรณีที่โหลดต่อแบบ Δ ที่มีลำดับเฟสแบบบวก จะมีขนาดของกระแสสายเท่ากับ $\sqrt{3}$ เท่าของกระแสเฟส และมีมุมเฟสของกระแสสายล้าหลังกระแสเฟสอยู่ 30° ซึ่งแผนภาพเฟสเซอร์สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างกระแสสายและกระแสเฟส (เฟส a) แสดงได้ดังภาพที่ 8.10



ภาพที่ 8.10 ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสสายและกระแสเฟส เมื่อระบบต่อแบบ Δ

ตัวอย่างที่ 8.3 จากภาพที่ 8.11 เป็นระบบสามเฟสสมดุลต่อ มีลำดับเฟสแบบบวก มีแหล่งกำเนิดแรงดันต่อแบบ Y โดยขนาดของแรงดันสายของแหล่งกำเนิดเท่ากับ $220\ V_{rms}$ เชื่อมต่ออยู่กับโหลดที่ต่อแบบ Δ มีค่า $Z_\Delta = 10\angle -50°\ \Omega$/เฟส จงคำนวณหากระแสสายและกระแสเฟสของระบบสำหรับทุกๆ เฟส



ภาพที่ 8.11 วงจรสำหรับตัวอย่างที่ 8.3

วิธีทำที่ 1 จากวงจร $V_{ab} = V_{AB} = 220\angle 0°\ V_{rms}$ (กำหนดให้แรงดันสาย ab เป็นแรงดันอ้างอิง) ดังนั้น กระแสเฟสคำนวณได้จาก

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{220\angle 0°}{10\angle -50°} = 22\angle 50°\ A_{rms}$$

เนื่องจากเป็นระบบสามเฟสสมดุล ที่มีลำดับเฟสแบบบวก ดังนั้น

$$I_{BC} = 22\angle 50° - 120° = 22\angle -70°\ A_{rms}$$

$$I_{CA} = 22\angle -50° - 120° = 22\angle -190°\ A_{rms}$$

การคำนวณหากระแสสาย คำนวณได้จากแผนภาพเฟสเซอร์ในภาพที่ 8.11 โดย

$$I_{aA} = \sqrt{3}(22)\angle 50° - 30° = \sqrt{3}(22)\angle 20°\ A_{rms}$$

สำหรับเฟสอื่นๆ

$$I_{bB} = \sqrt{3}(22)\angle -100°\ A_{rms}$$

และ $$I_{cC} = \sqrt{3}(22)\angle -220°\ A_{rms}$$

วิธีทำที่ 2 โจทย์ข้อนี้สามารถทำได้อีกแบบหนึ่งคือ แปลงโหลดที่ต่อแบบ Δ ให้เป็นโหลดที่ต่อแบบ Y ก่อน จากนั้นคำนวณหากระแสสายในแต่ละเฟสได้จากวงจรสมมูลเฟสเดียว ซึ่งเมื่อแปลงโหลดให้เป็นการต่อแบบ Y แล้ว สามารถเขียนวงจรสมมูลเฟสเดียวได้ รายละเอียดมีดังต่อไปนี้

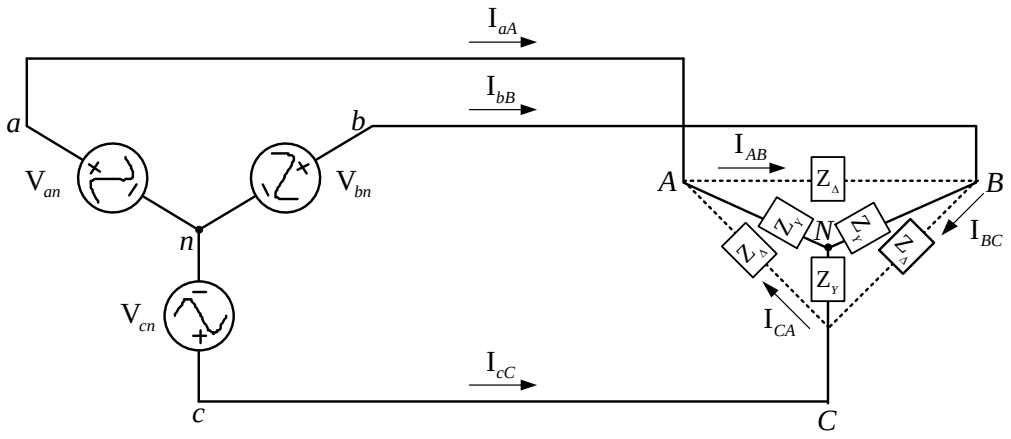
การแปลงโหลดจาก Δ เป็น Y ดังนี้

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \tag{8.17}$$

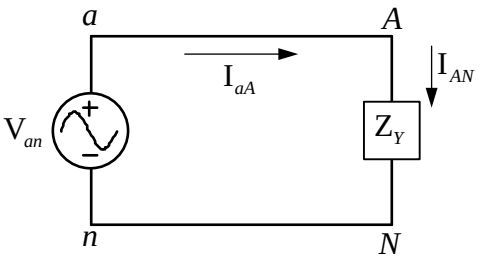
ซึ่งจากตัวอย่างจะได้ค่าโหลดที่ต่อแบบ Y ดังนี้

$$Z_Y = \frac{10\angle -50^\circ}{3} \ \Omega/\text{เฟส}$$

จากภาพวงจรที่ 8.11 เปลี่ยนเป็นดังรูปต่อไปนี้



จากวงจรเขียนวงจรสมมูลเฟสเดียวได้ดังนี้



ซึ่งกระแสสายคำนวณได้จาก

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_Y} = \frac{\frac{220}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ - 30^\circ}{\frac{10\angle -50^\circ}{3}} = 22\sqrt{3}\angle 20^\circ \ A_{rms}$$

สังเกตได้ว่ากระแสสายจะมีค่าเท่ากับคำตอบที่ได้จากวิธีทำที่ 1

สำหรับกระคำนวณหากระแสเฟสจะต้องคำนวณจากโหลดที่ต่อแบบ Δ เพราะกระแสเฟสที่คำนวณจากวงจรสมมูลเฟสเดียวจะมีค่าไม่ถูกต้อง เนื่องจากระบบที่กำลังพิจารณาอยู่ในขณะนี้เป็นโหลดที่ต่อแบบ Δ ดังนั้นการคำนวณจะอาศัยแผนภาพเฟสเซอร์ในภาพที่ 8.7 ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\mathrm{I}_{AB} = \frac{22\sqrt{3}\angle 20° + 30°}{\sqrt{3}} = 22\angle 50° \ \mathrm{A}_{rms}$$

ค่าที่คำนวณได้จะมีค่าตรงกับคำตอบที่ได้จากวิธีทำที่ 1

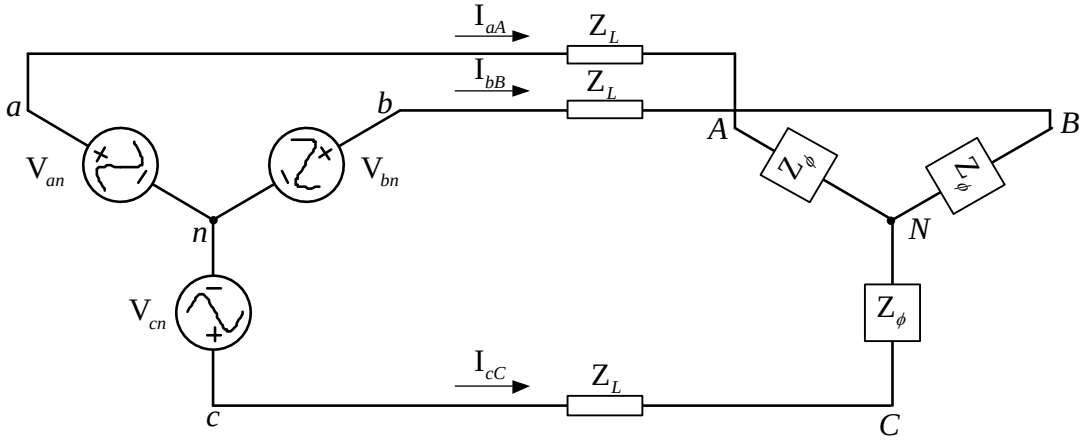
ในบางครั้งเมื่อระบบมีอิมพีแดนซ์ที่สายส่ง การแปลงค่าโหลดจากการต่อแบบ Δ เป็น Y จะมีความง่ายในการวิเคราะห์เพื่อหากระแสสายมากขึ้น แต่ถ้าต้องการหากระแสเฟสก็สามารถคำนวณได้จากกระแสสาย โดยอาศัยแผนภาพเฟสเซอร์ในภาพที่ 8.7 เช่นเดียวกันกับตัวอย่างนี้

8.6 สรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงระบบไฟฟ้าสามเฟสซึ่งประกอบไปด้วย ระบบไฟฟ้ากำลัง ระบบกำลังไฟฟ้าสามเฟส รวมถึงการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าสามแบบ Y-Y และแบบ Y-Δ ซึ่งครอบคลุมการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าสามเฟส โดยทุกวงจรที่นอกเหนือจากนี้จะทำการแปลงวงจรให้อยู่ในรูปวงจรไฟฟ้าสามเฟสแบบ Y-Y เพื่องานต่อการวิเคราะห์วงจร

8.7 คำถามท้ายบท

1. จากภาพที่ 8.12 เป็นระบบสามเฟสสมดุล มีลำดับเฟสแบบบวก กำหนดให้ $\mathrm{V}_{BC} = 120\angle 60° \ \mathrm{V}_{rms}$ และ $\mathrm{Z}_L = 0.6\ \Omega$ ถ้าโหลดรวมดูดซับกำลังไฟฟ้า 5 kVA ที่ค่าตัวประกอบกำลัง 0.8 ล้าหลัง จงคำนวณหา



ภาพที่ 8.12 วงจรสำหรับคำถามท้ายบท ข้อที่ 1 และ 2

1.1) กำลังไฟฟ้าสูญเสียรวมที่สายส่ง

1.2) V_{an}

2. จากวงจรภาพที่ 8.12 กำหนดให้ $\mathrm{Z}_{\phi} = 12 + j5$ Ω/เฟส และ $\mathrm{I}_{bB} = 20\angle 0° \ \mathrm{A}_{rms}$ ถ้าแหล่งกำเนิดทำงานที่ค่าตัวประกอบกำลังเท่ากับ 0.935 จงคำนวณหา

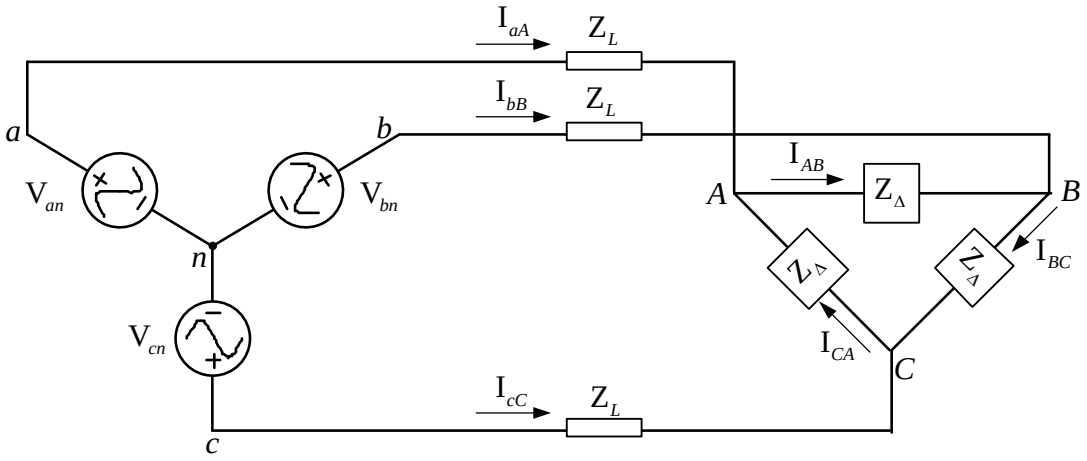
2.1) Z_{L}

2.2) V_{bn}

2.3) V_{AB}

2.4) กำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนที่จ่ายโดยแหล่งกำเนิด

3. จากวงจรภาพที่ 8.13 เป็นระบบสามเฟสสมดุล ถ้ากำหนดให้ $\mathrm{Z}_{L} = 0\ \Omega$ และ $\mathrm{V}_{an} = 200\angle 60°$ V_{rms} ในแต่ละเฟสโหลดดูดซับกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนเท่ากับ $2 - j1\ \mathrm{kVA}$ ถ้าลำดับเฟสเป็นแบบบวกจงคำนวณหา



ภาพที่ 8.13 วงจรสำหรับคำถามท้ายบท ข้อที่ 3 และ 4

3.1) V_{bc}

3.2) Z_{ϕ}

3.3) I_{aA}

4. จากวงจรภาพที่ 8.13 ถ้าโหลดสามเฟสสมดุลดูดซับกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนรวมเท่ากับ $3 - j1.8\ \mathrm{kVA}$ ขณะที่แหล่งกำเนิดจ่ายกำลังไฟฟ้าเชิงซ้อนเท่ากับ $3.45 - j1.8\ \mathrm{kVA}$ ถ้า $\mathrm{Z}_{L} = 5\ \Omega$ จงคำนวณหา

4.1) I_{aA}

4.2) I_{AB}

4.3) V_{an}

บรรณานุกรม

กองพัน อารีรักษ์. (2547). **วงจรไฟฟ้า**. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

ชวลิต ดำรงรัตน์. (2546). **การส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า.** กรุงเทพมหานคร. ซีเอ็ดยูเคชั่น

บรรจง จันทรมาศ. (2536). **ทฤษฎีวงจรไฟฟ้ากระแสตรง**. โครงการความร่วมมือจัดพิมพ์ตำราตามหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา ระหว่าง กรมอาชีวศึกษาและสมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น). หจก. เม็ดทราย พริ้นติ้ง.

บุญญศักดิ์ ใจจงกิจ. (2552). **อนุกรมไฟฟ้า 1**. กรุงเทพมหานคร. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ไพรัช ธัชยพงษ์. (2522). **วิเคราะห์วงจรไฟฟ้า 1**. กรุงเทพมหานคร. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

มนตรี เชิญทอง. (2546). **วงจรไฟฟ้า 1**. พัฒนาวิชาการ (2535).

สุพจน์ กนกการ. (2541). **วงจรไฟฟ้า 1**. กรุงเทพมหานคร สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น).

Bruce Carlson. A. (2000). **Circuits**. Brooks Cole Thomson learning.

Carles K. Alexander and Matthew N.O. Sadiku. (2013). **Fundamental of Electric Circuit**. McGraw-Hill.

Dorf. R.C. and Svoboda. J.A. (2010). **Introction to electric circuits**. NJ: John Wiley&Sons Inc.

Edminister Joseph A. (1965). **Electric Circuit**. The University of Akron.

Franco. S.(1995). **Electric Circuit Fundamentals**. Florida Saunders College Publishing.

Gilbert. M. Masters. (2013). **Renewable and Efficient Electric Power Systems**. Willey IEEE Press.

Nilsson. J. W. and Riedel. S.A. (2011). **Electric Circuits**. Upper Saddle River. Prentice Hall.

Robert. L. Boylested. (2014). **Introductory Circuit Analysis**. Pearson Education.

Vincent Del Toro. (1990). **Basic Electric Machines**. Prentice-Hall International Inc.