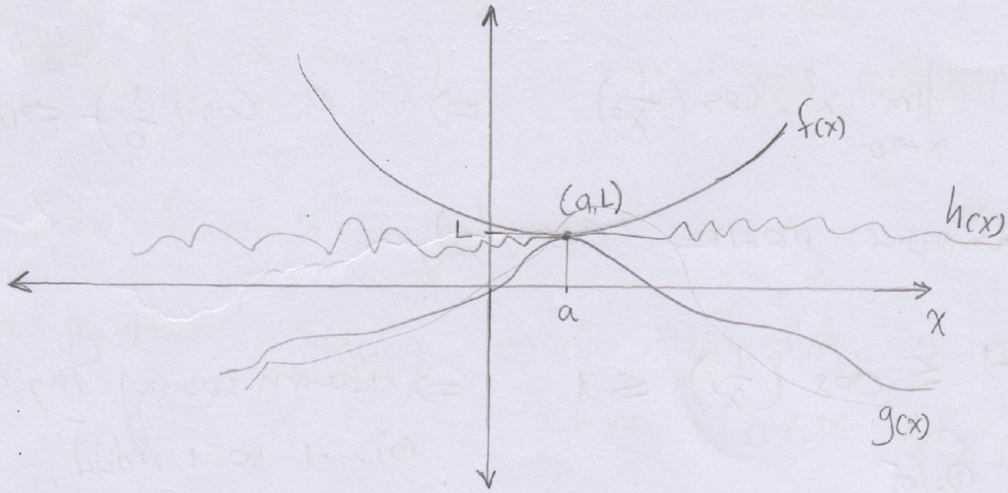
THE SQUEEZE THEOREM



สมมติว่า $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$

เมื่อ $\lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} f(x) = L$

จะได้ $\lim_{x \to a} h(x) = L$ ——— ##

Ex If $3x \leq f(x) \leq x^2 + 2$, for $0 \leq x \leq 2$, evaluate : $\lim_{x \to 1} f(x)$

Sol^n ลิมิตด้านซ้าย $\lim_{x \to 1} 3x = 3$

ลิมิตด้านขวา $\lim_{x \to 1} x^3 + 2 = 3$

ดังนั้น $\underbrace{\lim_{x \to 1} 3x}_{3} \leq \lim_{x \to 1} f(x) \leq \underbrace{\lim_{x \to 1} x^3 + 2}_{3}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 3}$ ——— ##

THE SQUEEZE THEOREM

Ex FIND $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow 0 \cdot \cos\left(\frac{1}{0}\right) \Rightarrow$ หาค่าไม่ได้

Sol^n ให้พิจารณา พจน์ของ $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le 1$$

$\Rightarrow$ เนื่องจาก $\cos(x)$ ใดๆ จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เท่านั้น

เมื่อคูณด้วย x^2 จะได้

$$(1)-x^2 \le x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le x^2(1)$$

take limit จะได้

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 \le \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \le 0$$

$\therefore \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ ——— ###

Ex Find $\lim_{x\to 1} f(x)$ given that: $4 \le f(x) \le x^2+6x-3$ for all x

Sol^n take limit ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\lim_{x\to 1} 4 \le \lim_{x\to 1} f(x) \le \lim_{x\to 1}(x^2+6x-3)$$

$$4 \le \lim_{x\to 1} f(x) \le 1^2+6(1)-3$$

$$4 \le \lim_{x\to 1} f(x) \le 4$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 4$ ——— ###

THE SQUEEZE THEOREM

Ex $\lim_{x \to 0} x^4 \sin\left(\frac{3}{x}\right)$ พิจารณา $\Rightarrow 0 . \sin\left(\frac{3}{0}\right) \Rightarrow$ หาค่าไม่ได้

$\underline{Sol^n}$ ให้ $f(x) = x^4 . \sin\left(\frac{3}{x}\right)$

พิจารณาพจน์ของ $\sin\left(\frac{3}{x}\right) \Rightarrow$ เมื่อ x เป็นค่าใดๆ $\sin(x)$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เท่านั้น (Rang)

$$-1 \le \sin\left(\frac{3}{x}\right) \le 1 \quad ; \text{for all } x$$

คูณทั้งสมการด้วย x^4 จะได้

$$-x^4 \le x^4 . \sin\left(\frac{3}{x}\right) \le x^4$$

take limit ทั้งสามข้างของสมการ จะได้

$$\lim_{x \to 0} -x^4 \le \lim_{x \to 0} x^4 . \sin\left(\frac{3}{x}\right) \le \lim_{x \to 0} x^4$$

$$0 \le \lim_{x \to 0} x^4 . \sin\left(\frac{3}{x}\right) \le 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} x^4 . \sin\left(\frac{3}{x}\right) = 0 \quad \text{———— \#\#\#}$$

THE SQUEEZE THEOREM AND ABSOLUTE VALUE THEOREM #1

Find the limit of each sequence

a). $\left\{ \frac{1}{n^3} \sin(n^2) \right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n^2) \Rightarrow$ พิจารณา $\frac{1}{\infty} \cdot \sin(\infty) \Rightarrow 0.$

<u>Sol</u> พิจารณาค่าของ $\sin(n^2)$ เนื่องจาก $\sin(x)$ ใดๆ จะมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เท่านั้น จะได้

$$-1 \le \sin(n^2) \le 1$$

$$\frac{-1}{n^3} \le \frac{1}{n^3} \sin(n^2) \le \frac{1}{n^3}$$

take limit $x \to \infty$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n^2) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n^2) \le 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sin(n^2) = 0 \quad \text{———} \#\#\#$$

---

b). $x_n = \dfrac{(-1)^n + n^2}{n^2}$;

If $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ } #

<u>Sol^n</u> $= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} \right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} + 1 \right]$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}}_{?} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{1}$$

<u>Note</u> If $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \right]$ ใช้ absolute value

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

THE SQUEEZE THEOREM AND ABSOLUTE VALUE THEOREM #2, 3

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n^2}{n^2} = 1 \qquad \text{———} \# \# \#$$

---

c). $\left\{ n^{-n^3} \right\}$

Sol พิจารณาโดยอาศัย $\left\{ \frac{1}{n^{n^3}} \right\}$ for $n \geq 1$ จะได้ $n^{n^3} \geq n^1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n^{n^3}} \leq \frac{1}{n}$$

$\therefore$ จะได้ $\quad 0 \leq \frac{1}{n^{n^3}} \leq \frac{1}{n}$

take limit ทั้งสองด้าน $n\to\infty$ จะได้

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n^3}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n^3}} \leq 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n^3}} = 0 \qquad \text{———} \# \# \#$$
