อนุกรมกำลัง (Power Series)

ให้ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ เป็นค่าคงที่และ x เป็นตัวแปร เรียกอนุกรมที่เขียนอยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

หรือ

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

ว่าเป็นอนุกรมกำลังในรูปของ $x-c$ เรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

เรียก c ว่าจุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง

ถ้า $c = 0$ จะได้อนุกรมกำลัง ในกำลังของ x เป็นดังนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

เนื่องจากค่าของแต่ละพจน์ในอนุกรมกำลังขึ้นอยู่กับค่าของ x ลักษณะการลู่เข้าของอนุกรมกำลังจึงขึ้นอยู่กับค่าของ x ตัวอย่างอนุกรมกำลัง

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 8(x-1)^3 + \cdots$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

การลู่เข้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ เป็นไปได้ 3 กรณีดังนี้

สำหรับ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ หนึ่งในเงื่อนไขต่อไปนี้ที่จะเป็นจริง

(1) อนุกรมจะลู่เข้าสำหรับ $x = c$ ค่าเดียวเท่านั้น

(2) อนุกรมจะลู่เข้า สำหรับทุกค่าของ x

(3) มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x เมื่อ $|x-c| < R$ และลู่ออกทุกค่า x เมื่อ $|x-c| > R$

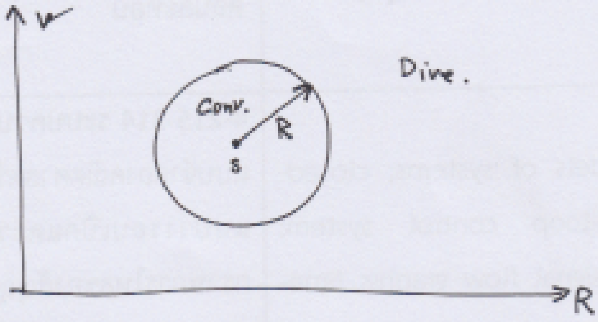
อนุกรมกำลัง (Power Series)

ในกรณีที่ 3 อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกที่ x เมื่อ $|x-c| = R$ ก็ได้

รัศมี และช่วงแห่งการลู่เข้า (Radius of Convergence) and (Interval of convergence)

เรียก R ในทฤษฎีบทก่อนหน้าว่า รัศมีแห่งการลู่เข้า

เรียก เซตของค่า x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า



The circle of convergence

① ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าเมื่อ $x=c$ เท่านั้น แล้วอนุกรมจะมีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น 0 $(R=0)$

② ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าทุกค่า x แล้วอนุกรมจะมีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น $+\infty$ $(R=\infty)$

Ex จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$

Sol^n ให้ $a_n(x) = \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \frac{|x-2|^2}{9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|^2}{9} = \frac{|x-2|^2}{9}$$

จาก $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่เข้าเมื่อ $\frac{|x-2|^2}{9} < 1$ หรือ $|x-2| < 3$ หรือ $-1 < x < 5$ —— ①

อนุกรมกำลัง (Power Series)

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ ลู่ออกเมื่อ $\frac{|x-2|^2}{9} > 1$ หรือ $|x-2| > 3$ —— ②

พิจารณา $|x-2| = 3$ ก็ต่อเมื่อ $-1, 5$

จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ คือ $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$ เป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $x = -1, 5$ —— ③

$\therefore$ มี R รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 3

มีช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $(-1, 5)$ ##

อนุกรมกำลัง (Power Series)

Radius of Convergence

ให้ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ แล้ว

- ถ้า $q = 0$ แล้ว $R = \infty$ อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ จะลู่เข้าทุกค่าของ x

- ถ้า $q \neq 0$; $(0 < q < \infty)$ แล้ว $R = \dfrac{1}{q}$

- ถ้า $q = \infty$ แล้ว $R = 0$ อนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ จะลู่เข้าเมื่อ $x = c$ เท่านั้น

พิสูจน์ ให้ $x_n = a_n(x-c)^n$

ใช้ Ratio Test ได้

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-c|$$

$$= q|x-c|$$

- ถ้า $q = 0$ แล้ว $L = 0$ ทุกค่าของ x และโดย Ratio Test จะได้ว่าอนุกรมลู่เข้าทุกค่าของ x

- ถ้า $q > 0$ แล้วโดย Ratio Test อนุกรมจะลู่เข้า เมื่อ $L = q|x-c| < 1$ หรือ $|x-c| < \frac{1}{q}$

  และ อนุกรมจะลู่ออกเมื่อ $L = q|x-c| > 1$ หรือ $|x-c| > \frac{1}{q}$

- แล้วถ้า $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \infty$ แล้วโดย Ratio Test จะได้ว่า $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ สำหรับทุกค่า $x \neq c$

  และทุกค่า n ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ ดังนั้นอนุกรมลู่ออกสำหรับทุกค่า $x \neq c$ แสดงว่า

เมื่อ $q = \infty$ อนุกรมจะลู่เข้าที่ $x = c$ เท่านั้น

Ex จงหาช่วงของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n}$

Sol จาก $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{10^n}{n} \cdot \frac{n+1}{10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10n} = \frac{1}{10}$

ดังนั้น $R = 1/10$ นั่นคืออนุกรมลู่เข้าเมื่อ $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$

ที่ $x = 1/10$ อนุกรมเป็น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ที่ $x = -1/10$ อนุกรมเป็น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ลู่เข้า

$\therefore$ ดังนั้นช่วงของการลู่เข้า คือ $[-1/10, 1/10)$ —— ##