SEQUENCE AND SERIES

ชุดของตัวเลขจำนวน , การหาผลบวกของชุดตัวเลขจำนวนเหล่านั้น

ลำดับ , อันดับ (Sequence)

⇒ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน Domain เป็นเซตจำนวนเต็มบวก หรือ สับเซตของจำนวนเต็มบวก

⇒ เป็นฟังก์ชันที่มีเรนจ์เป็น (Range) เป็นสับเซตของจำนวนจริง

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนลำดับคือ $\{a_n\}$ โดยที่ a_n หมายถึงเทอมที่ n หรือ พจน์ที่ n ของลำดับ เช่น

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\left\{n^2\right\} = \left\{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\right\}$$

$$\left\{(-1)^n\right\} = \left\{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{3n+4}{2n-1}\right\} = \left\{7, \frac{10}{3}, \frac{13}{5}, \frac{16}{7}, \ldots, \frac{3n+4}{2n-1}, \ldots\right\}$$

⇒ จะเรียก f ว่าลำดับ ถ้าโดเมนของ f คือ เซตของ $\{1, 2, 3, \ldots n\}$ หรือเซตของจำนวนเต็มบวก

⇒ ถ้าโดเมนของ f เป็นเซต $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ จะเรียก f ว่าเป็นลำดับจำกัด (finite sequence) นั่นคือ $f = \{(k, f(k)) \mid k = 1, 2, 3, \ldots, n\}$

⇒ ถ้าโดเมนของ f เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก $\{1, 2, 3, \ldots\}$ จะเรียก f ว่าเป็นลำดับอนันต์ (infinite sequence) นั่นคือ

$$f = \{(k, f(k)) \mid k = 1, 2, 3, \ldots\}$$

ศึกษาอันดับ ลำดับ อนันต์

เนื่องจากโดเมนของอันดับอนันต์เป็นจำนวนเต็มบวกเหมือนกันทั้งหมด ส่วนที่จะแตกต่างกันได้คือส่วนของพิสัย (Range) เราจึงเขียนอันดับอนันต์ด้วย

$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$

เขียนย่อๆ เป็น $\{f(n)\}$ แทน เทอมที่ n ของอันดับ

โดยทั่วไปนิยมเขียน a_n แทน $f(n)$

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

<u>ตัวอย่างอันดับอนันต์</u>

$\{n-1\}$ คือ $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, \ldots$

$\{3\} \Rightarrow 3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$

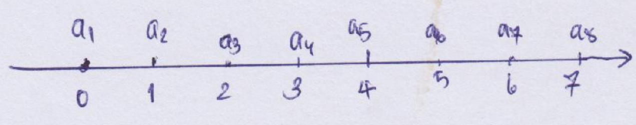
$\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\} \Rightarrow$

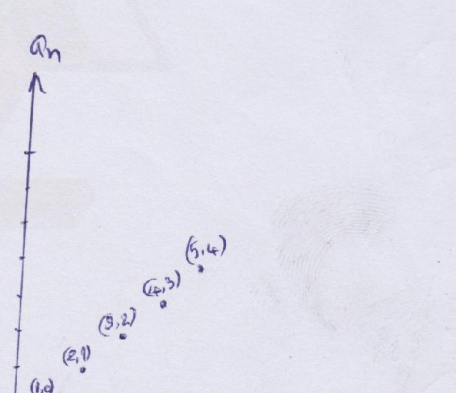
$\left\{1-\dfrac{1}{n}\right\} \Rightarrow$

$\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\} \Rightarrow$

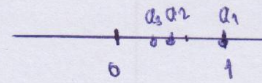
<u>Ex</u> จงเขียนกราฟของอันดับต่อไปนี้

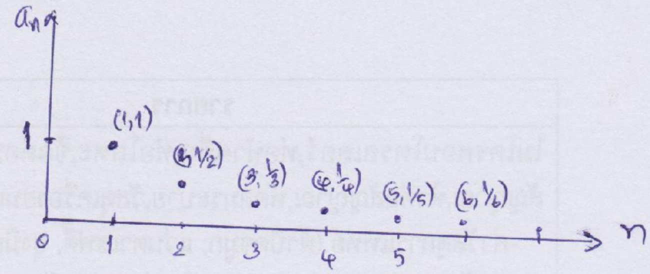
$a_n = n-1$





<u>Ex</u> $a_n = \frac{1}{n}$





<u>Ex</u> จงพิจารณากราฟของลำดับต่อไปนี้

- $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

- $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

- $a_n = (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

- $a_n = 3$

<u>นิยาม</u> ลำดับ $\{a_n\}$ กล่าวได้ว่ามีลิมิตเป็นจำนวนจริง L ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใดๆ มีจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่าของ $n > N$

แล้ว L เป็นลิมิตของลำดับ เราจะเขียนแทนด้วย

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = L}$$

<u>Ex</u> จงพิสูจน์ว่า $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ มีลิมิตเป็น 0

<u>Sol</u> จากนิยาม ถ้ากำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n}$ และ $L = 0$ จะได้ว่า

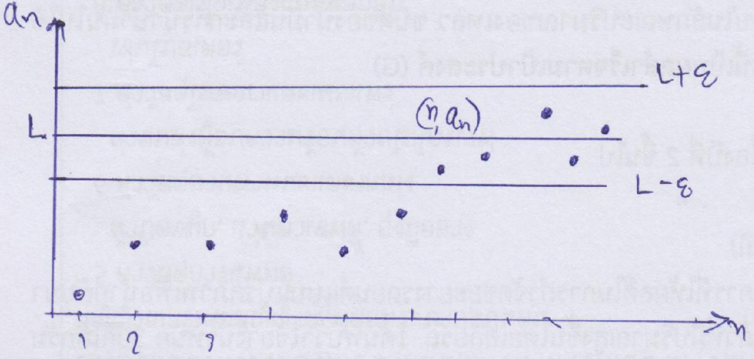
$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

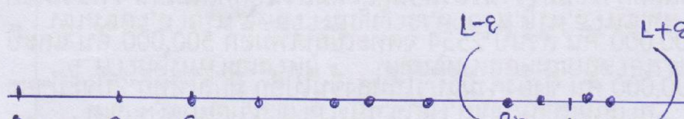
กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่าศูนย์ $\varepsilon > 0$ จะต้องหาจำนวนเต็มบวก N ที่ทำให้ $|a_n - L| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ ทุกค่า $n > N$

ถ้าเลือก N ที่ทำให้ $N > \frac{1}{\varepsilon}$ จะได้ $|a_n - L| > \varepsilon$ ทุกๆ $n > N$

SEQUENCE AND SERIES

ข้อสังเกต ในการที่เราจะพูดว่า $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L นั้น อาจจะพูดได้อีกอย่างหนึ่งว่า สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ที่พจน์ต่างๆ จากพจน์ที่ N ขึ้นไปเรื่อยๆ คือ $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \ldots$ จะต้องอยู่ในช่วงของ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ดังแสดงดังรูปภาพ





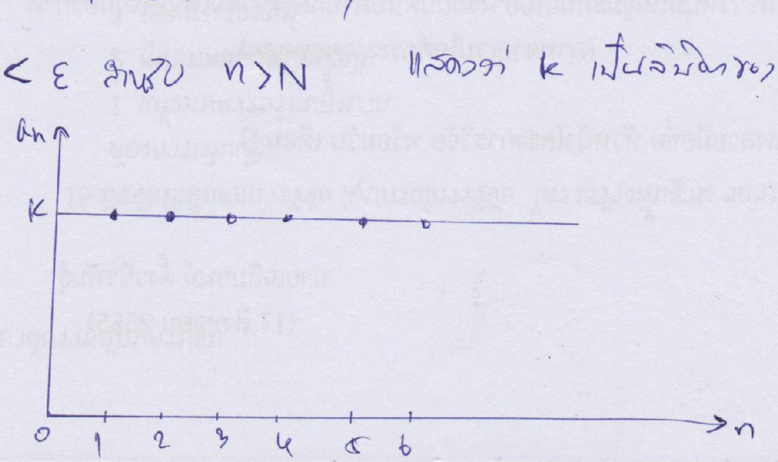
Ex ถ้า k เป็นจำนวนจริงใดๆ ลำดับที่ $\{k\}$ ซึ่งนิยามโดย $a_n = k$ ทุกๆ ค่าของ n จงพิสูจน์ว่า k เป็นลิมิตของลำดับ

Sol^n ถ้าให้ $a_n = k$ และ $L = k$ จากนิยาม

$$|a_n - L| = |k - k| = 0$$

แสดงว่า $|a_n - L| < \varepsilon$ ทุกๆ $\varepsilon > 0$ สำหรับ $n \geq 1$

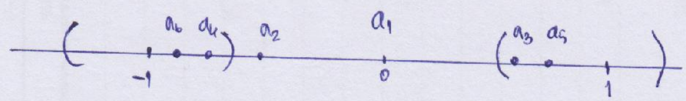
เห็นได้ชัดเจนว่ากำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ ขึ้นมาเราหา N ได้ทุกครั้งโดยให้ $N = 1$ ซึ่งจะทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับ $n > N$ แสดงว่า k เป็นลิมิตของลำดับ



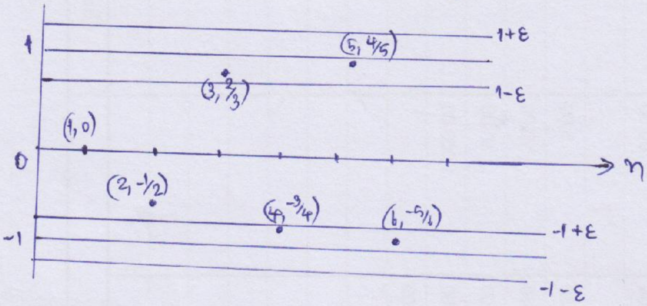
Ex จงแสดงว่าทั้ง 1 และ -1 ต่างก็ไม่ใช่ลิมิตของลำดับ

$$\left\{(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

Sol^n



$$a_n = (-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$



พิจารณาว่า 1 เป็นลิมิตหรือไม่ โดยพยายามหา N ที่ว่า $n > N$ แล้ว a_n จะต้องอยู่ในช่วง $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ต้องอยู่ในช่องบนทั้งหมด จากกราฟพบว่าไม่สามารถหาค่า N ที่ทำให้ a_n อยู่ในช่วง $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ได้เลย และจะเห็นว่า $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ จะได้ a_{n+1} $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$ นั่นคือถ้า a_n อยู่ช่วงบน a_{n+1} ก็จะลงมาอยู่ช่วงล่าง จึงสรุปได้ว่าลำดับนี้ไม่มีลิมิตเป็น 1

ในทำนองเดียวกัน เราก็แสดงได้ว่า -1 ไม่ใช่ลิมิตเช่นเดียวกัน

นิยาม ลำดับ $\{a_n\}$ เรียกว่าเป็นลำดับลู่เข้า (Convergent sequence) ก็ต่อเมื่อลำดับนี้มีลิมิตเป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ เราจะได้ว่า ลำดับลู่เข้า $\{a_n\}$ (Convergent) ที่ L และถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต เราเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับไม่ลู่เข้า (Divergent sequence)

ข้อสังเกต ลำดับที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้ามักจะอยู่ในลักษณะกรณีใดกรณีหนึ่งดังต่อไปนี้

(1) เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $a_n \to \infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(2) เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $a_n \to -\infty$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

(3) เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว a_n ไม่เข้าสู่จำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว

เนื่องจากนิยามที่ใช้พิสูจน์ลิมิตของอันดับนั้นมีความยุ่งยากพอสมควร แต่อย่างไรก็ควรทำความเข้าใจไว้ได้ แต่ก็มีทฤษฎีที่ช่วยให้หาลิมิตของอันดับได้ง่ายขึ้น

ท.1 ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ โดยที่ A, B เป็นจำนวนจริง แล้วเราจะได้ว่า

1). $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$

2) $\lim_{n\to\infty} (k a_n) = k \lim_{n\to\infty} a_n = kA$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

Ex $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) = (-1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = (-1)(0) = 0$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4 - 7n^2}{n^2 + 3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4}{n^2} - 7}{1 + \frac{3}{n^2}} = \dfrac{0 - 7}{1 + 0} = -7$

บทแทรก ถ้าอันดับ $\{a_n\}$ เป็นอันดับที่ไม่ลู่เข้า และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ $c \neq 0$ แล้ว อันดับ $\{ca_n\}$ จะเป็นอันดับที่ไม่ลู่เข้า

Sandwich Theorem

ท.1.1 ถ้ามี N ที่ทำให้ $a_n \le b_n \le c_n$ ทุกๆ ค่า $n > N$

และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ด้วย

บทแทรก ถ้า $|b_n| < c_n$ และ $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

เพราะ: $-c_n \le b_n \le c_n$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} -c_n = 0$ เช่นกัน

Ex ลำดับ $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเป็น 0

เพราะ: $0 \le \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n}$

พิจารณา $\Rightarrow$ $0 \le \cos n \le 1$

จะได้ $\frac{0}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$

Take limit $\lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} \le 0$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ ###

Ex ลำดับ $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและมีลิมิตเป็น 0 ครั้งที่แล้ว

Sol^n เนื่องจากพิจารณา $\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right|$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง $0 \le \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| \le 1$

take limit จะได้ $\lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} \le \left|\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\right| \le \lim \frac{1}{n}$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \le 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0 \quad \text{———— \#\#\#}$$

⇒ กฎของโลปิตาล (L'Hôpital's rule) ช่วยในการหาลิมิตของลำดับได้

Ex จงหา $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

Sol จงหา $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ เพราะว่า $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ มีความหมายสำหรับทุกค่า $x > 1$

ดังนั้นย่อมมีความหมายทุกๆ จำนวนเต็มบวกด้วย ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \text{อยู่ในรูป } \frac{\infty}{\infty}$$

ใช้กฎโลปิตาลช่วย โดยหาอนุพันธ์ทั้งเศษและส่วน (ตัวบน และตัวล่าง) จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d \ln x}{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$\therefore$ สรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ———— ###

Ex จงหา $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$

Sol โดยใช้กฎโลปิตาล เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

ดิฟอนุพันธ์ทั้งบนและล่าง จะได้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d2^n}{d5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{5} = \infty$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \infty$ ———— ###

#จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่ พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ

$\boxed{1}$ $\left\{\frac{5}{n}\right\}$ $\boxed{2}$ $\left\{(-1)^n+1\right\}$ $\boxed{3}$ $\left\{\frac{5n^3-6}{6n^3-4n}\right\}$

$\boxed{4}$ $\left\{\frac{1-n^2}{n+5}\right\}$

ลิมิตของลำดับที่น่าสนใจ

#เป็นลิมิตที่ประยุกต์ใช้ในการหาลิมิตของลำดับอยู่เสมอ. ช่วยลองพิสูจน์ที่มาด้วย

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^t}$ เมื่อ $c>0$ และ $t>0$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

พิสูจน์ $a_n = n^{1/n}$

$\ln a_n = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n}\ln n \to$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ $n\to\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = 0$

เพราะว่า $a_n = n^{1/n} = e^{\ln a_n} \to$ มีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ $n\to\infty$

$e^0 \to 1$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ##

4.) $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ ที่ $x>0$

พิสูจน์ ให้ $a_n = x^{1/n}$ โดยที่ $x>0$ ดังนั้น

$\ln a_n = \ln x^{1/n} = \frac{1}{n}\ln x \to$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ $n\to\infty$

เพราะว่า เมื่อ $n\to\infty$ ทำให้ $\frac{1}{n}\to 0$ และ $\ln x$ คงที่ (ไม่เป็นฟังก์ชันของ n)

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = 0$

เนื่องจาก $a_n = x^{1/n} = e^{\ln a_n} \longrightarrow e^0 = 1$ เมื่อ $n \to \infty$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ ——— ###

5) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ เมื่อ $|x| < 1$

6.) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ ทุกๆ x ที่เป็นจำนวนจริง

7.) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ทุกๆ จำนวนจริง x

จากคุณสมบัติทั้ง 7 ข้อ จะช่วยในการหาลิมิตของลำดับได้อีกมากมาย เช่น

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+4} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+4}$$

$$\left(\sqrt[n]{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2n}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$