SEQUENCE AND SERIES

อนุกรมอนันต์ INFINITE SERIES

\# เป็นอันดับพิเศษเรียกว่า อนุกรมอนันต์

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นอันดับ เมื่อ a_n เป็นจำนวนจริง จะสร้างอันดับ $\{S_n\}$ ขึ้นมาอีกอันหนึ่งโดย

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

เราเรียก S_n ว่า เป็นผลบวกย่อย (partial sum) ของ n เทอมแรก

จะเรียกว่าอันดับ $\{S_n\}$ ว่าเป็นอนุกรมอนันต์ (Infinite series) หรือเรียกสั้นๆ ว่าอนุกรม (series) และเขียนแทนอนุกรมด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Ex

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

\# ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = k$ กล่าวได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า หมายความว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีผลบวกของอนุกรมเท่ากับ k

\# ถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n$ = หาค่าไม่ได้ กล่าวได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

<u>นิยาม</u> 1 # ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม ซึ่งมีลำดับเป็นผลบวกย่อย $\{S_n\}$

ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ ลู่เข้าหา k แล้วจะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหา k เขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \quad \text{หรือ} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = k$$

เรียก k ว่าเป็นผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

<u>นิยาม</u> 2 # ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่ลู่เข้า เราจะกล่าวได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า และหาผลบวกไม่ได้

<u>Ex</u> จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และพร้อมทั้งหาผลบวกด้วย

<u>วิธี</u> ให้ $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)}$

และให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right)$$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ทุกๆ ค่า $n \geq 1$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ ——— ###

แสดงว่า ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหา 1

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมเท่ากับ 1

Ex จงแสดงให้เห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

Sol $a_n = (-1)^{2n-1} \Rightarrow$ หา $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$

จะได้ $S_n = (-1) + (-1) + (-1) + \dots = -n$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$

แสดงว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับไม่ลู่เข้า

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า ——— ###

Ex จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

Sol จะได้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$

$$= (1) + (-1) + (1) + (-1) + \dots + (-1)^{n+1}$$

จะเห็นได้ว่า

$$S_n = \begin{cases} -1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} S_n$ = หาค่าไม่ได้ และ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่ลู่เข้า

จึงสรุปว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้าด้วย ——— ###

Ex จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

Sol $a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \geq 1$ ทุกๆค่า $n \geq 1$

ดังนั้น $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$

$$= \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} \geq 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

จึงสรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า ——##

7.1 Divergence test ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ หรือ $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่าไม่ได้ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

7.2 แต่ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ อาจจะลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าก็ได้

7.3 ถ้า $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วยกันทั้งคู่ แล้วจะได้

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าเช่นกัน

2) $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = kA$ ทุกๆ จำนวนจริง k

7.4 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

$k \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

1) $\sum_{n=1}^{\infty} k b_n$ จะเป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ จะเป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

ข้อสังเกต

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + (-1) b_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + (-1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A - B$$

2 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย ทุกๆ ค่า $p > 1$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + \sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

3 และในทางตรงกันข้าม ถ้า $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า ทุกๆ ค่า $p > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

หรือจะได้ว่า $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125}$

4 เลขดัชนี n อาจจะไม่เริ่มจาก 1 ก็ได้ ซึ่งการเริ่มจากตัวเลขอื่นก็ไม่มีผลกระทบต่อการลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าของอนุกรมเลย เช่น อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

อาจจะเขียนในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ หรือ $\sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$ หรือ $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}$

ท.5 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหา A และให้ $\sum_{n=1}^{p-1} a_n = k$ แล้วจะได้ว่า

อนุกรม $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าหา $A - k$

ความหมายของ ท.5 คือเราเอาเทอมต่างๆ ของอนุกรมจำนวนหนึ่งที่นับได้ (finite term) เทอมจำกัด ออกไปจะไม่มีผลกระทบต่อการลู่เข้า/ลู่ออก. แต่จะกระทบกระเทือนเฉพาะผลบวกของอนุกรมเท่านั้น

ท.6 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{p-1} a_n = k$ แล้ว $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าด้วย

อนุกรมเรขาคณิต GEOMETRIC SERIES

นิยาม อนุกรมเรขาคณิต หมายถึงอนุกรมที่มีรูปทั่วไปเป็น $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ และเรียก a ว่าเทอมแรกของอนุกรม และเรียก r ว่าอัตราส่วนร่วม (Common ratio)

Ex

$1 + x + x^2 + \dots$

$2 + 4 + 8 + \dots$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

ท.7 กำหนดให้ $a \neq 0$

1) ถ้า $|r| < 1$ แล้วจะได้ว่า อนุกรม $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{a}{1-r}$

2) ถ้า $|r| > 1$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ จะเป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า

โดยกำหนดให้ $a \neq 0$ และ

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$ ——— ①

SEQUENCE AND SERIES

จากสมการ ①

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad \text{——— ①}$$

คูณ r คูณทั้งสองข้างของสมการ ① จะได้

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad \text{——— ②}$$

นำ ① − ②

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n = (1-r^n)a$$

$$\therefore \; S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

เมื่อ $n = \infty$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}\left[1 - \lim_{n\to\infty} r^n\right] \quad \text{——— ③}$$

พิจารณา ③

$\boxed{1}$ เมื่อ $|r| < 1$ จากคุณสมบัติของลิมิตว่า $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \;;\; |x| < 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

จาก ③ จะได้ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ ——— ###

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

$\boxed{2}$ เมื่อ $|r| \geq 1$ สามารถแยกได้ 3 แบบคือ $r \geq 1$ และ $r \leq 1$; $r = 1$

$\boxed{2}$ ถ้า $|r| \geq 1$ ดังนั้น $r \geq 1$ หรือ $r \leq -1$

2.1) ถ้า $r = 1$

$$S_n = a + a + a + \dots + a = na$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = a \lim_{n\to\infty} n = \infty \quad (\because a \neq 0)$$

2.2) ถ้า $r = -1$

$$S_n = a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n =$ หาค่าไม่ได้ $(\because a \neq 0)$

2.3) ถ้า $|r| > 1$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n =$ หาค่าไม่ได้

สรุปได้ว่า ถ้า $|r| \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} ar$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า (หาผลบวกไม่ได้)

Ex อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Sol เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่ $r = -\frac{2}{3}$ ดังนั้น $|r| < 1$ จึงได้ว่า

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ

จากสูตร $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$; $a = 1$

จะได้ผลบวกเท่ากับ $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \cdots = 3/5$ #

Ex อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Sol เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $r = \frac{1}{3}$ ดังนั้น $|r| < 1$ จึงได้ว่า

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ

$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ #

Ex อนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่ $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$

Sol เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ $r = -\frac{5}{4}$ ดังนั้น $|r| > 1$ จึงได้ว่า

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า และหาผลบวกไม่ได้