



ชื่อ-นามสกุล..... รหัสนักศึกษา..... หมู่เรียน.....

คำสั่ง

1. นักศึกษาที่ทุจริตในการสอบมีความผิด ปรับตกในรายวิชานั้นแล้วพักการเรียน 1 ภาคการศึกษา
2. ห้ามใช้เครื่องคำนวณ และห้ามใช้เครื่องมือสื่อสารทุกชนิด
3. ให้ทำข้อสอบทุกข้อ ให้เขียนชื่อ-นามสกุล รหัส หมู่เรียน ลงในข้อสอบและในกระดาษคำตอบทุกหน้า
4. ให้เขียนอธิบาย แสดงวิธีทำให้ละเอียด

1. จงหาค่าอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้

(25 คะแนน)

1.1 $\int \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$

1.2 $\int (\sin^4 x)(\cos^3 x) dx$

1.3 $\int e^{2x} \cos 3x dx$

1.4 $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 - 9}}$

1.5 $\int \frac{dx}{1 + x^{2/3}}$

2. จงหาสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดให้ $y'' = x^2 - 1$ เส้นโค้งนี้ผ่านจุด (1,1)

และมีความชันที่จุดนี้เท่ากับ $-\frac{1}{12}$

(10 คะแนน)

3. จงหาค่า $\int \sin^4 x dx$ โดยใช้สูตรลดทอน

(5 คะแนน)

4. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ พร้อมเขียนรูปประกอบ

(10 คะแนน)

5. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีแกนของพาราโบลานานกับแกน y

และผ่านจุด $(-1,8)$, $(1,5)$ และ $(5,5)$

(10 คะแนน)

6. จงหาสมการของวงรี ซึ่งมีจุดยอดที่ $(0, \pm 5)$ และจุดโฟกัสที่ $(0, \pm 3)$ **(5 คะแนน)**

7. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนตามขวาง และแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการกำกับของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$ **(5 คะแนน)**

8. จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้ **(20 คะแนน)**

8.1 จงใช้ผลบวกรีมันน์หาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_1^4 (3 - 2x) dx$

Tip & Trick หา Δx , $f(x_i^*)$, $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$

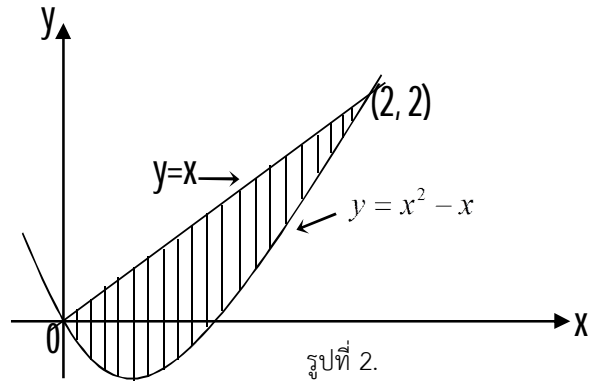
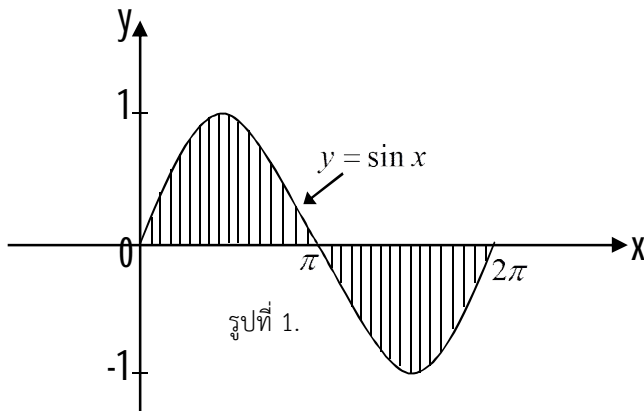
8.2 จงหาค่า $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(3x) dx$

8.3 จงหาค่า $\int_0^2 (x^3 + 2x - 3) dx$

8.4 จงหาค่า $\int_0^{\sqrt{\pi}} 5x \cos(x^2) dx$

9. หาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง **(10 คะแนน)**

9.1 หาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = \sin x$ จาก 0 ถึง 2π ดังแสดงในรูปที่ 1.



9.2 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - x$ และเส้นตรง $y = x$ ดังแสดงในรูปที่ 2.

สูตรที่ใช้

สูตร

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = (x-y)(x+y)^2 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x-y)^4 = (x+y)(x-y)^3 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);$$

$$y = mx + c;$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$Ax + By + c = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

สูตรอนุพันธ์

กำหนดให้ a, C, n เป็นค่าคงที่ใดๆ $u = f(x), v = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x

$$1. \frac{dc}{dx} = 0$$

$$2. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$3. \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$4. \frac{dcu}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$$

$$8. \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$$

$$9. \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$10. \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$11. \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$12. \frac{d}{dx} u^v = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{du}{dx}$$

$$13. \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$14. \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$15. \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$16. \frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$17. \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$18. \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$19. \frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$20. \frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$21. \frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$22. \frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$23. \frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$24. \frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

สูตรอินทิเกรต

$$1. \int 0 du = c$$

$$2. \int a du = a \int du$$

$$3. \int dx = x + c$$

$$4. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$$

$$5. \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

$$6. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

$$7. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$8. \int e^u du = e^u + c$$

$$9. \int \sin u du = -\cos u + c$$

$$10. \int \cos u du = \sin u + c$$

$$11. \int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$12. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + c$$

$$13. \int \sec u \tan u du = \sec u + c$$

$$14. \int \operatorname{cosec} u \cot u du = -\operatorname{cosec} u + c$$

$$15. \int \tan u du = \ln|\sec u| + c$$

$$16. \int \cot u du = \ln|\sin u| + c$$

$$17. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$

$$18. \int \operatorname{cosec} u du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$$

$$19. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c \quad 20. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c \quad 21. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + c$$

$$22. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c \quad 23. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

$$24. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c \quad 25. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

$$26. \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

$$27. \int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c \quad 28. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{u}{a} \right) + c$$

สูตรลดทอน

$$\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

$$\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

$$\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

$$\int \cot^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n \geq 2$$

$$\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n > 2$$

$$\int \csc^n u du = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du \quad \text{เมื่อ } n > 2$$

สูตรอินทิเกรตทีละส่วน By Part

$$\text{สูตร } \int u dv = uv - \int v du$$

สูตรอินทิเกรตแทนค่าตรีโกณมิติ

1. มีฟังก์ชันอยู่ในรูป $\sqrt{a^2 - u^2}$ สมมติให้ $u = a \sin \theta$ หรือ $u = a \cos \theta$ ใช้สูตร $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

2. มีฟังก์ชันอยู่ในรูป $\sqrt{a^2 + u^2}$ สมมติให้ $u = a \tan \theta$ หรือ $u = a \cot \theta$ ใช้สูตร $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

3. มีฟังก์ชันอยู่ในรูป $\sqrt{u^2 - a^2}$ สมมติให้ $u = a \sec \theta$ หรือ $u = a \csc \theta$ ใช้สูตร $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

ตรีโกณมิติพื้นฐาน

$$1. \sin x \csc x = 1 \quad 2. \cos x \sec x = 1 \quad 3. \tan x \cot x = 1 \quad 4. \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$5. \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad 6. \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 7. 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad 8. 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$9. \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad 10. \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$11. \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad 12. \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$13. \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$14. \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$15. \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$16. \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$17. \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$18. \sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$19. \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

ผลรวมรีมันน์

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

ผลรวมรีมันน์ $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ เมื่อ x_i^* คือจุดที่อยู่ในช่วงย่อยที่ i

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

อินทิกรัลจำกัดเขต

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

สมการดีกรีสอง $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + E = 0$

วงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ จุดศูนย์กลางที่ (h,k) $x^2 + y^2 = r^2$ จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$

พาราโบลา

$x^2 = 4cy$ จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ จุดศูนย์กลางที่ (h,k) คำว่า, หงาย

$y^2 = 4cx$ จุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ จุดศูนย์กลางที่ (h,k) ตะแคงซ้าย, ตะแคงขวา

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$ (คำว่า, หงาย) $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (ตะแคงซ้าย, ตะแคงขวา)

วงรี

	แกนยาวขนานแกน X	แกนยาวขนานแกน Y
สมการวงรี	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไดเรกตริกซ์	$(x-h) = \pm \frac{a}{e}$	$(y-k) = \pm \frac{a}{e}$
ความยาวของแกนยาว	2a	
ความยาวของแกนสั้น	2b	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$\frac{2b^2}{a}$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = \frac{c}{a}$	
ความสัมพันธ์ a, b, c	$b^2 = a^2 - c^2$	

สมการรูปทั่วไป $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + E = 0$

ไฮเพอร์โบลา

	แกนตามขวางทับแกน X	แกนตามขวางทับแกน y
สมการไฮเพอร์โบลา	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดยอด	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
จุดโฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
สมการไดเรกทริกซ์	$(x-h) = \pm \frac{a}{e}$	$(y-k) = \pm \frac{a}{e}$
สมการเส้นกำกับ	$(y-k) = \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k) = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
ความยาวของแกนตามขวาง	$2a$	
ความยาวของแกนสังยุค	$2b$	
ความยาวลาตัสเรกตัม	$2b^2/a$	
ความเยื้องศูนย์กลาง	$e = c/a$	
ความสัมพันธ์ a, b, c	$b^2 = a^2 - c^2$	

a = ระยะครึ่งแกนตามขวาง = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

b = ระยะครึ่งแกนสังยุค

c = ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

*****##### ขอให้นักศึกษาทุกท่านโชคดี *****#####

