



สอบ Final 1/2557 (1)

คะแนน

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

1) จงหาอินทิกรัลของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1

$$\int \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

Solⁿ ใช้เทคนิคอินทิกรัลแบบแยกส่วนย่อย.

พบว่า

$$\frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} \text{ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ เพราะดีกรีของเศษน้อยกว่าดีกรีของส่วน}$$

แยกตัวประกอบของตัวส่วนได้

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x - 1 &= (x^2 + 2x + 1)(x - 1) \\ &= (x + 1)^2(x - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{3x^2 + 5x}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x &= A(x + 1)(x - 1) + B(x - 1) + C(x + 1)^2 \\ &= A(x^2 - x + x - 1) + B(x - 1) + C(x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

$$3x^2 + 5x = Ax^2 - A + Bx - B + Cx^2 + 2Cx + C$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$A + C = 3 \Rightarrow A = 3 - C \quad \text{--- (1)}$$

$$B + 2C = 5 \Rightarrow B = 5 - 2C \quad \text{--- (2)}$$

$$-A - B + C = 0 \quad \text{--- (3)}$$

นำ (1) และ (2) แทนใน (3) จะได้

$$-(3 - C) - (5 - 2C) + C = 0$$

$$-3 + C - 5 + 2C + C = 0$$

$$-8 + 4C = 0$$

$$4C = 8$$

$$C = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{--- #}$$

4



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

$$12 \int \sin^4 x \cos^3 x dx$$

Solⁿ พิจารณาข้อในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ยกกำลัง
 เมื่อเลข $\cos^3 x$ มี n เป็นจำนวนคี่ยก $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$
 แล้วเขียน $\cos^{n-1} x$ ด้วยสูตร $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ และใช้ตัว $d(\sin x) = \cos x dx$

$$\text{พิจารณาในข้อ} \int \sin^4 x \cos^3 x dx$$

$$= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x dx$$

$$= \int \sin^4 x \cos x dx - \int \sin^6 x \cos x dx$$

$$\text{ใช้สูตร} \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{ข้อ 10}$$

$$\Rightarrow \text{ใช้ตัว} u = \sin x$$

$$\therefore du = d \sin x = \cos x dx$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos x dx - \int \sin^6 x \cos x dx$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คะแนน

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

Blank box for score and student ID

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

∴ ∫ e^{2x} cos 3x dx = 3/13 e^{2x} sin 3x + 2/13 e^{2x} cos 3x + C #

Handwritten scribbles and corrections in red and blue ink.

1.4 ∫ dx / (x^2 sqrt(4x^2 - 9))

ใช้เทคนิคการอินทิเกรตแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ
พจน์ที่อยู่ในรูป sqrt(u^2 - a^2) ให้สมมติให้ u = a sec theta

สูตร sec^2 theta - 1 = tan^2 theta

∴ sqrt(u^2 - a^2) = a tan theta = 3 tan theta

กำหนดให้ u = a sec theta จาก sqrt(4x^2 - 9) = sqrt((2x)^2 - 3^2)

∴ u = 2x, a = 3

แทนค่า 2x = 3 sec theta

x = 3/2 sec theta

หา dx ; ∴ dx = d(3/2 sec theta) = 3/2 sec theta tan theta d theta

หา x^2 ; ∴ x = 3/2 sec theta

x^2 = (3/2 sec theta)^2 = 9/4 sec^2 theta

แทนค่าทั้งหมด

∫ dx / (x^2 sqrt(4x^2 - 9)) = ∫ (3/2 sec theta tan theta d theta) / (9/4 sec^2 theta * 3 tan theta)

= ∫ 2 d theta / (9 sec theta)



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

คะแนน

| |
|--|
| |
| |

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

1.5

$$\int \frac{dx}{1+x^{2/3}}$$

Solⁿ ที่กำหนดให้คือ $x = z^3$ ให้แทนค่าตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้
สมมติให้ $x = z^3$ โดย n คือ เศษ 2/3 (เท่ากับ 3)
 $x = z^3$

หา dx : $dx = dz^3 = 3z^2 dz$
แทนค่าจะได้

$$\int \frac{dx}{1+x^{2/3}} = \int \frac{3z^2 dz}{1+(z^3)^{2/3}}$$

$$= \int \frac{3z^2 dz}{1+z^2} = 3 \int \frac{z^2 dz}{1+z^2}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2}$$

$$= 3 \int \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz$$

$$= 3 \int 1 dz - 3 \int \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$= 3z - 3 \tan^{-1} z + C$$

แทนค่า $z = x^{1/3}$; $= 3x^{1/3} - 3 \tan^{-1} x^{1/3} + C$

#





คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ _____

เลขที่ _____

คะแนน

| |
|--|
| |
| |

ข้อสอบรายวิชา _____

รหัสวิชา _____

ชื่อ _____

รหัสประจำตัว _____

หมู่เรียน _____

สอบวันที่ _____

เดือน _____

พ.ศ. _____

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$

ก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \text{หา } c_1 \text{ โดยแทน } x=1, \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{12}$$

จ:ได้

$$-\frac{1}{12} = \frac{(1)^3}{3} - (1) + c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{12} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 - 4 + 12}{12} = \frac{-5 + 12}{12}$$

$$c_1 = \frac{7}{12}$$

หา c_2 โดยแทน $x=1, y=1, c_1 = \frac{7}{12}$ ในสมการ

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2 \quad \text{จ:ได้}$$

$$1 = \frac{1^4}{12} - \frac{1^2}{2} + \frac{7}{12}(1) + c_2$$

$$c_2 = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = \frac{12 - 1 + 6 - 7}{12}$$

$$= \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

\therefore จ:ได้สมการเส้นโค้ง $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}$ #





คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

| |
|--|
| |
| |

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

4) จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลม $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

Solⁿ วิธีที่ 1 # จิตรรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน แล้วอ่านค่า h, k, r จากสมการ

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

จิตรรูป จะได้

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 2y) = -8$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) = -8 + 16 + 1$$

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

เปรียบเทียบกับสมการมาตรฐาน จะได้

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\therefore \text{จ:ได้ } h=4, k=-1, r=3$$

จุดศูนย์กลางมีจุดศูนย์กลางเท่ากับ $(4, -1)$ และรัศมีเท่ากับ 3 #

วิธีที่ 2 เปรียบเทียบกับสมการทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

จาก $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ จ:ได้

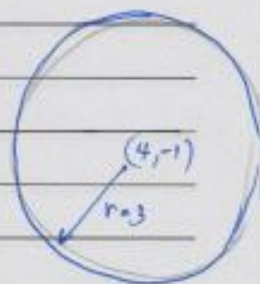
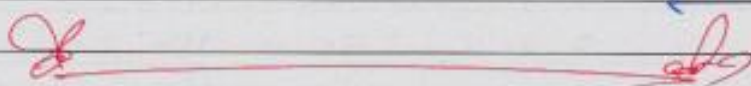
$$D = -8, E = 2, F = 8$$

จากรูป จุดศูนย์กลาง $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ จ:ได้ $= \left(\frac{-(-8)}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (4, -1)$

จากรูป รัศมี $r = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2} \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 - 4(8)}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{64 + 4 - 32} = 3$$

y





คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ.....

เลขที่.....

รหัสวิชา.....

ข้อสอบรายวิชา.....

ชื่อ.....

รหัสประจำตัว.....

หมู่เรียน.....

สอบวันที่.....

เดือน.....

พ.ศ.....

$$12 + 3E = 0$$

$$B = \frac{-12}{3} = -4$$

จ.ใด $D = -6$ หรือ $B = -4$

แทน D แทน B ไปสมการ (1) จ.ใด

$$-(-6) + 8(-4) + F = -1$$

$$6 - 32 + F = -1$$

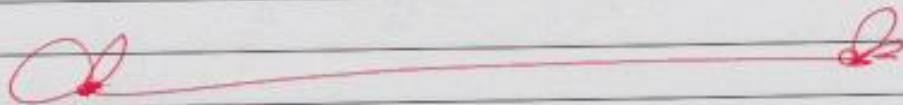
$$F = -1 - 6 + 32$$

$$F = 25$$

แทน D, E, F ~~ไป~~ สมการทั่วไปจ.ใด

$$x^2 - 6x - 4y + 25 = 0$$

#





คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

Blank box for score and student ID

ข้อสอบรายวิชา รหัสวิชา

ชื่อ รหัสประจำตัว หมู่เรียน

สอบวันที่ เดือน พ.ศ.

7) จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวของแกนเอก/ยาว และเส้นครึ่งขด ความยาวของครึ่งแกนขด และสมการกำกับของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$

8) จากสมการรูปทั่วไป $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$ จงหาในรูปปกติ

$(4x^2 + 8x) - (9y^2 - 54y) = 113$

$4(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 6y) = 113$

$4(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 6y + 9) = 113 + 4 - 81$

$4(x+1)^2 - 9(y-3)^2 = 36$

หารด้วย 36 ทั้งสองข้าง ;

$\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

$\frac{(x+1)^2}{3^2} - \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$

เทียบกับ สมการมาตรฐาน

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ได้ $h = -1, k = 3, a = 3, b = 2$

จน $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

จุดศูนย์กลางคือ $(-1, 3)$ (h, k)

จุดยอดคือ จุด $(2, 3)$ และ $(-4, 3)$ $(h+a, k)$

จุดโฟกัสคือ จุด $(-1 \pm \sqrt{13}, 3)$ $(h \pm c, k)$

ความยาวของแกนเอกยาว = b $2a$

ความยาวของแกนครึ่งขด = 4 $2b$

ความยาวของครึ่งแกนขด = $\frac{4}{3}$ $\frac{2b^2}{a}$

สมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$4 - 3 = \pm \frac{2}{3}(x + 1)$



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

$$8.1 \quad \int_1^4 (3-2x) dx$$

Solⁿ ภาวณ $[1, 4]$ แบ่งออกเป็น n ช่องเท่ากัน
 ความยาวของแต่ละช่อง $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

$$\text{จน } x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + \Delta x$$

$$x_2 = 1 + 2\Delta x$$

$$\vdots$$

$$x_i = 1 + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(x_i^*) = f(x_i) = 3 - 2x_i = 3 - 2\left(1 + \frac{3i}{n}\right)$$

$$= 3 - 2 - \frac{6i}{n} = 1 - \frac{6i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{6i}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{n} - \frac{18i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{3}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{18i}{n^2}$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{18}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{3}{n} (n) - \frac{18}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 3 - \frac{18}{n} \frac{(n+1)}{2}$$

$$= 3 - 9 \frac{(n+1)}{n} = 3 - 9 \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - 9 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 9 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 3 - 9 = -6$$

$$\therefore \int_1^4 (3-2x) dx = -6$$

#



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

คะแนน

| |
|--|
| |
| |

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

พ.ศ.

8.3 จงหา $\int_0^2 (x^3 + 2x - 3) dx$

วิธี $\int_0^2 (x^3 + 2x - 3) dx$

$$= \int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 2x dx - \int_0^2 3 dx$$

$$= \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 + \left. \frac{2x^2}{2} \right|_0^2 - \left. 3x \right|_0^2$$

$$= \frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} + \frac{(2)^2}{1} - \frac{(0)^2}{1} - 3(2) + 3(0)$$

$$= \frac{16}{4} + 4 - 6 = 4 + 4 - 6$$

$$= 2$$

8.4 จงหา $\int_0^{\sqrt{\pi}} 5x \cos x^2 dx$

$u = x^2$

$du = 2x dx$

วิธี $\int_0^{\sqrt{\pi}} 5x \cos x^2 dx = 5 \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 x dx$

$$= 5 \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 \frac{2x dx}{2} = 5 \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$$

$$= \frac{5}{2} \sin x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{5}{2} \sin (\sqrt{\pi})^2 - \frac{5}{2} \sin (0)^2$$

$$= \frac{5}{2} \sin \pi - \frac{5}{2} \sin 0 = \frac{5}{2} (0) - \frac{5}{2} (0)$$

$\therefore \int_0^{\sqrt{\pi}} 5x \cos x^2 dx = 0$

##



คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

หมายเลขข้อสอบ

เลขที่

คะแนน

ข้อสอบรายวิชา

รหัสวิชา

ชื่อ

รหัสประจำตัว

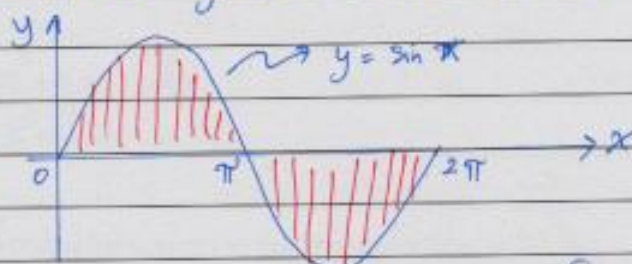
หมู่เรียน

สอบวันที่

เดือน

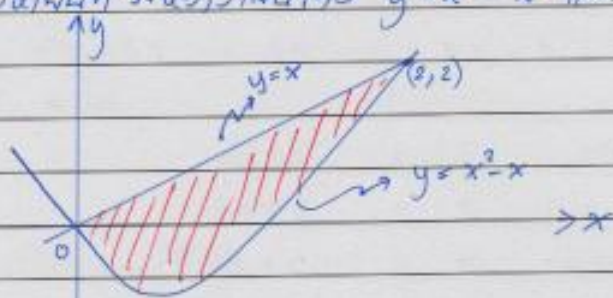
พ.ศ.

9.1 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = \sin x$ จาก 0 ถึง 2π ดังรูป.



$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\
 &= -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\
 &= (-\cos \pi + \cos 0) + \cos 2\pi - \cos \pi \\
 &= -(-1) + 1 + 1 - (-1) \\
 &= 4 \quad \#\#\#
 \end{aligned}$$

9.2 จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - x$ และเส้นตรง $y = x$ ดังรูป.



$$\begin{aligned}
 \int_0^2 (y_2 - y_1) dx &= \int_0^2 (x - (x^2 - x)) dx \\
 &= \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2
 \end{aligned}$$