INDUCTION

Use induction to prove each of the following for all natural nāber n.

a). $4 + 9 + 14 + 19 + \dots + (5n-1) = \frac{n}{2}(3+5n)$

b). $-1 + 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-4) = \frac{n}{2}(3n-5)$

c). $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

a). $4 + 9 + 14 + 19 + \dots + (5n-1) = \frac{n}{2}(3+5n)$

Basic step ; $n = 1$

$$(5(1) - 1) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(3+5(1))$$

$$4 \stackrel{?}{=} \frac{8}{2}$$

$$4 \stackrel{\checkmark}{=} 4$$

Induction Step ; Assume true for $n=k$, show true $n = k+1$

Assume : $4 + 9 + 14 + 19 + \dots + (5k-1) = \frac{k}{2}(3+5k)$

Show $4 + 9 + 14 + 19 + \dots + (5k-1) + (5(k+1)-1) \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(3+5(k+1))$

$$\frac{k}{2}(3+5k) + (5(k+1)-1) \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(3+5(k+1))$$

$$\frac{k}{2}(3+5k) + (5k+4) \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(3+5k+5)$$

$$\frac{3k}{2} + \frac{5k^2}{2} + 5k + 4 \stackrel{?}{=} \frac{k+1}{2}(8+5k)$$

$$\frac{13k}{2} + \frac{5k^2}{2} + 4 \stackrel{?}{=} \frac{8(k+1)}{2} + \frac{5k(k+1)}{2}$$

$$\frac{13k}{2} + \frac{5k^2}{2} + 4 \overset{?}{=} 4k + 4 + \frac{5k^2}{2} + \frac{5k}{2}$$

✓ $$\frac{13k}{2} + \frac{5k^2}{2} + 4 \overset{?}{=} \frac{13k}{2} + \frac{5k^2}{2} + 4$$ ✓ —— # # #

b) $-1 + 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-4) = \frac{n}{2}(3n-5)$

Basic step ; $n=1$

$$(3(1)-4) \overset{?}{=} \frac{1}{2}(3(1)-5)$$

$$-1 \overset{?}{=} \frac{1}{2}(3-5)$$

$$-1 \overset{\checkmark}{=} -1$$ —— #

Induction Step; Assume true for $n=k$, Show the true for $n=k+1$

$$-1 + 2 + 5 + 8 + \dots + (3k-4) = \frac{k}{2}(3k-5)$$

$$\underbrace{-1 + 2 + 5 + 8 + \dots +}_{} (3(k+1)-4) = \frac{k+1}{2}(3(k+1)-5)$$

$(3k-4)+$

$$\frac{k}{2}(3k-5) + (3k-1) \overset{?}{=} \frac{k+1}{2}[3k-2]$$

$$\frac{3k^2}{2} - \frac{5k}{2} + 3k - 1 \overset{?}{=} \frac{3k(k+1)}{2} - \frac{2(k+1)}{2}$$

$$\frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2} - 1 \overset{?}{=} \frac{3k^2}{2} + \frac{3k}{2} - k - 1$$

✓ $$\frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2} - 1 \overset{?}{=} \frac{3k^2}{2} + \frac{k}{2} - 1$$ ✓ —— # # #

\# c). $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

Basic Step ; $n = 1$

$$\frac{1}{2^{(1)}} \stackrel{?}{=} \frac{2^{(1)} - 1}{2^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2 - 1}{2}$$

$$\checkmark\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ \checkmark$$ #

Induction Step ; Assume true for $n = k$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$$

Show true for $n = k+1$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{\frac{2^k - 1}{2^k}} + \frac{1}{2^{k+1}} \stackrel{?}{=} \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

$$+ \frac{1}{2^{k+1}} \stackrel{?}{=} \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

$\frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow$ คูณด้วย $\frac{2}{2}$ จะได้

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

มีค่าเท่ากับด้านขวาของสมการ

$$\therefore\ \checkmark\ \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}\ \checkmark$$ #

PROOF BY INDUCTION

Example ให้พิสูจน์ว่า ผลรวมของ จำนวนเต็มบวก (ติดกัน) สามตัว ยกกำลังสาม (แรก) ที่หารด้วย 9 เป็นเท่าไร : คืออะไร

วิธี

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27$$

$$= 36 = 4 \times 9$$

$$2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 = 8 + 27 + 64$$

$$= 99 = 11 \times 9$$

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \Rightarrow$ นี่เป็นผลเฉลยตามคณิตศาสตร์ ที่ใช้อธิบายข้อความ " ผลรวมของเลขจำนวนเต็มบวกสามตัวเรียงกันยกกำลังสามจะหารด้วย 9 ลงตัวเสมอ "

ให้ $P(n)$ เป็นลำดับของเลขจำนวน $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ที่หารด้วย 9 ลงตัว ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n)$ is เป็นจริงเสมอเมื่อ $n \geq 1$

PROOF

ANCHOR STEP $n = 1$; $1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

$$= 1 + 8 + 27 = 36 = 4 \times 9$$

INDUCTIVE STEP

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 - n^3 + (n+3)^3$$

$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 \Rightarrow$.

จาก

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{\text{divisible by } 9} - n^3 + (n+3)^3$$

$$= 9m - n^3 + (n+3)^3$$

$$= 9m - \cancel{n^3} + \cancel{n^3} + 9n^2 + 27n + 27$$

$$= 9m + 9n^2 + 27n + 27$$

$$= 9(m + n^2 + 3n + 3)$$

$\therefore$ จะพบว่าผลที่ได้จะ คูณด้วย 9 จึงทำให้ $P(n+1)$ จริง $n \geq 1$ ตามที่พิสูจน์ $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ เมื่อ $n \geq 1$ จะเป็นจริงเสมอ.

$\therefore$ Anchor Step : $P(1)$: $1^3 + 2^3 + 3^3$ is divisible by 9 ✓

$\therefore$ Inductive Step If $P(n)$ is true, then $P(n+1)$ is true ✓

ดังนั้น, so by induction

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ is divisible by 9 for $n \geq 1$

PROOF BY INDUCTION

__Example__ สังเกตให้

$1 = 1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$

$1 + 2 = 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$

$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5$

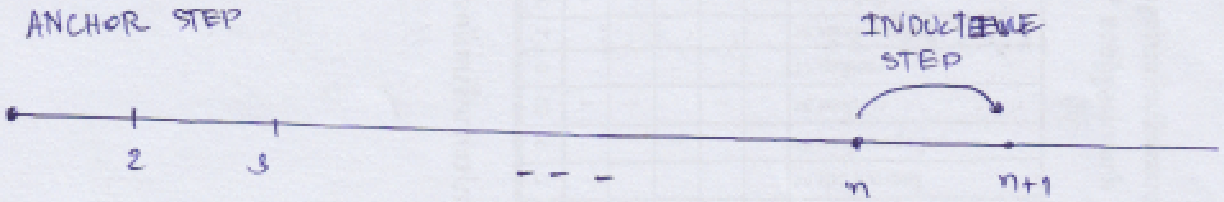
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{1}{2} \times 5 \times 6$

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \times n \times (n+1)$

ให้ $P(n)$ be the statement

$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

__PROOVE__ $P(n)$ is true for all $n \geq 1$



__If__ we can show

$\boxed{\text{ANCHOR STEP}}$ show that $P(n)$ is true for some starting value $n = N$

$\boxed{\text{INDUCTIVE STEP}}$ show that (for $n \geq N$)
IF WE ASSUME $P(n)$ true
THEN IT FOLLOW THAT $P(n+1)$ true

PROOF BY INDUCTION

Let $P(n)$ be the statement. $1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

PROVE $P(n)$ is true for all $n \geq 1$

ANCHOR STEP : $P(1)$ is true แสดงให้ดูว่าจริงไหม ?

$$1 = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1) = ?$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \checkmark$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

INDUCTIVE STEP : $P(n) : 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$P(n+1)$: $\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\text{พิสูจน์แล้วว่า } \frac{1}{2} \times n \times (n+1) \text{ ใน } P(n)} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(\ \ n+1)$$

$$= (n+1)\frac{1}{2}(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$\therefore$ $P(n+1)$ is true $\checkmark$

ANCHOR STEP $\checkmark$

INDUCTIVE STEP $\checkmark$ $\Rightarrow$ by induction $P(n)$ is true for all $n \geq 1$

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{for } n \geq 1}$$