SOLUTION MIDTERM 1/2559

1.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4,2)$ และ $(6,-1)$

Solution

จากสูตรสมการเส้นตรง $(y-y_1)=\left(\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$

โดยกำหนดให้ $(-4,2)$ เป็น (x_1,y_1) และ $(6,-1)$ เป็น (x_2,y_2)

แทนค่าจะได้

$$(y-2)=\left(\frac{(-1)-2}{6-(-4)}\right)(x-(-4))$$

$$(y-2)=\left(\frac{-3}{6+4}\right)(x+4)$$

$$y-2=\left(\frac{-3}{10}\right)(x+4)$$

$$10y-20=-3x-12$$

จะได้สมการเส้นตรง $3x+10y-8=0$ หรือ $y=\dfrac{-3}{10}x+\dfrac{4}{5}$

1.2 หาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน x เท่ากับ 3 และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-y=4$

Solution

ส่วนตัดแกน x เท่ากับ 3 คือจุด $(3,0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-y=4$

เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกันมีคุณสมบัติ $m_1.m_2=-1$

เส้นตรง $3x-y=4$ มีความชัน $y=3x-4$ อยู่ในรูป $y=mx+b$ ดังนั้น $m_1=3$

จาก $m_1.m_2=-1$ หา $m_2=\dfrac{-1}{m_1}=\dfrac{-1}{3}$

สมการเส้นตรงที่ผ่าน ส่วนตัดแกน x เท่ากับ 3 คือจุด $(3,0)$ มีความชันเป็น $m_2=\dfrac{-1}{3}$ จะได้

$$(y-y_1)=m_2(x-x_1)$$

แทนค่า $(y-0)=\dfrac{-1}{3}(x-3)$

$$y=\frac{-1}{3}x+\frac{3}{3}$$

$y=\dfrac{-x}{3}+1$ หรือ $x+3y-3=0$

1.3 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และขนานกับเส้นตรง $x-3y+6=0$

Solution

เส้นตรง $x-3y+6=0$ มีความชันเป็น $y=\frac{x}{3}+2$ ดังนั้น $m_1=\frac{1}{3}$

หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ ซึ่งขนานกับเส้นตรง $x-3y+6=0$

ใช้คุณสมบัติเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันจะมีความชันเท่ากัน $m_1=m_2=\frac{1}{3}$

หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และมีความชัน $m_2=\frac{1}{3}$ จะได้

$$(y-y_1)=m_2(x-x_1)$$

แทนค่า

$$(y-2)=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$3y-6=(x-1)$$

$$-x+3y-5=0 \qquad \text{หรือ } y=\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$$

1.4 สมการวงกลม $x^2+y^2+10x-4y+13=0$ จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

Solution

$x^2+y^2+10x-4y+13=0$ เป็นสมการวงกลมที่อยู่ในรูปทั่วไป

จาก $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ เป็นรูปมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์เป็น (h,k) และรัศมี r ดังนั้นจาก $x^2+y^2+10x-4y+13=0$ จัดรูปใหม่ จะได้

$$x^2+10x+y^2-4y=-13$$

$$x^2+10x+25+y^2-4y+4=-13+25+4$$

$$(x^2+10x+25)+(y^2-4y+4)=16$$

$$(x+5)^2+(y-2)^2=4^2 \text{ ซึ่งอยู่ในรูปมาตรฐาน}$$

จะได้ จุดศูนย์กลาง $(h,k)=(-5,2)$ และรัศมี $r=4$

1.5 สมการพาราโบลา $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ จงหา จุดยอด จุดโฟกัส เส้นตรงไดเรกตริกซ์ ลาตัสเรกตัม

Solution

จาก $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ ให้จัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^2 - 6x = -4y - 1$$
$$x^2 - 6x + 9 = -4y - 1 + 9$$
$$(x-3)^2 = -4y + 8$$
$$(x-3)^2 = -4(y-2)$$

จาก $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ เป็นสมการมาตรฐานของพาราโบลาคว่ำ เพราะค่า $c = -1$,$(c < 0)$

มีจุดยอดเป็น (h,k) เท่ากับ $(3,2)$

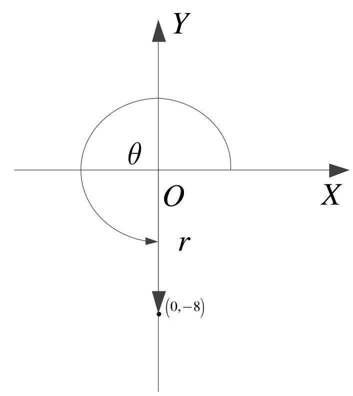
มีจุดโฟกัสเป็น $(h,k+c)$ เท่ากับ $(3,1)$

มีสมการไดเรกตริกซ์ เป็น $y = k - c$ เท่ากับ $y = 3$

มีความยาวลาตัสเรกตัม เป็น $|4c|$ เท่ากับ $|4(-1)| = 4$

2.1 จงหาค่ารากที่ 3 ของ $-8i$

Solution



$$-8i = 0 - 8i = (0,-8)$$

$a = 0$ และ $b = -8$

จากรูปเห็นชัดเจนแล้วว่า

$\theta = 270^o$ และ $r = 8$

$\therefore \quad -8i = 8(\cos 270^o + i\sin 270^o)$

จาก $\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta + 360^o k}{n} + i\sin\dfrac{\theta + 360^o k}{n}\right)$

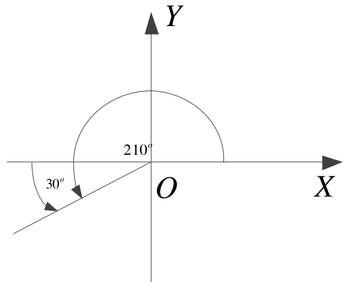
$\therefore \quad \sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{270^o + 360^o k}{3} + i\sin\dfrac{270^o + 360^o k}{3}\right)$

$$= 2\left\{\cos(90^o + 120^o k) + i\sin(90^o + 120^o k)\right\}$$

เมื่อ $k = 0$; $\quad \sqrt[3]{-8i} = 2(\cos 90^o + i\sin 90^o)$

$$= 2(0 + i) = 2i$$

เมื่อ $k=1$; $\sqrt[3]{-8i}=2\left(\cos 210^o+i\sin 210^o\right)$



$=2\left(-\cos 30^o-i\sin 30^o\right)$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)$

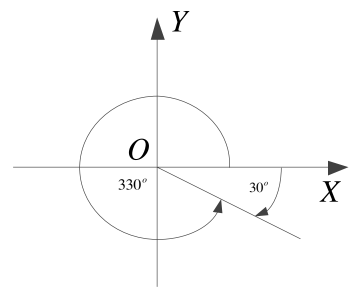
$=-\sqrt{3}-i$

เมื่อ $k=2$; $\sqrt[3]{-8i}=2\left(\cos 330^o+i\sin 330^o\right)$

$=2\left(\cos 30^o-i\sin 30^o\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=\sqrt{3}-i$



ดังนั้น รากอันดับที่ 3 ของ $-8i$ คือ $2i,-\sqrt{3}-i$ และ $\sqrt{3}-i$

กำหนดให้ $f(x)=x^2-3x+1$ และ $g(x)=x^2+1$

3.1 $f(-2)$ 3.2 $g(a^{0.5})$ 3.3 $(f+g)(4)$ 3.4 $(f-g)(1)$ 3.5 $(f.g)(-1)$

Solution

3.1 $f(-2)=(-2)^2-3(-2)+1=4+6+1=11$

3.2 $g(a^{0.5}) =\left(a^{0.5}\right)^2+1=a+1$

3.3 $(f+g)(4)=\left[\left(x^2-3x+1\right)+\left(x^2+1\right)\right](4)$

$=\left(2x^2-3x+2\right)(4)=2(4)^2-3(4)+2=2(16)-12+2=22$

3.4 $(f-g)(1) =\left[\left(x^2-3x+1\right)-\left(x^2+1\right)\right](1)$

$=\left[x^2-3x+1-x^2-1\right](1) =\left[-3x\right](1)=-3(1)=-3$

3.5 $(f.g)(-1) =\left[\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+1\right)\right](-1)=\left((-1)^2-3(-1)+1\right)\left((-1)^2+1\right)$

$=(1+3+1)(1+1)=5(2)=10$

4.1 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ เมื่อ $f(x)=x^3$ และ $(f\circ g)(x)=2-3x$

4.2 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ โดยที่ $f(x)=(g\circ h)(x)$ ถ้า $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$

Solution

4.1 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ เมื่อ $f(x)=x^3$ และ $(f\circ g)(x)=2-3x$

$$(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$$

$$x^3=2-3x$$

$$x=\sqrt[3]{2-3x}$$

$$g(x)=x=\sqrt[3]{2-3x}$$

4.2 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ โดยที่ $f(x)=(g\circ h)(x)$ ถ้า $f(x)=\left(x^2+1\right)^5$

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g\left[h(x)\right]$$

$$f(x)=g\left[h(x)\right]=\left(x^2+1\right)^5$$

$$g\left[h(x)\right]=\left(x^2+1\right)^5$$

กำหนดให้ $h(x)=x^2+1$ และ $g(x)=x^5$ หรือ $h(x)=x^2$ และ $g(x)=(x+1)^5$

5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$

5.2 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2+2x}$

5.3 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x-5}$

5.4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

5.5 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\left(18x^3-4x^2+8\right)^2}{\left(3x^3+2x-5\right)^3}$

5.6 $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-2\right)\left(3x+1\right)$

Solution

5.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4-x}+2}{\sqrt{4-x}+2}\ =\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-x}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\ =\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\ =\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\ =\frac{-1}{\sqrt{4-0}+2}=\frac{-1}{4}$$

5.2 $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2+2x}$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2+2x} \;=\sqrt{2^3+2^2+2(2)} \;=\sqrt{8+4+4} \;=\sqrt{16}=4$$

5.3 $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x-5}$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x-5} \;=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-2)}{x-5} \;=\lim_{x\to 5}(x-2) \;=(5-2)=3$$

5.4 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \;=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} \;=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} \;=\frac{1}{\sqrt{1}+1} \;=\frac{1}{2}$$

5.5 $\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(18x^3-4x^2+8\right)^2}{\left(3x^3+2x-5\right)^3}$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(18x^3-4x^2+8\right)^2}{\left(3x^3+2x-5\right)^3} \;=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(18x^3\right)^2}{\left(3x^3\right)^3} \;=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(18^2x^6\right)}{\left(3^3x^9\right)} \;=\lim_{x\to -\infty}\frac{\left(18^2\right)}{\left(3^3x^3\right)}$$

$$=\frac{\left(18^2\right)}{\left(3^3\infty^3\right)}=0$$

5.6 $\lim_{x\to 2}\left(2x^2-2\right)\left(3x+1\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\left(2x^2-2\right)\left(3x+1\right) \;=\left(2(2^2)-2\right)\left(3(2)+1\right) \;=\left(2(4)-2\right)\left(6+1\right)$$

$$=\left(8-2\right)\left(6+1\right) \;=\left(6\right)\left(7\right)=42$$

6.1 กำหนดให้ $f(x)=x^3+2x^2-2$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้นิยาม และหาค่าของ $f'(-1)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

6.2 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x-1}}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

6.3 กำหนดให้ $f(x)=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

6.4 กำหนดให้ $y=x^2\cos^{-1}(\sin x)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

Solution

6.1 กำหนดให้ $f(x)=x^3+2x^2-2$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้นิยาม และหาค่าของ $f'(-1)$

จาก $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

จะได้ $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^3+2(x+h)^2-2\right]-\left(x^3+2x^2-2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)+2\left(x^2+2xh+h^2\right)-2\right]-x^3-2x^2+2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+2x^2+4xh+2h^2-2-x^3-2x^2+2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+4xh+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2+4x+2h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2+4x+2h\right)=\left(3x^2+3x(0)+(0)^2+4x+2(0)\right)$$

$$f'(x)=\left(3x^2+4x\right)$$

หาค่า $f'(-1)=3(-1^2)+4(-1)=3-4=-1$

6.2 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x-1}}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2}{\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\left[\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)-\left(x^2+2\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x-1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}\left[\sqrt{x-1}(2x)-\left(x^2+2\right)\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\frac{d}{dx}(x-1)\right]$$

$$=\frac{1}{(x-1)}\left[(2x)\sqrt{x-1}-\frac{\left(x^2+2\right)}{2\sqrt{x-1}}(1)\right]$$

$$=\left[\frac{(2x)\sqrt{x-1}}{(x-1)}-\frac{\left(x^2+2\right)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\left[\frac{(2x)}{\sqrt{x-1}}-\frac{\left(x^2+2\right)}{2\sqrt[3]{x-1}}\right]$$

6.3 กำหนดให้ $f(x)=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\right)$$

$$=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\frac{d}{dx}\log\left(x^5+2\right)^6$$

$$=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\frac{d}{dx}\left(6\log\left(x^5+2\right)\right)$$

$$=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\frac{6}{\left(x^5+2\right)}\log e\frac{d}{dx}\left(x^5+2\right)$$

$$=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\frac{6}{\left(x^5+2\right)}\log e\left(5x^4\right)$$

$$=e^{\log\left(x^5+2\right)^6}\frac{30x^4}{\left(x^5+2\right)}\log e$$

6.4 กำหนดให้ $y=x^2\cos^{-1}(\sin x)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2\cos^{-1}(\sin x)\right)$$

$$=x^2\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}(\sin x)\right)+\cos^{-1}(\sin x)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$=\frac{-x^2}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\frac{d}{dx}(\sin x)+(2x)\cos^{-1}(\sin x)$$

$$=\frac{-x^2}{\sqrt{\cos^2 x}}(\cos x)+(2x)\cos^{-1}(\sin x)$$

$$=\frac{-x^2(\cos x)}{\cos x}+(2x)\cos^{-1}(\sin x)$$

$$=-x^2+(2x)\cos^{-1}(\sin x)$$