มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

MATRIX
เมทริกซ์

Aj.Adisorn Kaewpukdee
Department of Telecommunications Engineering
Faculty of Science and Technology
Nakhon Pathom Rajabhat University

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

Outline

- บทนำเมทริกซ์ (Introduction to Matrix)
- เมทริกซ์เบื้องต้น (Basic Matrix)
- ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)
- เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)
- ระบบสมการเชิงเส้น (Linear Equation System)

เมทริกซ์ MATRIX

$$-3x+4y-z=10$$
$$4x+5y=2$$
$$3x+2y+1=3$$

นำสัมประสิทธิ์ของ x, y และ z ในระบบสมการข้างต้นมาเขียนให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

เราจะเรียกกลุ่มของจำนวนซึ่งเขียนอยู่ [ ] ว่าเมทริกซ์ (Matrix)

❑ นิยาม เมทริกซ์คือกลุ่มของตัวเลข หรือฟังก์ชันซึ่งเขียนเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากภายในเครื่องหมาย [ ]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

จำนวนที่เรียงกันในแนวนอนทั้งหมดเรียกว่า แถว (row)
จำนวนที่เรียงกันในแนวตั้งทั้งหมดเรียกว่า หลัก (column)
พบว่า เมทริกซ์ A มี m แถว และ n หลัก เรียกว่า $m \times n$ เมทริกซ์
กล่าวได้ว่าเมทริกซ์นี้มีมิติ (order) เท่ากับ $m \times n$

- กำหนดให้ เมทริกซ์ A สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

- จำนวนแต่ละจำนวนในเครื่องหมาย [ ] เรียกว่า สมาชิกเมทริกซ์

a_{12} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 2

a_{23} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3

a_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

❑ เมทริกซ์ที่สำคัญ

- เมทริกซ์แถว (row matrix) หมายถึงเมทริกซ์ที่มีแถวเดียว เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์หลัก (column matrix) หมายถึงเมทริกซ์ที่มีหลักเดียว เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) หมายถึงเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นเลขศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์จตุรัส (square matrix) หมายถึงเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน

$$[a_{ij}]_{n\times n}$$

อาจจะเขียนได้เป็น เป็นเมทริกซ์ที่มี n มิติ (matrix of order n) เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix or unit matrix) หมายถึงจตุรัสเมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุม จากบนซ้าย ลงมาล่างขวาสุด เป็น 1 ทั้งหมด และสมาชิกตัวอื่น ๆ เป็น 0 เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ใช้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งมีมิติ n

- สัญลักษณ์ที่ใช้ ตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ A, B, C, …. แทนเมทริกซ์ ใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก a, b, c, …. แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A, B, C, …. ตามลำดับ

- นิยาม ถ้ากำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$

สำหรับ $i=1,2,3,\ldots m$ และ $j=1,2,3,\ldots n$

เช่น

$$A=\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $x=2$ และ $y=5$ เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 8 & \sqrt{9} & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12/2 & \sqrt{16} \\ 8 & 3 & 13 \end{bmatrix}$

การกระทำระหว่างเมทริกซ์

❑ การกระทำระหว่างเมทริกซ์ (matrix operations) ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ การหาร เป็นต้น

❖ **การบวกเมทริกซ์ (addition of matrices)**

นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ จะได้ว่า

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

ต้องมีมิติที่เท่ากัน จึงจะสามารถบวกกันได้

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} -5+2 & 4+5 \\ 3+2 & 8+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

❑ แบบ 3 มิติ

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ -1 & -2 & 6\\ 1 & 5 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 2\\ -3 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1+2 & -3+4 & 4+2\\ -1-3 & -2+1 & 6+2\\ 1+3 & 5-1 & -1+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -1 & 6\\ -4 & -1 & 8\\ 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

❖ การลบเมทริกซ์ (subtraction of matrices)

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ จะได้ว่า

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

เช่น $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$A-B=\begin{bmatrix}1-3 & -2-1 & 1-4\\ -1-3 & -3-2 & 2-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -3\\ -4 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

❖ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ และมี c หรือ k เป็นค่าคงที่ (scalar) จะได้ว่า

$$cA=[ca_{ij}]_{m\times n} \qquad kB=[kb_{ij}]_{m\times n}$$

เช่น $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 6\\ -7 & 1 & -2\end{bmatrix}$

$$2A=\begin{bmatrix}2\times 0 & 2\times(-2) & 2\times 1\\ 2\times(-1) & 2\times 5 & 2\times 2\end{bmatrix}$$

$$2A=\begin{bmatrix}0 & -4 & 2\\ -2 & 10 & 4\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -1 & 2\\ \frac{-7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{bmatrix}$$

❖ การคูณระหว่างเมทริกซ์ (multiplication of matrices)

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B คือ

$$A.B = A\times B = C = [c_{ij}]_{m\times p} \qquad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

ข้อสังเกตุ จากนิยามการคูณเมทริกซ์ AB จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมทริกซ์ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B

มิติของตัวตั้ง	มิติของตัวคูณ	มิติของผลคูณ
$m\times n$	$n\times p$	$m\times p$

ต้องการหา C_{ij} ก็สามารถทำได้โดยการนำเอาแถวที่ i ของ A มาเขียนคู่กับหลักที่ j ของ B หลังจากนั้นทำการคูณแบบตัวต่อตัวแล้วนำผลคูณแต่ละคู่มารวมกัน

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(2\times(1))+(-1\times(-1))+(1\times(2)) & (2\times(3))+(-1\times(4))+(1\times(2))\\ (-1\times(1))+(2\times(-1))+(4\times(2)) & (-1\times(3))+(2\times(4))+(4\times(2))\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 5 & 13\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix}2 & -2 & 6\\ -1 & 1 & -4\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ -4 & 4 & -2\\ -2 & -4 & 1\end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 7\end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix}4\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

- ข้อสังเกต $AB \neq BA$
- ถ้า $AB = 0$ แล้ว A หรือ B ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ 0

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

EXERCISE

จงหาค่าต่อไปนี้

1. $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

3. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 9 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & -11 \end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

EXERCISE

จงหาค่าต่อไปนี้ ถ้ากำหนดให้

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 8 & 3\\ 6 & 1 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 2 & 8\end{bmatrix}$$

1. $-A$
2. $A+B$
3. $2A+4B$
4. $3A+3C$

EXERCISE

จงหาค่าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

1. AB
2. BA
3. A^2

❑ การทรานสโพสของเมทริกซ์ (transpose of matrix)

นิยาม ถ้า $A = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ ทรานสโพสของ A เขียนแทนด้วย A^t หรือ A^T

โดยที่ $A^t = \left[b_{ij} \right]_{n \times m}$ และ $b_{ij} = a_{ji}$

จากนิยามการทรานสโพสของเมทริกซ์ A ก็คือการสลับที่กันระหว่างแถว และหลักของเมทริกซ์ A โดยสลับแถวที่ i ไปเป็นหลักที่ i ทุก ๆ ค่า i

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

❑ คุณสมบัติของการทรานสโพสเมทริกซ์

ถ้ากำหนดให้ A, B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกและคูณกันได้ และ c เป็นสเกลาร์ใดๆ

1) $\left(A^t\right)^t = A$

2) $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$

3) $\left(AB\right)^t = B^t A^t$

4) $\left(cA\right)^t = cA^t$

❑ คุณสมบัติของการกระทำระหว่างเมทริกซ์

คุณสมบัติการบวกของเมทริกซ์

ถ้า A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกกันได้แล้ว

1) $$A+B=B+A$$

2) $$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3) $$A+\underline{0}=\underline{0}+A=A$$

4) $$A+(-A)=(-A)+A=0$$

5) $A+B=A+C$ แล้ว $B=C$

- คุณสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกและคูณกันได้ และ c, d เป็นสเกลาร์

1) $c(A+B) = cA + cB$

2) $A(c+d) = cA + dA$

3) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

4) $A(cd) = c(dA) = d(cA)$

❑ คุณสมบัติการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A, B, C และ I_n เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้

1) $AI_n = I_nA = A$

2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$

4) $C(A+B) = CA + CB$

5) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$ เมื่อ c เป็นสเกลาร์

เมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติพิเศษ

- นิยาม กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ถ้า $A^t = A$ จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)
- นิยาม กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ถ้า $A^t = -A$ จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร (skew symmetric matrix)

- ทฤษฎี ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตรจะได้ว่า

1) nA เป็นเมทริกซ์สมมาตรสำหรับจำนวนจริง n ทุกจำนวน

2) $AA^t = A^t A$

3) A^2 เป็นเมทริกซ์สมมาตร

❑ ทฤษฎี ถ้า A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตรจะได้ว่า

1) kA เป็นเมทริกซ์สมมาตรสำหรับจำนวนจริง k ทุกจำนวน

2) $AA^t = A^t A$

3) A^2 เป็นเมทริกซ์สมมาตร

นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ สมาชิกของเมทริกซ์ที่อยู่บนเส้นทะแยงมุม จากบนซ้ายสุดมายังล่างขวาสุด เรียกว่า สมาชิกในแนวทะแยงมุมหลัก (main diagonal elements)

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

- สมาชิกในแนวทะแยงมุมหลักคือ 2, -1, 1,

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก A ว่าเป็น เมทริกซ์เชิงทะแยงมุม (diagonal matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ i, j ทุกตัวที่ $i\neq j$

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

A, B, C เป็นเมทริกซ์เชิงทะแยงมุม

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก A ว่าเป็น สเกลาร์เมทริกซ์ (scalar matrix) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์เชิงทะแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทะแยงมุมหลักเท่ากันหมดทุกตัว

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก A ว่าเป็น เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน (upper triangular matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ i, j ทุกตัวที่ $i>j$

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

นิยาม ถ้า $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก A ว่าเป็น เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านล่าง (lower triangular matrix) ก็ต่อเมื่อ $a_{ij}=0$ สำหรับ i,j ทุกตัวที่ $i<j$

เช่น

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&0\\2&5&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&5&1\end{bmatrix}$$

เรียกเมทริกซ์ที่เป็น เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน หรือด้านล่างว่า เมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม (triangular matrix)

ข้อสังเกต เมทริกซ์เชิงทะแยงมุมเป็นทั้งเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบนและด้านล่าง

ดีเทอร์มิแนนต์ determinant

- นิยาม ให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ หาดีเทอร์มิแนนท์ของ A คือผลบวกของสมาชิกในเทอมต่างๆ ในรูป

$$(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots.a_{nj_n}$$

หรือ

$$\det(A)=|A|=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots a_{nj_n}$$

เช่น

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=|A|=(-1)^0 a_{11}a_{22}+(-1)^1 a_{12}a_{21}$$

- นิยาม กำหนด $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2

ดีเทอร์มิแนนท์ของ A นิยามดังนี้

$$\det(A)=|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

นิยาม กำหนด $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3

ดีเทอร์มิแนนท์ของ A นิยามดังนี้

$$\det(A)=|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12})$$

- สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ได้ง่ายๆ โดยการนำเอาสมาชิกในสองหลักแรกของ A มาเขียนต่อทางขวามือดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = |A| = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

❑ นิยาม กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ ไมเนอร์ (minor) ของสมาชิก a_{ij} ของ A คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ย่อยของ A ซึ่งเกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j เขียนแทนด้วย M_{ij}

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}$$

$$M_{21}=\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13}$$

❑ นิยาม กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ โคแฟกเตอร์ (cofactor) ของสมาชิก a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ M_{ij} เขียนแทนด้วย A_{ij}

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}=(-1)\left(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}\right)$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}=\left(a_{11}a_{13}-a_{31}a_{13}\right)$$

- ทฤษฎี กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ สำหรับทุกๆ แถวที่ $i=1,2,3,\ldots,n$ จะได้ว่า

$$\det(A)=|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\ldots.+a_{in}A_{in}$$

- ทฤษฎี กำหนดให้ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n\geq 2$ สำหรับทุกๆ หลักที่ $j=1,2,3,\ldots,n$ จะได้ว่า

$$\det(A)=|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}+\ldots.+a_{nj}A_{nj}$$

- ตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

จงหา $\det(A)$

จะเห็นว่าแถวที่ 3 มีสมาชิกที่เป็น 0 มากกว่าแถวอื่นๆ ดังนั้นเพื่อให้รวดเร็วเรา ควรจะกระจายตามแถวที่ 3 ซึ่งจะได้

$$\det(A)=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}$$

$$\det(A)=3.A_{31}+0.A_{32}+0.A_{33}+(-3)A_{34}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (1)\Big[(2\times 1\times 3)+(3\times 3\times 0)+\big(4\times 2\times(-2)\big)\Big]$$

$$-\Big[(0\times 1\times 4)+\big((-2)\times 3\times 2\big)+\big(3\times 2\times(-3)\big)\Big]$$

$$= (1)\big[(-10)-(-30)\big] = (1)\,20 = 20$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)\Big[\big(1 \times 2 \times (-2)\big) + (2 \times 1 \times 2) + \big((-3) \times (-4) \times 0\big)\Big]$$

$$-\Big[\big(2 \times 2 \times (-3)\big) + (0 \times 1 \times 1) + \big((-2) \times (-4) \times 2\big)\Big]$$

$$= (-1)\big[0 - (4)\big] = (-1)(-4) = 4$$

$$\therefore \det(A) = 3(20) + (-3)(4) = 60 - 12 = 48$$

❑ คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

ถ้ากำหนดให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า

1. $\det(A) = \det(A^t)$

2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

3. ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่ง (คอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง) ของ A เป็นศูนย์หมดแล้ว $\det(A) = 0$

4. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการสลับที่ระหว่าง 2 แถว (2 คอลัมน์) ใดๆ ของเมทริกซ์ A แล้ว $\det(B) = -\det(A)$

5. ถ้าสมาชิกใน 2 แถว (2 คอลัมน์) ใดๆ ของเมทริกซ์ A เหมือนกันแล้ว $\det(A) = 0$

6. ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการคูณแถวใดแถวหนึ่ง (คอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่ง) ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k แล้ว $\det(B) = k\det(A)$

7. ถ้าเมทริกซ์ใด ๆ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมจะได้ค่าดีเทอร์มิแนนท์คือผลคูณของสมาชิกที่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมหลัก

เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrices)

- ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n และ $AB = BA = I_n$ แล้วจะกล่าวได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B และเขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

เมทริกซ์ผกผันของ 2×2 เมทริกซ์

(The Inverse of a 2×2 Matrix)

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ A ได้ก็ต่อเมื่อ $ad - bc = \det(A) \neq 0$
และจะเรียกเมทริกซ์ลักษณะนี้ว่า นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ (Non-singular matrix)
แต่ถ้าเมทริกซ์ A มี $\det(A) = 0$ เราจะไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ A ได้
ซึ่งเราจะเรียกเมทริกซ์เช่นนั้นว่าเป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์ หรือเมทริกซ์เอกฐาน
(Singular matrix)

เช่น กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6 - 4}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ผกผันของ 3×3 เมทริกซ์
(The Inverse of a 3×3 Matrix)

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n ที่ $\det(A) \neq 0$ เราจะได้เมทริกซ์ผกผันของ A คือ

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

โดยที่ $adj(A)$ (Adjoint ของเมทริกซ์ A) คือเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n ที่สมาชิกในตำแหน่ง (i, j) คือโคแฟกเตอร์ของ a_{ji}

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จะได้ $adj(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ

หา

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

จะได้

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -14$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 7$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

หา $\det(A)$

พิจารณาที่แถวที่ 1 เนื่องจากมีสมาชิกที่เป็น 0 จะได้

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det(A) = (1)(-7) + (-2)(-14) + (0)(7) = 21$$

จะได้

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

❑ ตัวอย่าง

จาก $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ จงหา $(AB)^{-1}$

วิธีทำ

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2-0}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2-10}\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{-8}\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & 5/16 \\ 1/2 & -1/8 \end{bmatrix}$$

หา $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (5+0) \\ (4+4) & (10+2) \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{24-40}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & 5/16 \\ 1/2 & -1/8 \end{bmatrix}$$

❑ คุณสมบัติของเมทริกซ์ผกผัน

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n ที่หาเมทริกซ์ผกผันได้ $\det(A) \neq 0$

1. เมทริกซ์ผกผันของ A จะมีได้เพียงตัวเดียว

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

3. $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$

4. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$

5. $AB = BA = I_n$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

6. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

7. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

8. ถ้า $AB = 0$ จะได้ว่า $A = 0$ หรือ $B = 0$ หรือทั้งสองเมทริกซ์หาเมทริกซ์ผกผันไม่ได้

การแปลงเมทริกซ์เชิงธาตุมูล

- การแปลงเมทริกซ์เชิงธาตุมูล

(Elementary Matrix Transformation)

คือการกระทำตามแถว หรือคอลัมน์ ของเมทริกซ์ ซึ่งมีประโยชน์มากในการหาเมทริกซ์ผกผัน หรือการหารากของระบบสมการเชิงเส้น

ตัวดำเนินการเปลี่ยนแถวและเปลี่ยนคอลัมน์เชิงธาตุมูล

(Elementary Row and Column Operation)

การกระทำตามแถว Row operation หรือการกระทำตามคอลัมน์ Column operation ของเมทริกซ์คือการกระทำแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถว หรือการสลับที่ระหว่างคอลัมน์ ที่ i และ j
2. การนำค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์มาคูณแถว หรือคูณคอลัมน์ ที่ i และ j

3. การนำค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์มาคูณแถว หรือคอลัมน์ ที่ i และ j แล้นำไป บวกกับแถว หรือคอลัมน์ที่ i และ j โดยที่ $i \neq j$ ยกตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

จะได้ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ เกิดจากการสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 และ 2 $(R_1 \leftrightarrow R_2)$

$C = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -14 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ เกิดจากการคูณแถวที่ 1 ด้วย -2 แล้วนำไป แทนที่ในแถวที่ 1 $(-2R_1 \leftrightarrow R_1)$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ -4 & -22 & -40 \end{bmatrix}$$

เกิดจากการคูณแถวที่ 1 ด้วย -7 แล้วบวกกับแถวที่ 3 แล้วก็นำไปแทนที่ในแถวที่ 3 $\left(-7R_1+R_3 \leftrightarrow R_3\right)$

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์อันดับ $m \times n$ จะกล่าวว่า A สมมูลเชิงแถว row equivalent หรือสมมูลเชิงคอลัมน์ column equivalent กับ B ได้

ถ้า B เกิดจากการกระทำตามแถว หรือคอลัมน์บนเมทริกซ์ A ต่อเนื่องกันจำนวน n ครั้ง เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ใช้สัญลักษณ์ $A \sim B$ แทนเมทริกซ์ A ที่สมมูลกับเมทริกซ์ B และจากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า A สมมูลเชิงแถวกับ B, C และ D

❑ ตัวอย่าง

จงแสดงว่าเมทริกซ์ A สมมูลกับเมทริกซ์ B

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -7/2 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

วิธีทำ จะได้ว่า เมทริกซ์ B เกิดจากการนำ -3 คูณกับแถวที่ 1 แล้วบวกกับแถวที่ 2 ของ $A\left(-3R_1+R_2 \leftrightarrow R_2\right)$

จากนั้นนำ 1/2 มาคูณแถวที่ 2 ของ $A\left(\tfrac{1}{2}R_2 \leftrightarrow R_2\right)$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $A\sim B$

ระบบสมการเชิงเส้น

- รูปทั่วไปของระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปรคือ

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

โดยที่ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{mn}$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ และ $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ เป็นค่าคงที่ของระบบสมการเชิงเส้น

- การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสามารถแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะคือ

1. ไม่มีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
2. มีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งมีคำตอบ 2 แบบ คือ
    2.1 มีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเพียงชุดเดียว
    2.2 มีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นหลายชุด

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีของเกาส์
(Gauss Elimination Method)

จากระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร n สมการ

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- แทนระบบสมการนี้ด้วยเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงที่ของสมการ

สัมประสิทธิ์ของตัวแปร

$$\begin{array}{c}
\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \\
\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array}
\end{array}$$

ค่าคงที่ของระบบสมการ

วิธีแก้ระบบสมการนี้ ให้นำ $\left[A \middle| B\right]$ มาลดรูป ให้ A เปลี่ยนไปเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม (หรือสามเหลี่ยมล่าง) โดยใช้การดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (Elementary Row Operation: E.R.O) ซึ่งมีวิธีการ 3 ข้อคือ

1. สลับ 2 แถวใดๆ ของเมทริกซ์ได้

ใช้สัญลักษณ์ $R_i \leftrightarrow R_j$ หมายถึงให้สลับแถว i กับแถว j

2. นำจำนวนใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 คูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ได้

ใช้สัญลักษณ์ $R_i \leftrightarrow kR_i$ หมายถึงให้เป็นแถว i โดยการนำ $k \neq 0$ คูณแถว i

3. คูณแถวใดแถวหนึ่งด้วยจำนวนคงที่ แล้วนำผลลัพธ์ไปบวกกับอีกแถวหนึ่งได้

ใช้สัญลักษณ์ $R_j = kR_i + R_j$ หมายถึงให้เปลี่ยนแถว j โดยการนำค่าคงที่ k คูณแถวที่ i แล้วนำผลลัพธ์ไปบวกกับแถงที่ j

เมื่อทำการลดรูป $[A|B]$ โดยการทำให้ A เปลี่ยนไปเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมเรียบร้อยแล้ว ก็อาศัยการแทนที่ย้อนกลับ คำนวณหาคำตอบของระบบสมการจากเมทริกซ์ลดรูปขั้นตอนสุดท้ายดังกล่าว

หมายเหตุ ถ้าเมทริกซ์ X ถูกเปลี่ยนด้วยวิธีการ ดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (E.R.O) ไปเป็นเมทริกซ์ Y เราเรียกว่า "X สมมูลกับ Y"

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $X \sim Y$

- ตัวอย่าง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีของเกาส์

3 ตัวแปร 3 สมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

วิธีทำ

$$\left[A|B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\text{E.R.O} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & c_1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & c_3 \end{array}\right]$$

จากเมทริกซ์ลดรูปสุดท้าย แทนค่ากลับเป็นสมการได้ดังนี้

$b_{33}x_3 = c_3$ แก้สมการได้ x_3

$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = c_2$ แทนค่า x_3 แก้สมการได้ x_2

$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = c_1$ แทนค่า x_2 และ x_3 แก้สมการได้ x_1

หมายเหตุ วิธีของเกาส์สามารถประยุกต์ใช้หาคำตอบของระบบสมการ m สมการ n ตัวแปรได้

❑ ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$2x+3y+z=11$$
$$2x+2y+3z=15$$
$$4x-y+3z=11$$

วิธีทำ

$$\left[A\middle|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&11\\2&2&3&15\\4&-1&3&11\end{array}\right]\text{ E.R.O }\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&11\\0&-1&2&4\\0&-7&1&-11\end{array}\right]\begin{array}{l}R_2\leftarrow(-1)R_1+R_2\\R_3\leftarrow(-2)R_1+R_3\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&1&11\\0&-1&2&4\\0&0&-13&-39\end{array}\right]R_3\leftarrow(-7)R_2+R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow (-1)R_2 \\ R_3 \leftarrow (-\frac{1}{13})R_3 \end{array}$$

จากเมทริกซ์ลดรูปสุดท้าย แทนค่ากลับเป็นสมการได้ดังนี้

$$z = 3$$

$$y - 2z = -4$$
$$y = 2(3) - 4$$
$$\therefore y = 2$$

$$2x + 3y + z = 11$$
$$2x = 11 - 3(2) - 3$$
$$\therefore x = 1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 3$$

❑ HW จงหาคำตอบของระบบสมการ

1.

$$x + 2y + z - w = 9$$
$$2x + 4y - 4z + 3w = -5$$
$$2x + 3y - 2z + 2w = 0$$
$$x + 4y - 3z + 2w = -2$$

2.

$$2x + 3y + z = 4$$
$$x - y + 2z = 3$$
$$x + 9y - 4z = 2$$

3.

$$2x + 3y + 2z + 6w = 10$$
$$y + 2z + w = 2$$
$$3x - 3z + 6w = 9$$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้อินเวอร์สของเมทริกซ์

วิธีนี้จะใช้ได้กับระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร n สมการเท่านั้น

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

ระบบสมการนี้สามารถเปลี่ยนเป็นสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ได้ดังนี้

A เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_1 ถึง x_n เรียงลำดับจากหลักที่ 1 ถึงหลักที่ n

X เป็นเมทริกซ์หลัก มีสมาชิกประกอบด้วยตัวแปรของระบบสมการ

B เป็นเมทริกซ์หลัก มีสมาชิกประกอบด้วยค่าคงที่ของระบบสมการเชิงเส้น

$AX = B$

$$\begin{array}{ccc} A & X & B \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \end{array}$$

การแก้สมการโดยวิธีนี้ A จะต้องมีอินเวอร์ส $\left(A^{-1}\right)$ และการแก้สมการสามารถทำได้ดังนี้

จากสมการเมทริกซ์ $AX = B$

นำ $\left(A^{-1}\right)$ คูณทั้งสองข้าง จะได้ $AX\left(A^{-1}\right) = B\left(A^{-1}\right)$

$IX = B\left(A^{-1}\right)$ $\quad \therefore X = \left(A^{-1}\right)B$

❑ สรุป ให้แก้สมการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างเมทริกซ์ A , X และ B
2. หา $\left(A^{-1}\right)$ ถ้าไม่มี $\left(A^{-1}\right)$ จะแก้ปัญหาโดยวิธีนี้ไม่ได้ ต้องใช้วิธีของเกาส์
3. นำเมทริกซ์ที่ได้ทั้งหมดแทนในสมการเมทริกซ์ $X=\left(A^{-1}\right)B$ แล้วจะได้รากของระบบสมการ โดยสมบัติการเท่ากันของเมทริกซ์

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x+y+z=6$$

$$x+2y+3z=14$$

$$x+4y+9z=36$$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

หา $\left(A^{-1}\right)$ จะได้ $\left(A^{-1}\right) = \dfrac{adj\left(A\right)}{\det\left(A\right)}$

$$\det\left(A\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$= \left(18 + 3 + 4\right) - \left(2 + 12 + 9\right) = 25 - 23 = 2$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}=(1)(18-12)=6$$

$$c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}=(-1)(9-3)=-6$$

$$c_{13}=(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=(1)(4-2)=2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = (-1)(9-4) = -5$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = (1)(9-1) = 8$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = (-1)(4-1) = -3$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (1)(3-2) = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(3-1) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (1)(2-1) = 1$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}6 & -6 & 2\\ -5 & 8 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}6 & -5 & 1\\ -6 & 8 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(A^{-1}\right)=\frac{adj(A)}{\det(A)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -5 & 1\\ -6 & 8 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์ $X=\left(A^{-1}\right)B$ จะได้

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & -5 & 1\\ -6 & 8 & -2\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 14\\ 36\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(36-70+36)\\ (-36+112-72)\\ (12-42+36)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $x=1, y=2, z=3$

❑ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของคราเมอร์ (Cramer’s Rule)

การแก้ระบบสมการด้วยวิธีนี้ ใช้ได้กับระบบสมการที่มี ตัแปร สมการ เท่านั้น จะขอยกตัวอย่างสมการ 3 ตัวแปร 3 สมการดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

ให้ Δ (delta) เป็นค่าดีเทอร์มิแนนท์ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของ x, y และ z เรียงลำดับจากหลักที่ i ถึงหลักที่ 3

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x & \quad y & \quad z \end{array} \end{array} \neq 0$$

สัมประสิทธิ์ของตัวแปร

การหาค่า x, y และ z

(1)

$$x.\Delta = x.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(2) (3)

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(4)

$$= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta x \qquad \therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

คำอธิบาย วิธีการหา x ใช้ สมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ ดังนี้

1. นำ x เข้าไปคูณหลักที่ 1 ของ Δ
2. นำ y เข้าไปคูณหลักที่ 2 แล้วนำไปบวกกับหลักที่ 1
3. นำ z เข้าไปคูณหลักที่ 3 แล้วนำไปบวกกับหลักที่ 2
4. แทนค่าคงที่ของระบบสมการ

การหาค่า y และ z สามารถกระทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งสามารถนำมาสรุปขั้นตอนได้ดังนี้

1. หา

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$$

ถ้า $\Delta = 0$ ต้องแก้สมการด้วยวิธีของเกาส์

2. หา Δx, Δy และ Δz ดังนี้

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

นำค่าคงที่ของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ x ใน delta

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

นำค่าคงที่ของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ y ใน delta

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

นำค่าคงที่ของระบบสมการแทนสัมประสิทธิ์ของ z ใน delta

3. คำตอบของระบบสมการคือ

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

- ตัวอย่าง

$$2x + y + z = 0$$
$$4x + 3y + 2z = 2$$
$$2x - y - 3z = 0$$

Δ

Δx

Δy

Δz

- ตัวอย่าง

$$x + y + 5w = 6$$
$$x + 2y + z = 4$$
$$2y + z + w = 6$$
$$3x - 4w = 2$$

Δ

Δx

Δy

Δz

Δw