SOLUTION MIDTERM 1/2559

1. บริษัทแห่งหนึ่งซื้อยางรถยนต์จากผู้ขายคนที่ 1 และ 2 โดยมีประวัติการส่งมอบของดังนี้
ของที่ได้รับจากผู้ขายคนที่ 1 จะเป็นของชำรุด 15% ในขณะที่ของที่ได้รับจากผู้ขายคนที่ 2 จะเป็นของชำรุด 5%
กำหนดให้ 30% ของจำนวนยางที่ซื้อมาจากผู้ขายคนที่ 1 ถ้าสุ่มเลือกยางมาเส้นหนึ่งตรวจพบว่าเป็นยางที่ชำรุด
จงหาความน่าจะเป็นที่ยางเส้นนั้นถูกส่งมาจากผู้ขายคนที่ 2 **(3 คะแนน)**

Solution

กำหนดให้ A คือเหตุการณ์ที่เลือกสุ่มยางมาตรวจแล้วเป็นยางชำรุด

B_i คือเหตุการณ์ที่เลือกสุ่มยางมาตรวจแล้วเป็นยางชำรุดที่มาจากผู้ขายรายที่ 1 และ 2 ตามลำดับ ($i = 1,2$)

$P(A|B_1) = 0.15$ $\qquad$ $P(B_1) = 0.30$

$P(A|B_2) = 0.05$ $\qquad$ $P(B_2) = 0.70$

จาก $$P(A|B_2) = \frac{P(B_2) * P(A|B_2)}{P(B_1) * P(A|B_1) + P(B_2) * P(A|B_2)}$$

$$P(A|B_2) = \frac{0.7 * 0.05}{(0.30 * 0.15) + (0.70 * 0.05)} = \frac{0.035}{0.045 + 0.035}$$

$$= \frac{0.035}{0.08}$$

$$= 0.437$$

2. โรงงานผลิตขวดยาแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรซึ่งใช้ในการผลิตอยู่ 2 เครื่อง เครื่อง A ผลิตได้ 70% ของทั้งหมด เครื่อง B ผลิตได้ 30% ของทั้งหมด จากการตรวจคุณภาพขวดยาทุกขวดพบว่า ทุก 1 ใน 20 ใบของขวดยาที่ผลิตโดยเครื่องจักร A ใช้การไม่ได้(ชำรุด) ในขณะที่ทุก 1 ใน 30 ใบของขวดยาที่ผลิตโดยเครื่องจักร B ใช้การไม่ได้(ชำรุด) จงหา **(3 คะแนน)**

ก) สัดส่วนของขวดยาที่ใช้การไม่ได้ (ชำรุด)

ข) ความน่าจะเป็นที่ขวดยาเป็นขวดยาจากเครื่องจักร A โดยทราบว่าขวดยานั้นเป็นขวดยาที่ใช้การได้ (ไม่ชำรุด)

Solution

กำหนดให้ A คือความน่าจะเป็นที่ขวดยาผลิตที่นำมาตรวจสอบแล้วชำรุด

B_i คือความน่าจะเป็นที่ขวดยาผลิตจากเครื่องจักร A และ B ตามลำดับ $i = 1, 2$

$P(B_1) = 0.7$ คือค่าความน่าจะเป็นที่ขวดยาจะผลิตมาจากเครื่องจักร A

$P(B_2) = 0.3$ คือค่าความน่าจะเป็นที่ขวดยาจะผลิตมาจากเครื่องจักร B

$P(A|B_1) = 0.05$

$P(A|B_2) = 0.0333$

ก) หาสัดส่วนของขวดยาที่ใช้การไม่ได้ (ชำรุด)

สัดส่วนของขวดยาที่ใช้การไม่ได้จากเครื่องจักร A $= P(B_1) * P(A|B_1) = (0.7) * 0.05 = 0.035$

สัดส่วนของขวดยาที่ใช้การไม่ได้จากเครื่องจักร B $= P(B_2) * P(A|B_2) = (0.3) * 0.0333 = 0.01$

เพราะฉะนั้น สัดส่วนของขวดยาที่ใช้การไม่ได้ทั้งหมด $= 0.035 + 0.01 = 0.045$

ข) ความน่าจะเป็นที่ขวดยาเป็นขวดยาจากเครื่องจักร A โดยทราบว่าขวดยานั้นเป็นขวดยาที่ใช้การได้ (ไม่ชำรุด)

จาก $P(A|B_1) = 0.05$ คือความน่าจะเป็นของขวดยาที่ใช้การไม่ได้ (ชำรุด) ที่มาจากเครื่องจักร A

$P(A|B_2) = 0.0333$ คือความน่าจะเป็นของขวดยาที่ใช้การไม่ได้ (ชำรุด) ที่มาจากเครื่องจักร B

$1 - P(A|B_1) = (1 - 0.05) = 0.95$ คือความน่าจะเป็นของขวดยาที่ใช้การได้ที่มาจากเครื่องจักร A

$1 - P(A|B_1) = (1 - 0.0333) = 0.9667$ คือความน่าจะเป็นของขวดยาที่ใช้การได้ที่มาจากเครื่องจักร B

$$P(A'|B_1) = \frac{P(B_1) * [1 - P(A|B_1)]}{P(B_1) * [1 - P(A|B_1)] + P(B_2) * [1 - P(A|B_2)]}$$

$$P(B_1|A) = \frac{(0.7) * (0.95)}{(0.7) * (0.95) + (0.3) * (0.9667)} = 0.6963$$

3. ถ้าตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y มีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม ดังนี้ **(6 คะแนน)**

X	Y		
	-1	**0**	**1**
-1	1/6	1/3	1/6
0	0	0	0
1	1/6	0	1/6

ก) จงหาการแจกแจงมาร์จินัลของ X หรือ g(x) และการแจกแจงมาร์จินัลของ Y หรือ h(y)

ข) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P(X = -1 | Y = 1)

ค) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P(Y = 1 | X = -1)

ง) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข g(X | y = 1), h(Y | x = -1)

Solution

ก) จงหาการแจกแจงมาร์จินัลของ X หรือ g(x) และการแจกแจงมาร์จินัลของ Y หรือ h(y)

หา $g(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y} P(X = x, Y = y)$

$$g(-1) = P(X = -1) = \sum_{\forall y} P(X = -1, Y = y)$$

$$= P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$g(0) = P(X = 0) = \sum_{\forall y} P(X = 0, Y = y)$$

$$= P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1)$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$g(1) = P(X = 1) = \sum_{\forall y} P(X = 1, Y = y)$$

$$= P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

X	-1	0	1
$g(x) = P(X = x)$	2/3	0	1/3

หา $h(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x} P(X = x, Y = y)$

$$h(-1) = P(Y = -1) = \sum_{\forall x} P(X = x, Y = -1)$$

$$= P(X = -1, Y = -1) + P(X = 0, Y = -1) + P(X = 1, Y = -1)$$

$$= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} \ = \frac{1}{3}$$

$$h(0) = P(Y = 0) = \sum_{\forall x} P(X = x, Y = 0)$$

$$= P(X = -1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0)$$

$$= \frac{1}{3} + 0 + 0 \ = \frac{1}{3}$$

$$h(1) = P(Y = 1) = \sum_{\forall x} P(X = x, Y = 1)$$

$$= P(X = -1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1)$$

$$= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} \ = \frac{1}{3}$$

Y	-1	0	1
$h(y) = P(Y = y)$	1/3	1/3	1/3

ข) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P(X = -1 | Y = 1)

จาก $P[X = x | Y = y] = \dfrac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]}$

$$P[X = -1 | Y = 1] = \frac{P[X = -1, Y = 1]}{P[Y = 1]} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$$

ค) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P(Y = 1 | X = -1)

จาก $P[Y = y | X = x] = \dfrac{P[Y = y, X = x]}{P[X = x]}$

$$P[Y = 1 | X = -1] = \frac{P[Y = 1, X = -1]}{P[X = -1]} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$$

ง) จงหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข g(X | y = 1), h(Y | x = -1)

จาก $g\left(X=x \middle| Y=y\right)=\dfrac{P[X=x,Y=y]}{P[Y=y]}$ จะได้ $g\left(X=x \middle| Y=1\right)=\dfrac{P[X=x,Y=1]}{P[Y=1]}$

$$g\left(X=-1 \middle| Y=1\right)=\frac{P[X=-1,Y=1]}{P[Y=1]}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}$$

$$g\left(X=0 \middle| Y=1\right)=\frac{P[X=0,Y=1]}{P[Y=1]}=\frac{0}{1/3}=0$$

$$g\left(X=1 \middle| Y=1\right)=\frac{P[X=1,Y=1]}{P[Y=1]}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}$$

X	-1	0	1
$g(x \mid y=1)=P\left(X=x \mid y=1\right)$	1/2	0	1/2

จาก $h\left(Y=y \middle| X=x\right)=\dfrac{P[X=x,Y=y]}{P[X=x]}$ จะได้ $h\left(Y=y \middle| X=-1\right)=\dfrac{P[X=-1,Y=y]}{P[X=-1]}$

$$h\left(Y=-1 \middle| X=-1\right)=\frac{P[X=-1,Y=-1]}{P[X=-1]}=\frac{1/6}{2/3}=\frac{1}{4}$$

$$h\left(Y=0 \middle| X=-1\right)=\frac{P[X=-1,Y=0]}{P[X=-1]}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{2}$$

$$h\left(Y=1 \middle| X=-1\right)=\frac{P[X=-1,Y=1]}{P[X=-1]}=\frac{1/6}{2/3}=\frac{1}{4}$$

Y	-1	0	1
$h(y \mid x=-1)=P\left(Y=y \mid x=-1\right)$	1/4	1/2	1/4

4. คอมพิวเตอร์แบบพกพาเคลื่อนที่ภายในขอบเขตตามแนวแกน X ภายในเส้นตรง x = 1 และเส้นตรง x = y กำหนดให้ (X, Y) แทนตำแหน่งของคอมพิวเตอร์ ณ เวลาที่กำหนดให้มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & ; 0 < y < x, \text{ และ } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ที่อื่นๆ} \end{cases}$$

ก) จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ XY = E[XY]

ข) จะสรุปได้หรือไม่ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน **(5 คะแนน)**

Solution

ก) จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ $XY = E[XY]$

จากสูตร $E[XY] = \iint_{\forall x \forall y} xyf(x,y)\,dydx$

$$= \int_0^1 \int_0^x xy(8xy)\,dydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (8x^2y^2)\,dydx \qquad = \int_0^1 (8x^2) \int_0^x (y^2)\,dydx$$

$$= \int_0^1 (8x^2)\left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^x dx \qquad = \int_0^1 (8x^2)\left(\frac{(x^3 - 0^3)}{3}\right)dx$$

$$= \int_0^1 (8x^2)\frac{x^3}{3}dx \qquad = \int_0^1 \frac{8x^5}{3}dx \qquad = \frac{8}{3}\int_0^1 x^5 dx$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 \qquad = \frac{8}{3}\left(\frac{(1^6 - 0^6)}{6}\right) \qquad = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{8}{18} \qquad = \frac{4}{9}$$

ข) จะสรุปได้หรือไม่ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

โดยพิสูจน์ว่า $E[XY] = E[X] * E[Y]$ ถ้าเท่ากันจึงสรุปได้ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

จากข้อ ก) $E[XY] = \dfrac{4}{9}$

โดยหา $E[X]$ จากสูตร $E[X] = \int_{\forall x} x.f_x(x)\,dx$

$$f_x(x) = \int_{\forall y} f(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy\,dy \qquad = (8x)\int_0^x y\,dy$$

$$= (8x)\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x \qquad = (8x)\left(\frac{(x^2 - 0^2)}{2}\right)$$

$$= (8x)\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad = 4x^3$$

ดังนั้น $E[X] = \int_{\forall x} x.f_x(x)dx = \int_0^1 x.(4x^3)dx \quad = \int_0^1 4x^4 dx$

$$E[X] = \frac{4x^5}{5}\Bigg|_0^1 \; = \frac{4(1^5 - 0^5)}{5} = \frac{4}{5}$$

โดยหา $E[Y]$ จากสูตร $E[Y] = \int_{\forall y} y.f_y(y)dy$

$$f_y(y) = \int_{\forall x} f(x,y)dx = \int_y^1 8xydx \qquad = (8y)\int_y^1 xdx$$

$$= (8y)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_y^1 \qquad = (8y)\left(\frac{(1^2 - y^2)}{2}\right)$$

$$= (4y)(1 - y^2) \qquad = (4y - 4y^3)$$

ดังนั้น $E[Y] = \int_{\forall y} y.f_y(y)dy = \int_{\forall y} y.(4y - 4y^3)dy \qquad = \int_{\forall y} (4y^2 - 4y^4)dy$

$$= \int_0^1 (4y^2)dy - \int_0^1 4y^4 dy \qquad = \left(\frac{4y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 - \left(\frac{4y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{4(1^3 - 0^3)}{3}\right) - \left(\frac{4(1^5 - 0^5)}{5}\right)$$

$$E[Y] = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} \qquad = \frac{8}{15}$$

พบว่า $E[XY] \neq E[X] * E[Y]$ จะเห็นได้ว่า

โดย $\frac{4}{9} \neq \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)$ ดังนั้น สรุปว่า X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

5. โรงงานแห่งหนึ่งพบว่า ขดลวดทองแดงที่ซื้อมามักจะพบรอยตำหนิจากการขีดข่วนจากข้อมูลของโรงงานพบว่าจำนวนรอยตำหนิโดยเฉลี่ยที่พบในอดีตมีค่าเท่ากับ 2.3 รอยต่อความยาว 1 มิลลิเมตร **(6 คะแนน)**

ก) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิจำนวน 2 รอยในความยาว 1 มิลลิเมตร

ข) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิจำนวน 10 รอยในความยาว 5 มิลลิเมตร

ค) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิอย่างน้อยจำนวน 1 รอยในความยาว 2 มิลลิเมตร

Solution

ก) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิจำนวน 2 รอยในความยาว 1 มิลลิเมตร

จากสูตรการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง

$$P[X=x]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},x=0,1,2,3...$$

$E[X]=\lambda$ คือค่าเฉลี่ยต่อหน่วความยาว 1 มิลลิเมตร เท่ากับ 2.3

$$P[X=2]=\frac{e^{-2.3}2.3^{2}}{2!}=\frac{(0.10025)(5.29)}{2}=\frac{(0.5303)}{2}=0.265$$

ข) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิจำนวน 10 รอยในความยาว 5 มิลลิเมตร

$E[X]=\lambda$ คือค่าเฉลี่ยต่อหน่วความยาว 5 มิลลิเมตร เท่ากับ 2.3x5 = 11.5

$$P[X=10]=\frac{e^{-11.5}11.5^{10}}{10!}=\frac{\left(1.013x10^{-5}\right)\left(4.045x10^{10}\right)}{3628800}=\frac{(409758.5)}{3628800}=0.113$$

ค) จงหาค่าความน่าจะเป็นที่ตรวจสอบพบรอยตำหนิอย่างน้อยจำนวน 1 รอยในความยาว 2 มิลลิเมตร

$E[X]=\lambda$ คือค่าเฉลี่ยต่อหน่วความยาว 5 มิลลิเมตร เท่ากับ 2.3x2 = 4.6

$$P[X\geq 1]=1-P[X=0]=1-\frac{e^{-4.6}4.6^{0}}{0!}=1-\frac{(0.01005)(1)}{1}$$

$$=1-(0.01005)=0.9899$$

6. บริษัท ABA ทำการสั่งซื้อวัตถุดิบจากผู้ขาย (Supplier) จำนวน 3 ราย วัตถุดิบต้องมีความแข็งสอดคล้องกับข้อกำหนดมาตรฐาน สำหรับสินค้าที่จะทำการผลิต วิศวกรด้านการควบคุมคุณภาพ จึงทำการสุ่มตัวอย่างวัตถุดิบ 105 ชิ้น และทำการคัดแบ่งได้ข้อมูลดังตารางต่อไปนี้ **(5 คะแนน)**

ผู้ขาย	**วัตถุดิบสอดคล้องกับข้อกำหนด (ชิ้น)**	
	สอดคล้อง	ไม่สอดคล้อง
ผู้ขายรายที่ 1	10	15
ผู้ขายรายที่ 2	25	5
ผู้ขายรายที่ 3	34	16

กำหนดให้ A คือเหตุการณ์ที่วัตถุดิบซื้อมาจากผู้ขายรายที่ 2

B คือเหตุการณ์ที่วัตถุดิบสอดคล้องกับข้อกำหนด

C คือเหตุการณ์ที่วัตถุดิบไม่สอดคล้องกับข้อกำหนด

จงหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. $P(A)$ 2. $P(B)$ 3. $P(A \cap B)$ 4. $P(A \cup B)$ 5. $P(A' \cup B)$ 6. $P(A \cap C)$

7. $P(A \cup C)$ 8. $P(A' \cup C)$

Solution

1. $P(A) = \frac{30}{105} = 0.285$
2. $P(B) = \frac{69}{105} = 0.657$
3. $P(A \cap B) = \frac{25}{105} = 0.238$
4. $P(A \cup B) = \frac{74}{105} = 0.704$
5. $P(A' \cup B) = \frac{95}{105} = 0.904$
6. $P(A \cap C) = \frac{5}{105} = 0.047$
7. $P(A \cup C) = \frac{61}{105} = 0.580$
8. $P(A' \cup C) = \frac{75}{105} = 0.714$