คะแนน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ ....

เลขที่ ....

ข้อสอบรายวิชา .... รหัสวิชา ....

ชื่อ MR. ADISORN KAEWPUKDEE รหัสประจำตัว .... หมู่เรียน ....

สอบวันที่ .... เดือน .... พ.ศ. ....

3

3.1) จงหาอนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = \cos(x)$ ณ. (รอบจุด) ที่ $x = 2\pi$

วิธีทำ

$f(x) = \cos(x)$ กระจายอนุกรมรอบจุด $x = 2\pi$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & &\Rightarrow & f(2\pi) &= \cos(2\pi) = 1 \\
f'(x) &= -\sin(x) & &\Rightarrow & f'(2\pi) &= -\sin(2\pi) = 0 \\
f''(x) &= -\cos(x) & &\Rightarrow & f''(2\pi) &= -\cos(2\pi) = -1 \\
f'''(x) &= -(-\sin(x)) = \sin(x) & &\Rightarrow & f'''(2\pi) &= \sin(2\pi) = 0 \\
f^{4}(x) &= \cos(x) & &\Rightarrow & f^{4}(2\pi) &= \cos(2\pi) = 1 \\
&\vdots & & & &\vdots
\end{aligned}
$$

ซึ่งจากสูตรอนุกรมเทเลอร์ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(a)\,(x-a)^{n}}{n!}$

หรือ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots$

แทนค่าจะได้

$$f(x) = 1 + (0)(x-2\pi) + \frac{(-1)(x-2\pi)^2}{2!} + \frac{(0)(x-2\pi)^3}{3!} + \frac{(1)(x-2\pi)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{(x-2\pi)^2}{2!} + \frac{(x-2\pi)^4}{4!} - \frac{(x-2\pi)^6}{6!} + \frac{(x-2\pi)^8}{8!} + \ldots$$

$$\therefore f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

#

คะแนน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ..........

เลขที่..........

ข้อสอบรายวิชา.......... รหัสวิชา..........

ชื่อ.......... รหัสประจำตัว.......... หมู่เรียน..........

สอบวันที่.......... เดือน.......... พ.ศ. ....

3.2 จงหาอนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ รอบจุด $x = 0$

Sol^n $f(x) = e^x$ กระจายอนุกรมรอบจุด $x = 0$ ดังนี้

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = e^x & f(0) = e^0 = 1 \\
f'(x) = e^x & f'(0) = e^0 = 1 \\
f''(x) = e^x & f''(0) = e^0 = 1 \\
f'''(x) = e^x & f'''(0) = e^0 = 1 \\
f^4(x) = e^x & f^4(0) = e^0 = 1 \\
\vdots & \vdots \\
f^n(x) = e^x & f^n(0) = e^0 = 1
\end{array}
$$

สูตรอนุกรมแมคคลอริน กระจายรอบจุด $x = 0$ จะได้

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x-0)^3}{3!} + \dots + \frac{f^n(0)(x-0)^n}{n!} + \dots$$

แทนค่าจะได้

$$f(x) = 1 + 1(x-0) + \frac{1(x-0)^2}{2!} + \frac{1(x-0)^3}{3!} + \dots + \frac{1(x-0)^n}{n!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$\therefore$ $f(x) = e^x$ กระจายรอบจุด $x = 0$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \#$$

คะแนน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ..........

เลขที่..........

ข้อสอบรายวิชา.......... รหัสวิชา..........

ชื่อ MR. ADISORN KAEWPUKDEE รหัสประจำตัว.......... หมู่เรียน..........

สอบวันที่.......... เดือน.......... พ.ศ. ....

3.3 จงหาอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x+2}$ รอบจุด $x = 3$

$\underline{Sol^n}$ $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ให้กระจายอนุกรมรอบจุด $x = 3$ ดังนี้

$f(x) = \frac{1}{x+2}$ $\qquad$ $f(3) = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$

$f'(x) = (-1)(x+2)^{-2}$ $\qquad$ $f'(3) = (-1)(3+2)^{-2} = -\frac{1}{5^2}$

$f''(x) = (2)(x+2)^{-3}$ $\qquad$ $f''(3) = (2)(3+2)^{-3} = \frac{2}{5^3}$

$f'''(x) = (-6)(x+2)^{-4}$ $\qquad$ $f'''(3) = (-6)(3+2)^{-4} = \frac{-6}{5^4}$

$f^{4}(x) = (24)(x+2)^{-5}$ $\qquad$ $f^{4}(3) = (24)(3+2)^{-5} = \frac{24}{5^5}$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

สูตร $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(a)(x-a)^n}{n!}$ ในที่นี้ $a = 3$

หรือ $f(x) = f^{0}(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{4}(a)(x-a)^4}{4!} + \cdots$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)(x-3)^2}{2!} + \frac{f'''(3)(x-3)^3}{3!} + \frac{f^{4}(3)(x-3)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{-1}{5^2}(x-3) + \frac{2}{5^3}\frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{-6}{5^4}\frac{(x-3)^3}{3!} + \frac{24}{5^5}\frac{(x-3)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{(x-3)}{5^2} + \frac{(x-3)^2}{5^3} - \frac{(x-3)^3}{5^4} + \frac{(x-3)^4}{5^5} + \cdots$$

$$\therefore \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{5^{n+1}} \qquad \#$$