HW#5.2

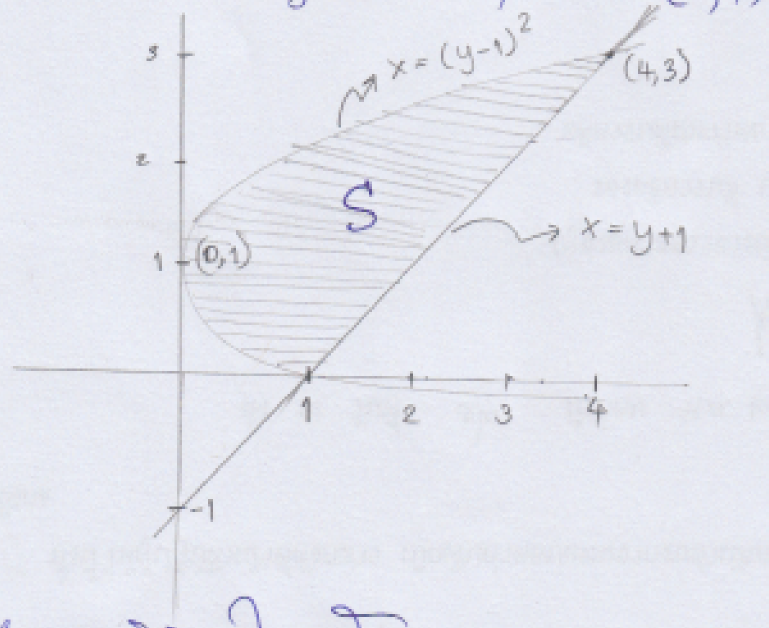
1.4) $$\int_0^3 \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy$$

วิธีทำ จากโจทย์ $\iint_S f(x,y)\,dA$

พิจารณาอาณาบริเวณ $S = \{(x,y) \mid (y-1)^2 \le x \le y+1,\ 0 \le y \le 3\}$

พื้นที่ของ $x = (y-1)^2$ และ $x = y+1$ (สมการเส้นตรง)

พิจารณา พาราโบลา $x = (y-1)^2$ มีจุดยอดที่ $(0,1)$



เปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตได้ โดยพิจารณาอาณาบริเวณ S ใหม่ ซึ่งหากจะอินทิเกรต เทียบ $dy\,dx$ จะต้องแบ่ง S ออกเป็น 2 บริเวณ คือ S_1 และ S_2 ดังจะได้

$$S_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 1-\sqrt{x} \le y \le 1+\sqrt{x}\}$$

$y^2 - 2y + 1$

$x - 1$

$$S_2 = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 4,\ x-1 \le 1+\sqrt{x}\}$$

$$\therefore \int_0^3 \int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{x}}^{1+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^4 \int_{x-1}^{1+\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx \ \#$$

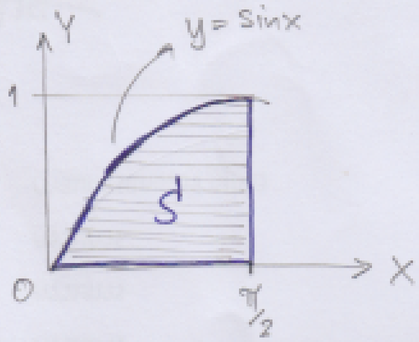
HW #5.2

2.10) Find $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}(y)}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\,dx\,dy$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์พิจารณาค่าเราอินทิเกรตเทียบ x ก่อน จะขึ้นกับค่าของ y. ดังนั้น ต้องพิจารณาอาณาบริเวณของ S และเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตใหม่ จะได้

$$S = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \sin^{-1}(y) \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1 \right\}$$

$x = \sin^{-1} y \quad \Rightarrow$ จะได้ $y = \sin x$



อาณาบริเวณของ S' ใหม่ คือ

$$S' = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sin x \right\}$$

$$\therefore \int_0^1\int_{\sin^{-1}(y)}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x} \sec^2(\cos x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\cdot y\Big|_0^{\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\Big[\sec^2(\cos x)\,(\sin x - 0)\Big]\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sec^2(\cos x)\,dx$$

$$\boxed{\int \sec^2 u\,du = \tan u}$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\,d(\cos x) = -\tan(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\tan\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) + \tan\cos(0) = -\tan(0) + \tan(1)$$

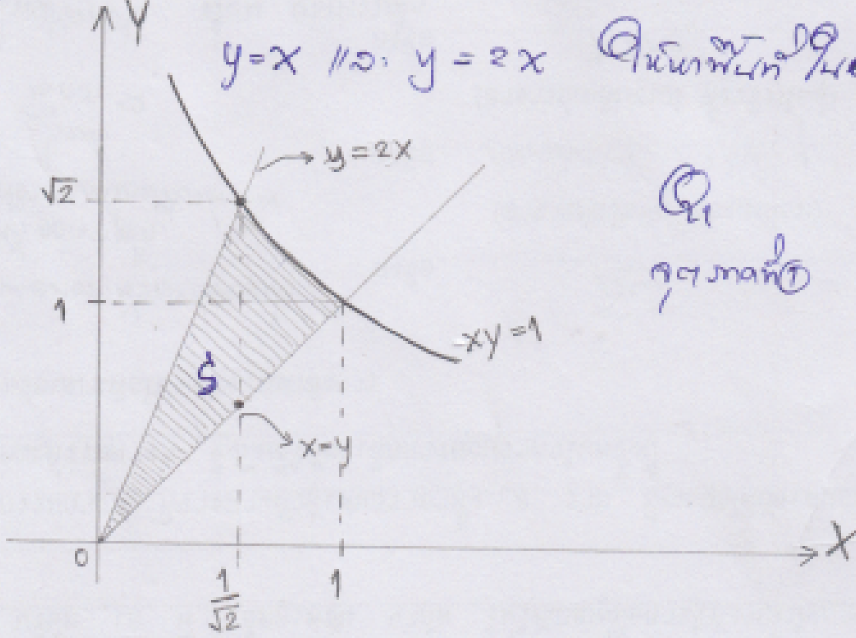
$$= \tan(1) \quad \#$$

HW # 5.2

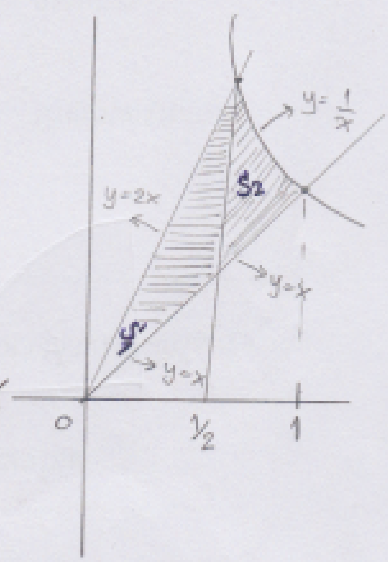
3.5) Find $\iint_S f(x,y)\,dA$ เมื่อ

$f(x,y) = x^2$ และ S เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $xy=1$, เส้นตรง $y=x$ และ $y=2x$ ซึ่งเป็นพื้นที่ในจตุภาคที่ 1 (Q_1)

2



Q_1
จตุภาคที่ 1



3

Sol^n

4

$$\iint_{S_1} f(x,y)\,dy\,dx \quad ; \quad S_1 = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ x \le y \le 2x \right\}$$

บวกกับ

$$\iint_{S_2} f(x,y)\,dy\,dx \quad ; \quad S_2 = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1 \ ; \ x \le y \le \frac{1}{x} \right\}$$

$$\therefore \iint_S f(x,y)\,dA = \iint_{S_1} x^2\,dy\,dx + \iint_{S_2} x^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}}\int_x^{2x} x^2\,dy\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_x^{1/x} = \int_0^{1/\sqrt{2}} x^2 y \Big|_x^{2x} dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} x^2 y \Big|_x^{1/x} dx$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} x^2 (2x - x)\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} x^2\left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} x^3 \, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} (x - x^3) \, dx$$

$$= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^{1/\sqrt{2}} + \left. \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right|_{1/\sqrt{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - \cancel{(0)^4} \to 0 + \frac{1}{2} \left[1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] - \frac{1}{4} \left[1^4 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right)$$

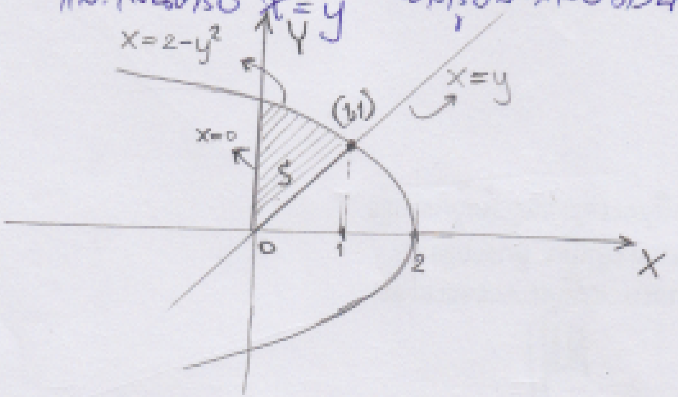
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad \#$$

4.5) จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย

เส้นโค้ง $x=2-y^2$ เส้นตรง $x=0$ และ $x=y$ ในจตุภาคที่ 1

Sol หาพื้นที่ในจตุภาคที่ 1 (Q_1) ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x=2-y^2$

เส้นตรง $x=0$ และเส้นตรง $x=y$ วาดรูปประกอบดังนี้



จากกราฟของ $S = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{2-x}\right\}$

$$\therefore \iint_S f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x}} 1\,dy\,dx$$

$2^2\ 2^{1/2}$

$$= \int_0^1 y \Big|_x^{\sqrt{2-x}} dx = \int_0^1 \left(\sqrt{2-x} - x\right) dx$$

$$= \int_0^1 (2-x)^{1/2} dx - \int_0^1 x\,dx = \left(-\frac{(2-x)^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(2-1)^{3/2} - (2-0)^{3/2}\right] - \frac{(1^2-0^2)}{2}$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(1)^{3/2} - (2)^{3/2}\right] - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{2}{3}(1) + \frac{2}{3}(2)^{3/2} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{7}{6}$$ ตร.หน่วย #