

Solution Midterm 1/2558

1. สมการเส้นตรง (Linear Equations) และภาคตัดกรวย (Conic sections)

(20 คะแนน)

1.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7,0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-5,3)$ และ $(8,-1)$

Solution

หาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-5,3)$ และ $(8,-1)$ จะได้

$$m_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) = \frac{-1 - 3}{8 - (-5)} = \frac{-4}{13}$$

จากเส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\text{หา } m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-4/13} = \frac{13}{4}$$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7,0)$ และมีความชันเป็น $m = \frac{13}{4}$ จะได้

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

แทนค่า $(y - 0) = \frac{13}{4}(x - 7)$

$$y = \frac{13x}{4} - \frac{7}{4} \text{ หรือ } -13x + 4y + 91 = 0$$

1.2 หาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน x เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 2y = 7$

Solution

จากสมการเส้นตรง $3x - 2y = 7$ หาความชันจะได้

$$-2y = -3x + 7$$

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{7}{2} \text{ มีความชันเป็น } m_1 = \frac{3}{2}$$

จากเส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน $m_1 \cdot m_2 = -1$

$$\text{หา } m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{3/2} = \frac{-2}{3}$$

สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน x เท่ากับ 2 และมีความชันเป็น $m_2 = \frac{-2}{3}$ คือ

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

แทนค่า $(y - 0) = \frac{-2}{3}(x - 2)$

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{4}{3} \quad \text{หรือ} \quad 2x + 3y - 4 = 0$$

1.3 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,1)$ และขนานกับเส้นตรง $2x - 3y + 6 = 0$

Solution

เส้นตรง $2x - 3y + 6 = 0$ หาความชันได้ดังนี้

$$-3y = -2x - 6$$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{6}{3}$$

$$y = \frac{2x}{3} + 2 \quad \text{จะได้} \quad m_1 = \frac{2}{3}$$

จากเส้นตรงสองเส้นขนานกันความชันจะเท่ากัน ดังนั้น $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,1)$ และมีความชันเป็น $m_2 = \frac{2}{3}$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

แทนค่า $(y - 1) = \frac{2}{3}(x - 2)$

$$y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + 1$$

$$y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} \quad \text{หรือ} \quad -2x + 3y + 1 = 0$$

1.4 สมการวงกลม $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

Solution

จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ อยู่ในรูปทั่วไป ทำการจัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน
จะได้ $x^2 + 10x + y^2 - 4y = -13$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = -13 + 25 + 4$$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

เทียบกับรูปมาตรฐาน $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ จะได้

จุดศูนย์กลาง (h,k) เท่ากับ $(-5,2)$

รัศมี r เท่ากับ $r = 4$

1.5 สมการพาราโบลา $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ จงหา จุดยอด จุดโฟกัส เส้นตรงไดเรกทริกซ์ ลาตัสเรกตัม

Solution

จากสมการพาราโบลา $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ จัดรูปใหม่ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^2 - 6x = -4y - 1$$

$$x^2 - 6x + 9 = -4y - 1 + 9$$

$$(x-3)^2 = -4y + 8$$

$$(x-3)^2 = -4(y-2)$$

เทียบกับรูปสมการมาตรฐาน $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ จะได้

ค่า $4c = -4$ จะได้ $c = -1$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 0 เป็นกราฟพาราโบลาคว่ำ $c < 0$

จุดยอด $(h,k) = (3,2)$

จุดโฟกัส เป็น $(h,k+c) = (3,1)$

มีสมการไดเรกทริกซ์ เป็น $y = k - c$ เท่ากับ $y = 3$

มีความยาวลาตัสเรกตัม เป็น $|4c|$ เท่ากับ $|4(-1)| = 4$

2. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ (Function)

(15 คะแนน)

กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 1$ และ $g(x) = x^2 + 1$

2.1 $f(-2)$

2.2 $g(a^{0.5})$

2.3 $(f+g)(4)$

2.4 $(f-g)(1)$

2.5 $(f \cdot g)(-1)$

Solution

2.1 $f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$

2.2 $g(a^{0.5}) = [(a^{0.5})]^2 + 1 = a + 1$

$$2.3 \quad (f+g)(4) = [(x^2-3x+1)+(x^2+1)](4) = [(4^2-3(4)+1)+(4^2+1)] = (16-12+1)+(16+1) = 22$$

$$2.4 \quad (f-g)(1) = [(x^2-3x+1)-(x^2+1)](1) = (1^2-3(1)+1)-(1^2+1)$$

$$= (1-3+1)-(1+1) = -1-2 = -3$$

$$2.5 \quad (f \cdot g)(-1) = [(x^2-3x+1)(x^2+1)](-1) = [((-1)^2-3(-1)+1)((-1)^2+1)]$$

$$= (1+3+1)(1+1) = 5 \cdot (2) = 10$$

3. ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

(15 คะแนน)

3.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ และ $g(x) = x - 1$ หาฟังก์ชันประกอบ $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$

Solution

$$\text{หา } (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x-1) = (x-1)^2 - 3(x-1) + 2$$

$$= x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 2 = x^2 - 5x + 6$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2) - 1 = x^2 - 3x + 1$$

3.2 จงหาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $g(x) = x + 1$ และ $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x$

Solution

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 + 2x$$

$$\text{กำหนดให้ } f(x) = x^2 - 1$$

$$\text{พิสูจน์และแทน } g(x) = x + 1 \text{ จะได้ } (f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

$$f[g(x)] = f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 = x^2 + 2x$$

3.3 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ เมื่อ $f(x) = x^3$ และ $(f \circ g)(x) = 2 - 3x$

Solution

$$(f \circ g)(x) = 2 - 3x$$

$$\text{กำหนดให้ } g(x) = \sqrt[3]{2-3x} \text{ แทนค่าหา } (f \circ g)(x) \text{ จะได้}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt[3]{2-3x}) = (\sqrt[3]{2-3x})^3 = 2 - 3x \text{ เป็นจริง}$$

3.4 จงหาฟังก์ชัน $g(x)$ และ $h(x)$ โดยที่ $f(x) = (g \circ h)(x)$ ถ้า $f(x) = (x^2 + 1)^5$

Solution

$$\text{จาก } f(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = (x^2 + 1)^5$$

$$\text{ถ้ากำหนดให้ } g(x) = x^5 \text{ และ } h(x) = (x^2 + 1)$$

$$\text{พิสูจน์แทนค่าหา } f(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[(x^2 + 1)] = (x^2 + 1)^5$$

$$\text{หรือ } g(x) = (x + 1)^5 \text{ และ } h(x) = x^2$$

$$\text{พิสูจน์แทนค่าหา } f(x) = (g \circ h)(x) = g[h(x)] = g[(x^2)] = (x^2 + 1)^5$$

4. จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ (Limit)

(25 คะแนน)

$$4.1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x}$$

$$\text{ลองแทนค่า } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} = \frac{\sqrt{4-0} - 2}{0} = \frac{\sqrt{4} - 2}{0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{ใช้การคูณสังยุค จะได้ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4-x} + 2}{\sqrt{4-x} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-x})^2 - 2^2}{x\sqrt{4-x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x-4}{x\sqrt{4-x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x\sqrt{4-x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{4-x} + 2} = \frac{-1}{\sqrt{4-0} + 2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

$$4.2 \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + x^2 + 2x}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + x^2 + 2x} &= \sqrt{2^3 + 2^2 + 2(2)} \\ &= \sqrt{8 + 4 + 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

$$4.3 \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} = \frac{5^2 - 7(5) + 10}{5 - 5} = \frac{25 - 35 + 10}{5 - 5} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \text{ใช้วิธีการแยกตัวประกอบ } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x-2) = (5-2) = 3 \end{aligned}$$

$$4.4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

ใช้การคูณสังยุค จะได้ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$4.5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(15x^3 - 4x^2 + 8)^2}{(3x^3 + 2x - 5)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(15x^3 - 4x^2 + 8)^2}{(3x^3 + 2x - 5)^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(15x^3)^2}{(3x^3)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15^2 x^6}{3^3 x^9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15^2}{3^3 x^3} = \frac{15^2}{3^3 (-\infty)^3} = 0$$

$$4.6 \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)(3x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1)(3x - 4)$$

$$= (2(2^2) + 1)(3(2) - 4) = (2(4) + 1)(6 - 4) = (8 + 1)(6 - 4) = 9(2) = 18$$

5. ให้หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (Differentiation)

(25 คะแนน)

5.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ เมื่อ $x \neq 0$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้ นิยาม

Solution

$$\text{จาก } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 (x+h)^2} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{x^2 (x+h)^2} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{h(-2x-h)}{x^2 (x+h)^2} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2x-h)}{x^2 (x+h)^2} = \frac{(-2x-0)}{x^2 (x+0)^2} = \frac{(-2x)}{x^2 (x)^2} = \frac{(-2x)}{x^4} = \frac{-2}{x^3}
\end{aligned}$$

5.2 กำหนดให้ $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 10$ จงหา $f'(x)$ และ $f'(1)$ โดยใช้นิยาม

Solution

$$\begin{aligned}
&\text{จาก } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3(x+h)^3 + 4(x+h)^2 - 10 - (3x^3 + 4x^2 - 10)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 4(x^2 + 2xh + h^2) - 10 - 3x^3 - 4x^2 + 10}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 4x^2 + 8xh + 4h^2 - 3x^3 - 4x^2}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 8xh + 4h^2}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(9x^2 + 9xh + 3h^2 + 8x + 4h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2 + 8x + 4h) = (9x^2 + 9x(0) + 3(0)^2 + 8x + 4(0)) \\
f'(x) &= 9x^2 + 8x
\end{aligned}$$

หา $f'(1)$ จะได้ $f'(1) = 9(1)^2 + 8(1) = 17$

5.3 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+5}}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+5}} \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x+5})^2} \left[\sqrt{x+5} \frac{d}{dx} (x^2 - 1) - (x^2 - 1) \frac{d}{dx} (\sqrt{x+5}) \right] \\ &= \frac{1}{(x+5)} \left[(2x)\sqrt{x+5} - (x^2 - 1) \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \frac{d}{dx} (x+5) \right] \\ &= \frac{(2x)\sqrt{x+5}}{(x+5)} - \frac{(x^2 - 1)}{2(x+5)\sqrt{x+5}} (1) \\ &= \frac{(2x)}{\sqrt{x+5}} - \frac{(x^2 - 1)}{2(x+5)^{3/2}} \end{aligned}$$

5.4 กำหนดให้ $f(x) = e^{\log(x^5+2)^6}$ จงหา $f'(x)$ โดยใช้สูตร

Solution

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(e^{\log(x^5+2)^6} \right) \\ &= e^{\log(x^5+2)^6} \frac{d}{dx} \log(x^5+2)^6 \\ &= e^{\log(x^5+2)^6} \frac{d}{dx} (6 \log(x^5+2)) \\ &= e^{\log(x^5+2)^6} \frac{6}{(x^5+2)} \log e \frac{d}{dx} (x^5+2) \\ &= e^{\log(x^5+2)^6} \frac{6}{(x^5+2)} \log e (5x^4) \\ &= e^{\log(x^5+2)^6} \frac{30x^4}{(x^5+2)} \log e \end{aligned}$$

*****##### ขอให้นักศึกษาทุกท่านโชคดี *****#####