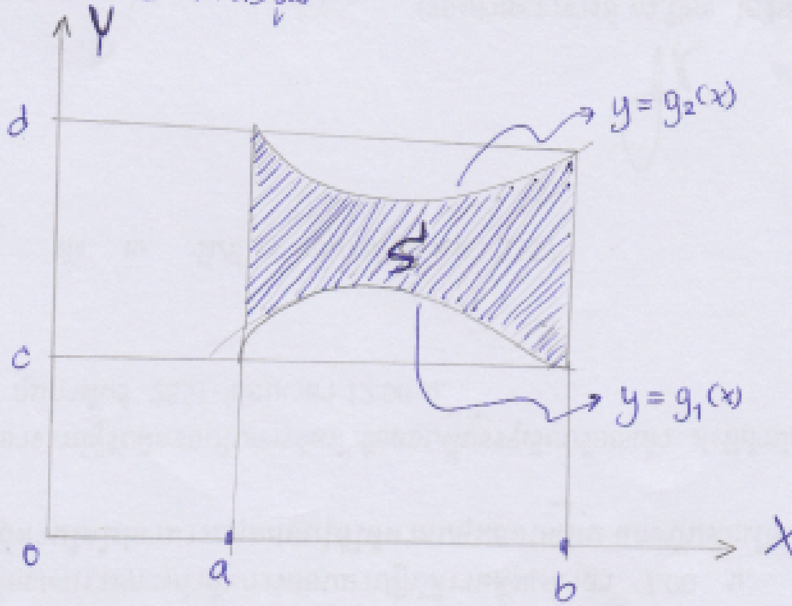
สำหรับฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ เราอาจพิจารณาอาณาบริเวณ S ของการอินทิเกรตได้ 2 แบบ

<u>แบบที่ 1</u> ให้ $S = \{(x,y) \mid g_1(x) \le y \le g_2(x) \,;\; a \le x \le b\}$

แสดงลักษณะอาณาบริเวณ S ได้ดังรูป



สร้าง ☐ ขั้นต่ำล้อมรอบ S สมมติ $D = [a,b] \times [c,d]$

ดังนั้นจะได้ว่า
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; c \le y \le g_1(x) \\ f(x,y) & ; g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ 0 & ; g_2(x) \le y \le d \end{cases}$$

และ
$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x,y)\, dy\, dx$$

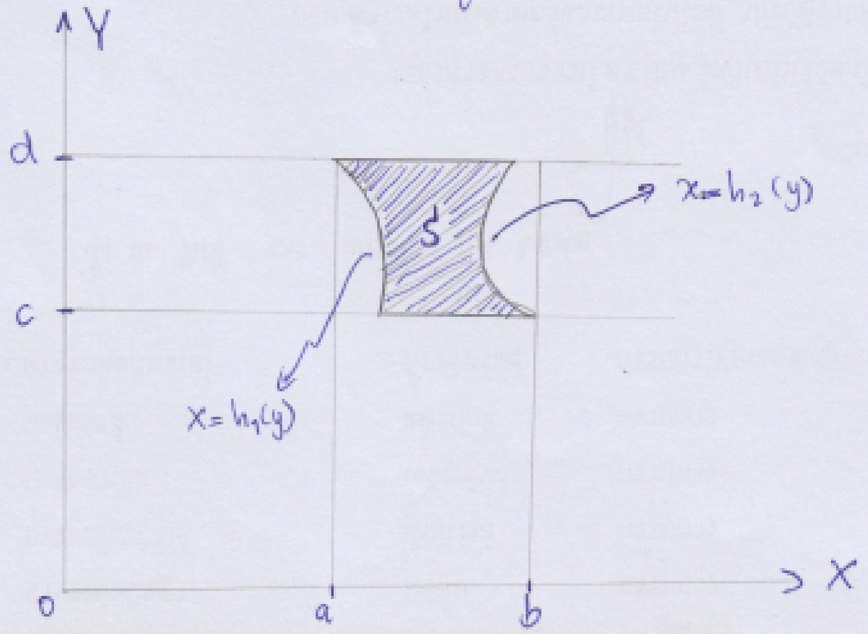
$$= \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} 0\, dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0\, dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

แบบที่ 2 ให้ $S = \{(x,y) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}$

ซึ่งอาจจะแสดงลักษณะของอาณาบริเวณ S ได้ดังรูป



สร้าง □ ผืนผ้าล้อมรอบ S สมมติ $D = [a,b] \times [c,d]$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \ a \le x \le h_1(y) \\ f(x,y) & ; \ h_1(y) \le x \le h_2(y) \\ 0 & ; \ h_2(y) \le x \le b \end{cases}$$

และ

$$\iint_S f = \iint_D \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

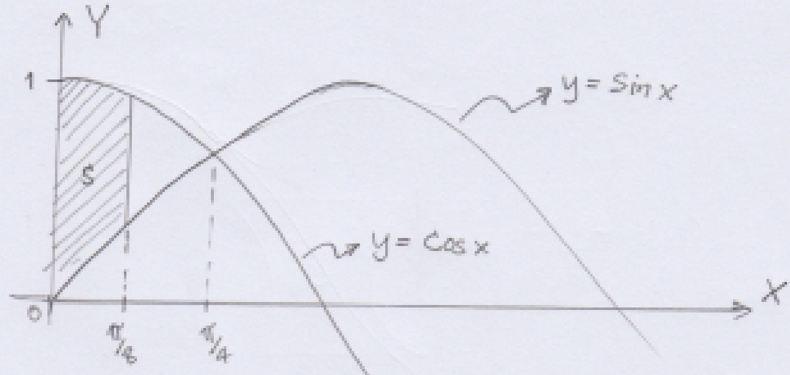
$$= \int_c^d \int_a^b \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^{h_1(y)} 0\,dx + \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx + \int_{h_2(y)}^{b} 0\,dx \right] dy$$

$$= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Example Find $\iint_S y\sin 2x \, dA$ เมื่อ $S = \left\{ (x,y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{8},\ \sin x \le y \le \cos x \right\}$

Sol^n



จากรูปแสดงให้เห็นว่า อาณาบริเวณ S คือพื้นที่แบบง่าย ใช้วิธีแบบที่ 1 เมื่อ

$$S = \left\{ (x,y) \mid g_1(x) \le y \le g_2(x)\ ;\ a \le x \le b \right\}$$

จะได้ $$\iint_S f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

แทนค่า $$\iint_S y \sin 2x \, dA = \int_0^{\pi/8} \int_{\sin x}^{\cos x} y \sin 2x \, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/8} (\sin 2x) \left. \frac{y^2}{2} \right|_{\sin x}^{\cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} (\sin 2x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \sin 2x \cos 2x \, dx$$

ทบทวนสูตรตรีโกณมิติ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$2 \sin x \cos x = \sin 2x$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/8} \frac{1}{2} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/8} \sin 4x \, dx = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\pi/8} \right)$$

$$= \frac{1}{16} \left(-\cos 4x \Big|_0^{\pi/8} \right) = \frac{1}{16} \left(\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{1}{16} \quad \#$$

ข้อสังเกตวิธีแบบที่ 1 คือ $\iint_S f = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$

ถ้าเราใช้วิธีแบบที่ 2

$$\iint_S f = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iiint_D y \sin 2x \,dx\,dx$$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \sin^{-1} y \ ; & 0 \le y \le \sin(\pi/8) \\ \pi/8 \ ; & \sin(\pi/8) \le y \le \cos(\pi/8) \\ \cos^{-1} y \ ; & \cos(\pi/8) \le y \le 1 \end{cases}$$

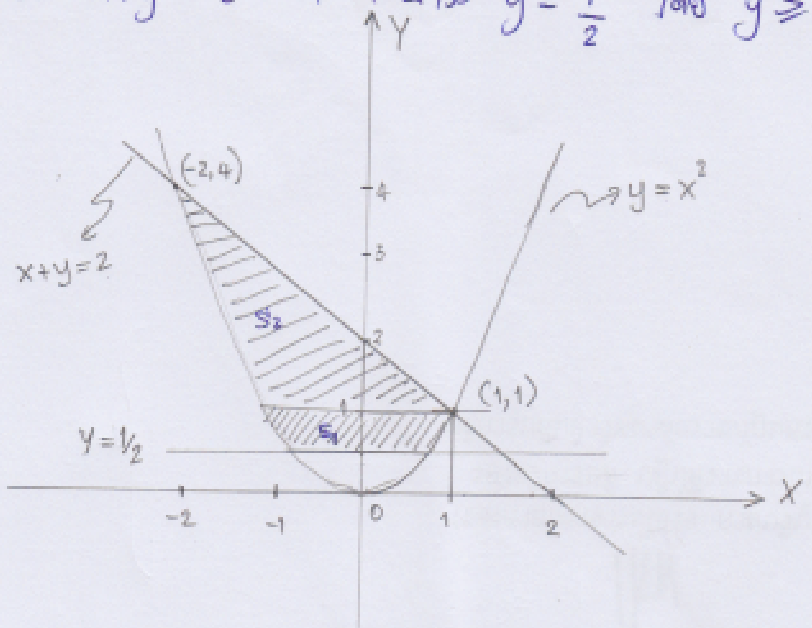
คือ แบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 3 ส่วน S_1, S_2 และ S_3

$$\therefore \iiint_S y \sin 2x \, dA = \iiint_{S_1} y \sin 2x \, dA + \iiint_{S_2} y \sin 2x \, dA + \iiint_{S_3} y \sin 2x \, dA$$

ซึ่งจะต้องทำงานยุ่งยาก ซับซ้อนกว่า แบบที่ 1

Example Find $\iint\limits_S xy^2\,dA$ เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y=x^2$

และเส้นตรง $x+y=2$ และเส้นตรง $y=\frac{1}{2}$ โดย $y \geq x^2$



Sol^n หาค่า $\iint\limits_S xy^2\,dA$ โดย $\iint\limits_S xy^2\,dA = \iint\limits_S xy^2\,dx\,dy$

$D = [-2,1] \times [\frac{1}{2}, 4]$ แบ่ง S ออกเป็น 2 ส่วน S_1 และ S_2

$$S_1 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \;;\; \tfrac{1}{2} \leq y \leq 1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x,y) \;\middle|\; -\sqrt{y} \leq x \leq 2-y \;,\; 1 \leq y \leq 4 \right\}$$

จะได้ว่า
$$\iint\limits_S xy^2\,dA = \iint\limits_{S_1} xy^2\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2} xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_{1/2}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy^2\,dx\,dy + \int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_{1/2}^{1} y^2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right] dy + \int_{1}^{4} y^2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{y}}^{2-y} \right] dy$$

$$\iint_S xy^2\,dA = \int_{1/2}^{1} \frac{y^2}{2}\cancelto{0}{(y-y)}\,dy + \int_{1}^{4} \frac{y^2}{2}\left[(2-y)^2 - y\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 y^2\left(4 - 4y + y^2 - y\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 \left(y^4 - 5y^3 + 4y^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5} - \frac{5}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3\right)\Bigg|_1^4$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(4^5-1^5)}{5} - \frac{5}{4}(4^4-1^4) + \frac{4}{3}(4^3-1^3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1023}{5} - \frac{1275}{4} + \frac{252}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1809}{60}\right)$$

$$= -\frac{603}{40} \quad \#$$

$$\frac{(1023)\times 4 - (1275)\times 5}{20}$$

$$\frac{-2283}{20}$$

$$\frac{603}{\cancel{-1809}}{\cancel{60}\ \times 2} \quad 20$$

$$\frac{603}{40}$$

ข้อสังเกต $\iint_S xy^2\,dA$ โดย $\iint_S xy^2\,dx\,dy$ ⇒ เทียบ x ก่อน แล้วค่อยตามด้วย y

แต่ $\iint_S xy^2\,dA$ โดย $\iint_S xy^2\,dy\,dx$ จะต้องแบ่งอาณาบริเวณ S ออกเป็น 3 ส่วน คือ

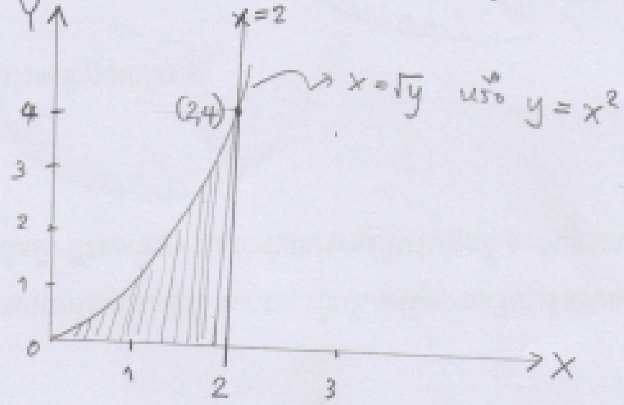
S_1, S_2 และ S_3

เพราะจุดเปลี่ยนกราฟ ค่า y ตามแนวแกน x ค่า y มีการเปลี่ยนแปลง 2 จุด

Example Find $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dx\,dy$

<u>ข้อพิจารณาจากโจทย์</u> ถ้าเราทำการอินทิเกรตเทียบ x ก่อนแล้วค่อยตามด้วย y จะยากกว่า คือเราจะหาค่า $\int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dx \Rightarrow$ หาค่าอินทิเกรตยาก จึงให้ลองเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรตโดยเทียบ y ก่อน แล้วค่อยตามด้วย x โดยจากโจทย์ขอบเขตบริเวณของ S คือ

$$S = \{(x,y) \mid \sqrt{y} \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$$



ขอบเขตบริเวณ S ใหม่จะได้

$$S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$$

ซึ่งจาก $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx$

$$= \int_0^2 e^{x^3} y \Big|_0^{x^2} dx = \int_0^2 e^{x^3}(x^2 - 0)\,dx = \int_0^2 e^{x^3} \cdot x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 e^{x^3}\,d(x^3) = \frac{1}{3} e^{x^3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(e^{2^3} - e^0\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^8 - 1\right) \quad \#$$