มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

ANALYTIC GEOMETRY
เรขาคณิตวิเคราะห์

Mr.Adisorn Kaewpukdee
Department of Telecommunications Engineering
Faculty of Science and Technology
Nakhon Pathom Rajabhat University
http://pws.npru.ac.th/adisorn
https://sites.google.com/site/adisornkrub/

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

Outline

- ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate System)
- ระยะทางระหว่างจุดสองจุด
- จุดแบ่งระหว่างจุดสองจุด
- ความเอียงและความชันของเส้นตรง
- สมการเส้นตรง
- เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
- มุมระหว่างเส้นตรง
- ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง
- ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน
- การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม
- ภาคตัดกรวย

ระบบพิกัดฉาก

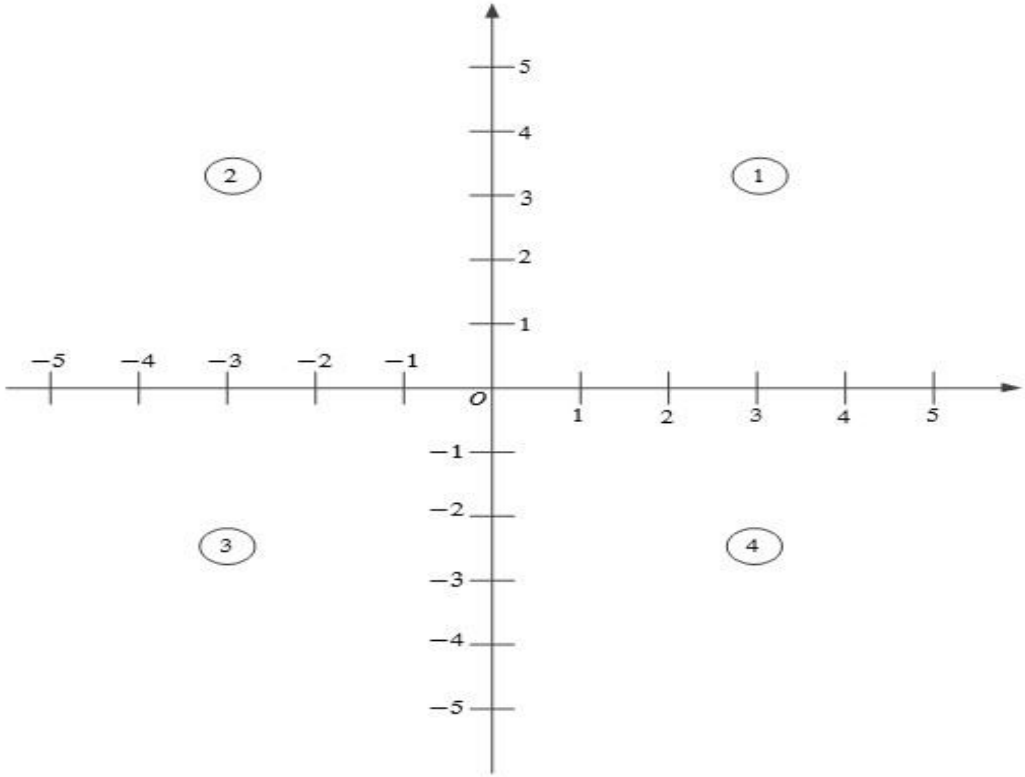
- เส้นตรงสองเส้นที่ลากตั้งฉากกัน เราเรียกว่าแกนโคออร์ดิเนท (coordinate axis)
  - แกนในแนวนอนคือแกน x
  - แกนในแนวตั้งคือแกน y

  แกนโคออร์ดิเนทตัดกันที่ จุดกำเนิด (origin point)

  จุดบนแกน x ทางด้านขวาของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก
  ทางด้านซ้ายของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ

  จุดบนแกน y ทางด้านบนของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงบวก
  ทางด้านล่างของจุดกำเนิด แทนด้วยจำนวนจริงลบ

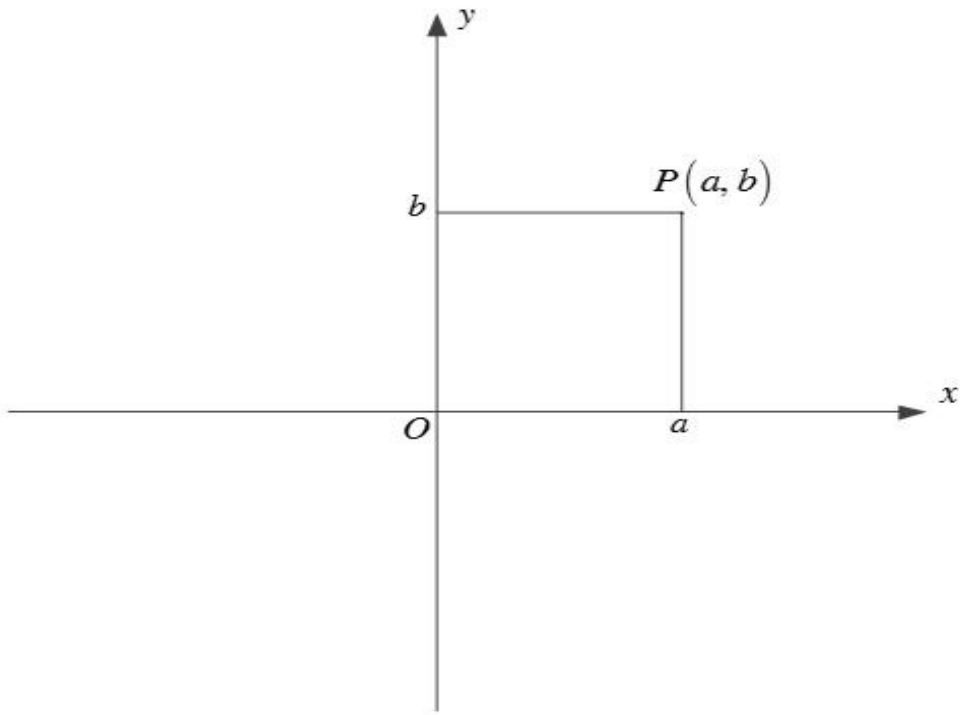
❑ แกนโคออร์ดิเนท จะแบ่งระนาบ xy ออกเป็น 4 ส่วน เรียกว่า จตุภาค คือ จตุภาคที่ 1, จตุภาคที่ 2, จตุภาคที่ 3, และจตุภาคที่ 4



- กำหนดให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบ xy ลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน X ตัดแกนที่จุด a และลากเส้นตรงตั้งฉากกับแกน Y ตัดแกนที่จุด b

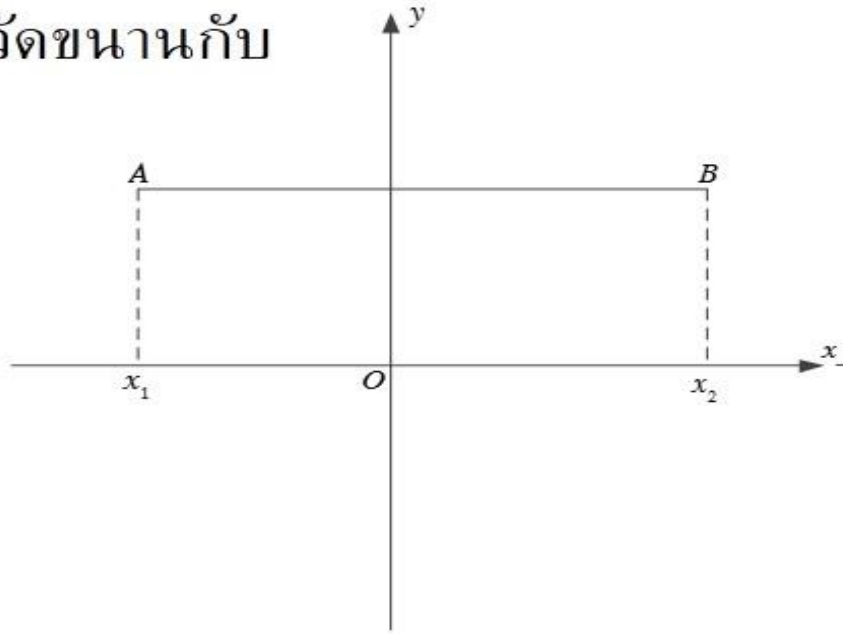
  เรียก a เป็นจุดบนแนวนอนของจุด P

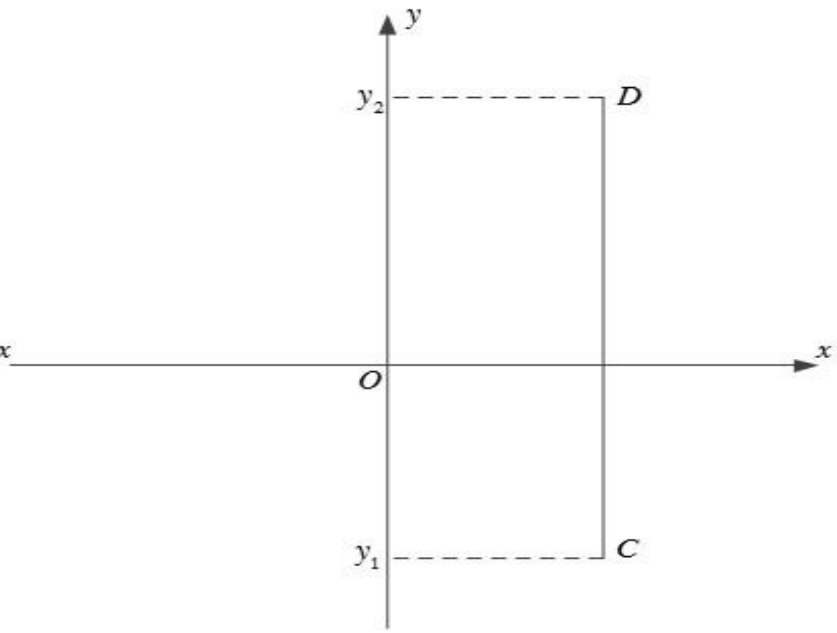
  เรียก b เป็นจุดบนแนวตั้งของจุด P



ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

- ระยะทางที่วัดขนานกับแกน X หรือแกน Y





- ระยะ $AB = x_2 - x_1 \quad ; x_2 \geq x_1$
- ระยะ $CD = y_2 - y_1 \quad ; y_2 \geq y_1$

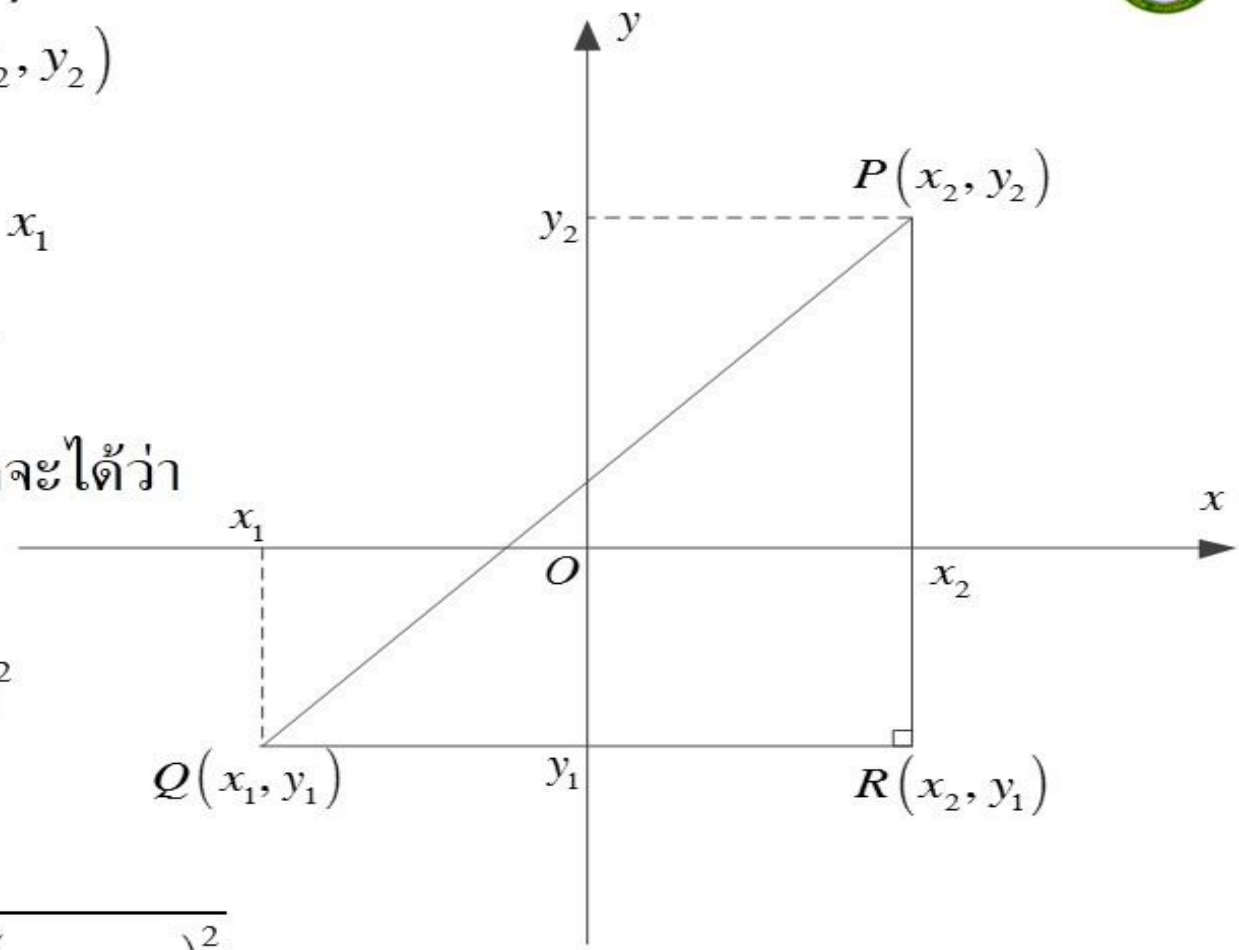
❑ ระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ใดๆ บนระนาบ xy

กำหนดให้จุด $Q(x_1, y_1)$ และ $P(x_2, y_2)$

เป็นจุใดๆ บนระนาบ

จากรูประยะทางจาก $QR = x_2 - x_1$

และระยะทางจาก $RP = y_2 - y_1$



QPR เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$(QP)^2 = (QR)^2 + (RP)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ระยะทาง

$$\therefore QP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Example จงหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $A(0,4)$ และ $B(2,-2)$ 2. $C(-1,-3)$ และ $D(4,3)$

Solution

1. ระยะทางระหว่างจุด $A(0,4)$ และ $B(2,-2)$

$$d = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(0-2)^2 + (4-(-2))^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(-2)^2 + (4+2))^2} = \sqrt{4+16}$$

$$|AB| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$ หน่วย

❑ 2. ระยะทางระหว่างจุด $C(-1,-3)$ และ $D(4,3)$

$$d = |CD| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|CD| = \sqrt{(4-(-1))^2 + (3-(-3))^2}$$

$$|CD| = \sqrt{(4+1)^2 + (3+3))^2} = \sqrt{25+36}$$

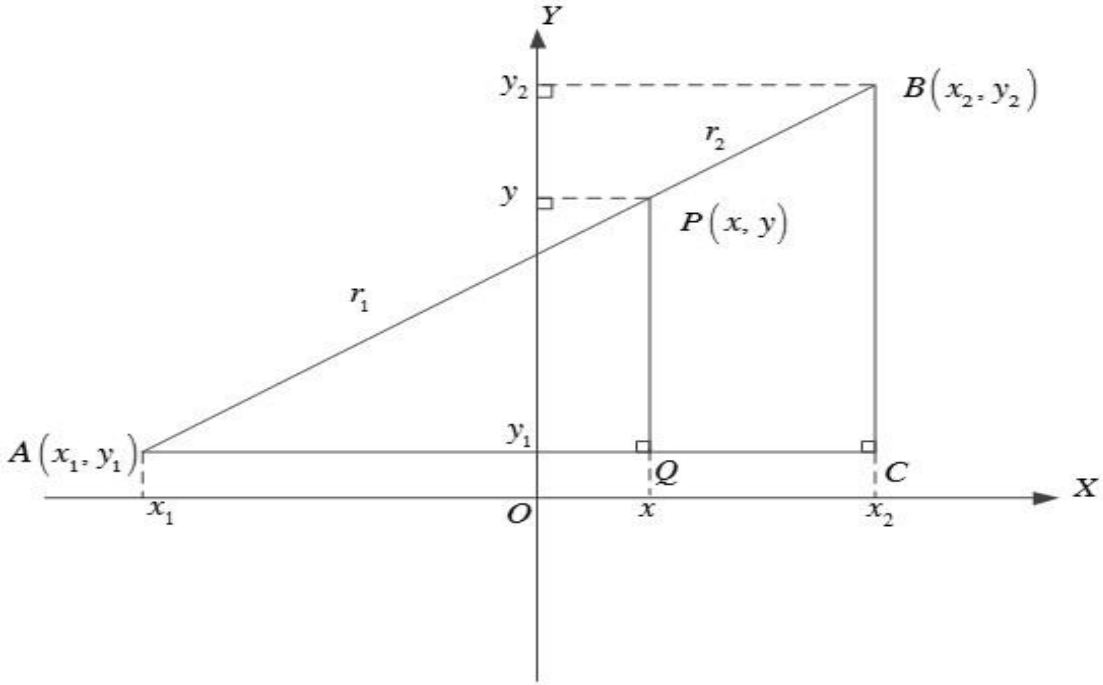
$$|CD| = \sqrt{61}$$ หน่วย

หมายเหตุ ขนาดของระยะทางระหว่างจุด 2 จุดมีค่าเป็นบวกเสมอ อาจจะไม่ต้องใส่เครื่องหมายสัมบูรณ์ ละไว้ในฐานที่เข้าใจ

$$d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

จุดแบ่งระหว่างจุดสองจุด

- กำหนดให้ จุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใด ๆ บนระนาบ xy ให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดแบ่งระยะทางระหว่างจุด A และจุด B ออกเป็นสัดส่วน $AP : PB = r_1 : r_2$



ระยะห่างของแต่ละส่วนตามภาพสามารถหาได้ดังนี้

$$AP = r_1 \qquad PB = r_2 \qquad AB = r_1 + r_2$$

$$AQ = x - x_1 \qquad BC = y_2 - y_1$$

$$QC = x_2 - x_1 \qquad PQ = y - y_1$$

และจากภาพพบว่าสามเหลี่ยม APQ และ ABC เป็นสามเหลี่ยมคล้ายทำให้คุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

จากคุณสมบัติข้างต้นจะได้ว่า

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

$$x - x_1 = \frac{r_1 (x_2 - x_1)}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{r_1 x_2 - r_1 x_1}{r_1 + r_2} + x_1$$

$$x = \frac{r_1 x_2 - r_1 x_1}{r_1 + r_2} + \frac{x_1 (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{r_1 x_2 - r_1 x_1 + r_1 x_1 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}$$

$$x = \frac{r_1 x_2 + r_2 x_1}{r_1 + r_2}$$

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

$$y - y_1 = \frac{r_1 (y_2 - y_1)}{r_1 + r_2}$$

$$y = \frac{r_1 y_2 - r_1 y_1}{r_1 + r_2} + y_1$$

$$y = \frac{r_1 y_2 - r_1 y_1}{r_1 + r_2} + \frac{y_1 (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}$$

$$y = \frac{r_1 y_2 - r_1 y_1 + r_1 y_1 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

$$y = \frac{r_1 y_2 + r_2 y_1}{r_1 + r_2}$$

ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของจุด A และจุด B สัดส่วนของ $AP:PB = r_1:r_2 = 1:1$ จะได้

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} = \frac{(1)x_2 + (1)x_1}{(1) + (1)}$$

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2} = \frac{(1)y_2 + (1)y_1}{(1) + (1)}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

สรุป ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดแบ่ง ซึ่งแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด $A(x_1,y_1)$ และจุด $B(x_2,y_2)$ ออกเป็นสัดส่วน $AP:PB = r_1:r_2$ สามารถหาจุด $P(x,y)$ ได้ดังนี้

$$x = \frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2} \qquad y = \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2}$$

ถ้าจุด $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด $A(x_1,y_1)$ และจุด $B(x_2,y_2)$ สามารถหาจุด $P(x,y)$ ได้ดังนี้

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

สัดส่วน r_1 ต้องอยู่ทางด้านจุด $A(x_1,y_1)$ และ r_2 ต้องอยู่ทางด้านจุด $B(x_2,y_2)$

ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดแบ่งภายนอกระหว่างจุด $A(x_1,y_1)$ และจุด $B(x_2,y_2)$ สัดส่วน $AP:PB$ จะมีค่าติดลบ ดังนี้ $AP:PB = (-r_1):r_2 = r_1:(-r_2)$ สามารถหาจุด $P(x,y)$ ได้ดังนี้

$$x = \frac{(-r_1)x_2 + (r_2)x_1}{-r_1 + r_2} = \frac{r_1x_2 - r_2x_1}{r_1 - r_2} \qquad y = \frac{(-r_1)y_2 + r_2y_1}{-r_1 + r_2} = \frac{r_1y_2 - r_2y_1}{r_1 - r_2}$$

Example กำหนดให้จุด $A(-1,-2)$ และจุด $B(3,4)$ จงหาจุด $P(x,y)$ ที่แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นสัดส่วน $AP:PB=1:3$

Solution

กำหนดให้ จุด $A(-1,-2)$ คือ $A(x_1,y_1)$ และจุด $B(3,4)$ คือ $B(x_2,y_2)$

จุด $P(x,y)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นสัดส่วน $AP:PB=1:3$

หาจุด $P(x,y)$ โดยใช้สูตร

$$x=\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2} \quad \text{และ} \quad y=\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}$$

$$x=\frac{r_1x_2+r_2x_1}{r_1+r_2}=\frac{1(3)+3(-1)}{1+3}=\frac{3-3}{4}=0$$

$$y=\frac{r_1y_2+r_2y_1}{r_1+r_2}=\frac{(1)4+3(-2)}{1+3}=\frac{4-6}{4}=-\frac{1}{2}$$

ดังนั้นจุด $P(x,y)$ จะได้ $P(x,y)=P\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

Example กำหนดให้จุด $C(-1,-2)$ และจุด $D(3,4)$ จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด C D และจุด

Solution

เนื่องจากเป็นจุดกึ่งกลางดังนั้น สัดส่วนของ $CP:PD = 1:1 = r_1 : r_2$

จุด $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด C และจุด D หาได้จาก

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

ดังนั้น $P(x,y) = P(1,1)$

Example กำหนดให้จุด $A(-1,5)$ และจุด $B(2,-3)$ จงหาจุด $P(x,y)$ ที่แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นสัดส่วน $AP:PB=2:-1$

Solution

จุด $P(x,y)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB เป็นสัดส่วน $AP:PB=2:-1=r_1:r_2$

$$x=\frac{r_1x_2-r_2x_1}{r_1-r_2}=\frac{2(2)-(1)(-1)}{2-1}=\frac{4+1}{1}=5$$

$$y=\frac{r_1y_2-r_2y_1}{r_1-r_2}=\frac{2(-3)-(1)5}{2-1}=\frac{-6-5}{1}=-11$$

ดังนั้นจุด $P(x,y)=P(5,-11)$

หรือพิสูจน์ ถ้าสัดส่วนเป็น $AP:PB=2:-1=r_1:r_2$ จะได้

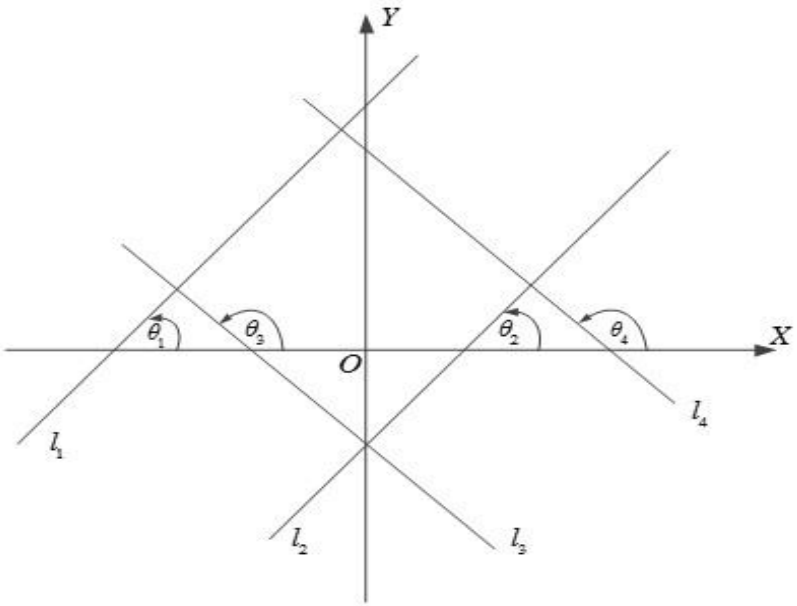
$$x=\frac{(-r_1)x_2+(r_2)x_1}{-r_1+r_2}=\frac{(-2)(2)+(1)(-1)}{-2+1}=\frac{-4-1}{-1}=5$$

$$y=\frac{(-r_1)y_2+r_2y_1}{-r_1+r_2}=\frac{(-2)(-3)+(1)(5)}{-2+1}=\frac{6+5}{-1}=-11$$

ดังนั้นจุด $P(x,y)=P(5,-11)$

ความเอียงและความชันของเส้นตรง

- ความเอียงของเส้นตรง คือขนาดของมุมที่วัดจากแนวแกน x ไปยังเส้นตรงในทิศทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งมุม θ ที่เกิดขึ้นจะสัมพันธ์กับความชันของเส้นตรงโดยความชันของเส้นตรง คือค่า $\tan(\theta)$



ตามภาพเส้นตรงทั้งหมด 4 เส้น

ประกอบด้วย l_1, l_2, l_3 และ l_4

มีความเอียงเท่ากับ $\theta_1, \theta_2, \theta_3,$ และ θ_4 ตามลำดับ

ความชันของเส้นตรงทั้ง 4 หาได้จาก $\tan(\theta)$

อาทิเช่น

ความชันของเส้นตรง l_1 เท่ากับ $m_1 = \tan(\theta_1)$

และความชันของเส้นตรง l_3 เท่ากับ $m_3 = \tan(\theta_3)$ เป็นต้น

Example กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีมุมกับแนวแกน x เท่ากับ 45° จงหาความชันของ l_1

Solution

ความเอียงของ l_1 เท่ากับ $\theta_1 = 45^o$

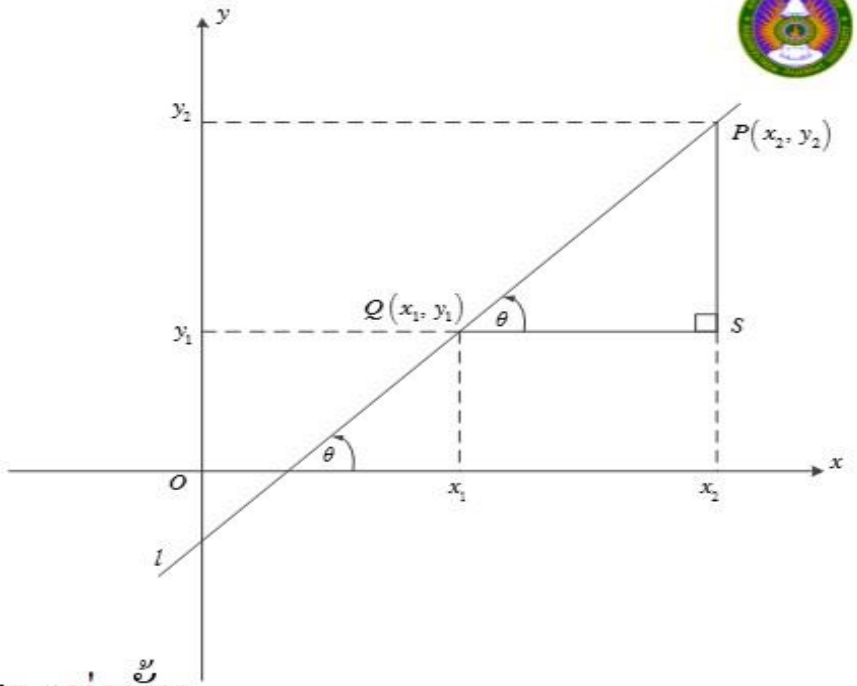
ความชันของ l_1 เท่ากับ $m_1 = \tan(\theta_1) = \tan(45^o) = 1$

❑ ความชันของเส้นตรงเมื่อทราบจุด 2 จุดบนเส้นตรง

จากภาพเส้นตรง l มีความเอียง θ คือมุมระหว่างเส้นตรงกับแกน x จุด $Q(x_1, y_1)$ และจุด $P(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดที่อยู่บนเส้นตรง l จากจุด Q ลากเส้นตามแนวขนานกับแกน x และจากจุด P ลากเส้นตามแนวขนานกับแกน y ทำให้เกิดจุดตัดระหว่างจุด Q และจุด P ขึ้นที่จุด S กลายเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก สามารถใช้คุณสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉากหาความชันของเส้นตรง l โดยหาระยะ $QS = x_2 - x_1$ และระยะ $SP = y_2 - y_1$ ดังนั้นจะได้

ความชันของเส้นตรง l $\quad m = \tan\theta = \dfrac{SP}{QS} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; เมื่อ $x_2 - x_1 \neq 0$

คุณสมบัติความเอียงและความชันของเส้นตรง



กำหนดให้ θ เป็นความเอียงของเส้นตรง และ m เป็นความชันของเส้นตรง สรุปคุณสมบัติความเอียงและความชันของเส้นตรงได้ดังนี้

1. เส้นตรงที่ขนานกับแกน x มีความเอียงเท่ากับ 0 องศา และมีความชันเท่ากับ 0 เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน x มีความเอียงเท่ากับ 90 องศา และมีความชันเท่ากับ ∞ ไม่มีความชันหรือหาค่าไม่ได้
2. ความเอียงของเส้นตรงมีค่าอยู่ในช่วงมุม $0 \le \theta \le 180$ องศา เท่านั้น
3. เมื่อความเอียงมีค่าอยู่ระหว่าง $0 < \theta < 90$ องศา ดังนั้นความชันจะมีค่าเป็นบวกเสมอ $m > 0$
4. เมื่อความเอียงมีค่าอยู่ระหว่าง $90 < \theta < 180$ องศา ดังนั้นความชันจะมีค่าเป็นลบเสมอ $m < 0$

Example จงหาความชัน m ของเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1. เส้นตรงมีความเอียง θ เท่ากับ 135 องศา
2. เส้นตรงผ่านจุด $(2,-1)$ และ $(5,2)$

Solution

1. เส้นตรงมีความเอียง θ เท่ากับ 135 องศา

ความชันของเส้นตรง คือ $m = \tan(\theta)$

$$m = \tan(135^\circ) = \tan(180^\circ - 135^\circ)$$

$$m = -\tan(45^\circ) = -1$$

$$m = -1$$

2. เส้นตรงผ่านจุด $(2,-1)$ และ $(5,2)$

ให้จุด $(2,-1)$ เป็นจุด (x_1, y_1) และ $(5,2)$ เป็นจุด (x_2, y_2)

ความชันของเส้นตรง คือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{2-(-2)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

$$m = \frac{4}{3}$$

Example จงหาความเอียง θ ของเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1. เส้นตรงมีความชัน $-\sqrt{3}$
2. เส้นตรงผ่านจุด $(1,4\sqrt{3})$ และ $(2,5\sqrt{3})$

Solution

1. เส้นตรงมีความชัน $-\sqrt{3}$ จาก $m=\tan(\theta)$ ดังนั้น

$$-\sqrt{3}=\tan(\theta)$$
$$-\sqrt{3}=-\tan(60^\circ)$$
$$-\sqrt{3}=\tan(180^\circ-60^\circ)=\tan(120^\circ)$$

เพราะฉะนั้น ความเอียง $\theta=120$ องศา

2. เส้นตรงผ่านจุด $(1,4\sqrt{3})$ และ $(2,5\sqrt{3})$

ให้จุด $(1,4\sqrt{3})$ เป็นจุด (x_1,y_1) และ $(2,5\sqrt{3})$ เป็นจุด (x_2,y_2)

ความชันของเส้นตรง คือ $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m=\frac{5\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2-1}=\frac{1\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$$

ความเอียงของเส้นตรง คือ $m=\tan(\theta)$ ดังนั้น

$$\sqrt{3}=\tan(\theta)$$
$$\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})=60^\circ$$

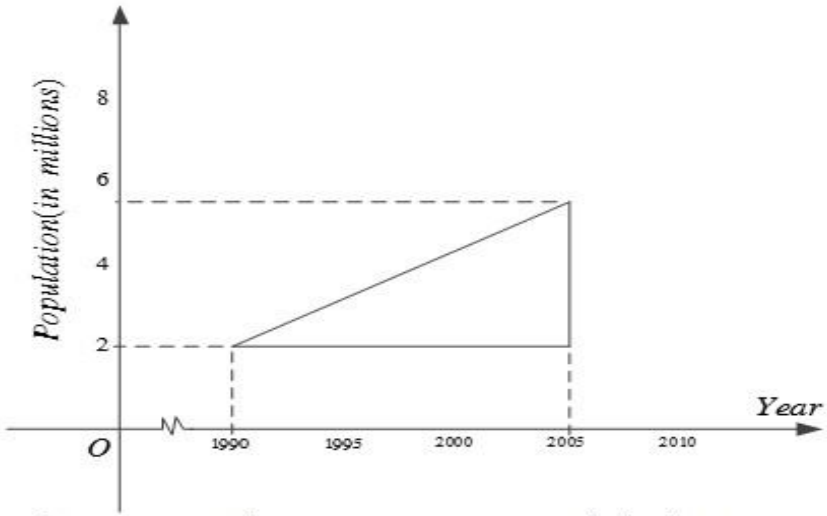
เพราะฉะนั้น ความเอียง $\theta=60$ องศา

อัตราและสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลง (rates and ratios of change)

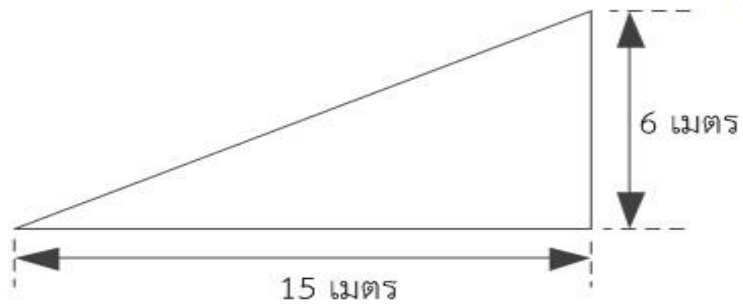
ความชันของเส้นตรงสามารถคาดการณ์ทั้งอัตราการเปลี่ยนแปลง และสัดส่วนการเปลี่ยนแปลงได้ ถ้าระนาบ xy ซึ่งประกอบด้วยแนวแกน x และแนวแกน y มีหน่วยเหมือนกันแล้ว ผลลัพธ์จะเป็นสัดส่วน (ratios) การเปลี่ยนแปลง ถ้าแนวแกน x และแนวแกน y มีหน่วยที่ไม่เหมือนกันแล้วจะกลายเป็นอัตรา (rates) การเปลี่ยนแปลง ซึ่งในการเรียนวิชาแคลคูลัสสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ ยกตัวอย่างเช่น ภาพที่ 1.10 เมื่อปี ค.ศ. 1990 มีจำนวนประชากรทั้งหมด 2,000,000 คน และในปี ค.ศ. 2005 มีจำนวนประชากรทั้งหมด 5,550,000 คน คิดเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงได้ดังนี้

$$\text{อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change)} = \frac{5,550,000 - 2,000,000}{2005 - 1990}$$

$$= \frac{3,550,000}{15} = 236,666.67 \text{ คนต่อปี ค.ศ.}$$



ภาพที่ 1.10 การเปลี่ยนแปลงของประชากรที่เพิ่มขึ้นในแต่ละปี ค.ศ.



ภาพที่ 1.11 ลักษณะของสัดส่วนที่มีหน่วยเหมือนกัน

จากภาพที่ 1.11 ให้หาความชันของเนินลูกนี้ โดยกำหนดให้ มีความยาวของฐาน 15 เมตร และมีความสูงของเนิน 6 เมตร เพราะฉะนั้นความชันหาได้จากสัดส่วนของการเปลี่ยนแปลงที่มีหน่วยเหมือนกัน จะได้

ความชันของเนิน หรือสัดส่วนการเปลี่ยนแปลง (ratio of change) $= \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

สมการเส้นตรง

- สมการเส้นตรงเป็นพื้นฐานของเรขาคณิต หรือเป็นพื้นฐานของแคลคูลัสเพราะวิธีการอธิบายปรากฏการณ์ในรูปแบบของกราฟความสัมพันธ์ ของตัวแปรในด้านวิศวกรรมศาสตร์ก็ตามที ต้องอาศัยระนาบ พิกัดจุด และเส้นตรง ในที่นี้จะแสดงวิธีหาสมการเส้นตรงในระนาบ หรือระบบพิกัดฉาก มีวิธีการหาสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขต่าง ๆ ดังนี้

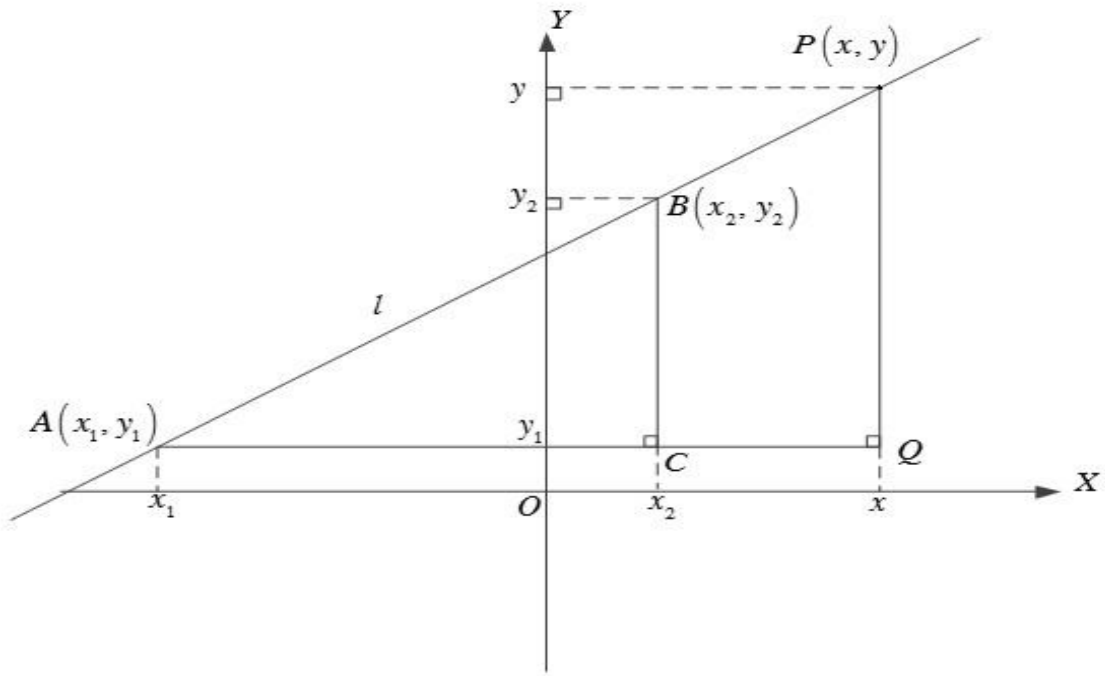
1. เมื่อกำหนดจุด 2 จุดที่อยู่บนเส้นตรง

ดังภาพที่ 1.12 กำหนดให้จุด $A(x_1, y_1)$ และจุด $B(x_2, y_2)$ ทั้ง 2 จุดอยู่บนเส้นตรง l ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ อยู่บนเส้นตรง l เช่นกัน ภาพที่ 1.12 ประกอบด้วยสามเหลี่ยม ABC และสามเหลี่ยม APQ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ดังนั้น

จะได้สัดส่วน $\frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$



ภาพที่ 1.12 สมการเส้นตรงเมื่อกำหนดจุด 2 จุด

2. เมื่อกำหนดความชันและจุด 1 จุดที่อยู่บนเส้นตรง

เมื่อกำหนดความชันของเส้นตรง และจุดที่อยู่บนเส้นตรงมาให้ สามารถหาแสดงวิธีหาสมการเส้นตรงได้จากสมการ

จาก $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ แทนค่าความชัน $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะได้

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ดังนั้นเมื่อกำหนดความชัน m และจุด 1 จุด (x_1, y_1) ใด ๆ สามารถหาสมการเส้นตรงโดยแทนในสมการข้างต้น

3. เมื่อกำหนดความชันและส่วนตัดแกน X หรือ Y

ดังภาพที่ 1.13 ในกรณีที่กำหนดความชัน m และส่วนตัดแกน Y ให้จุดตัดแกน Y เป็น $(0,b)$

ซึ่งสามารถแทนจุด (x_1,y_1) เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงได้

ดังนั้นสามารถหาสมการเส้นตรงได้

จากสมการ $y-y_1=m(x-x_1)$

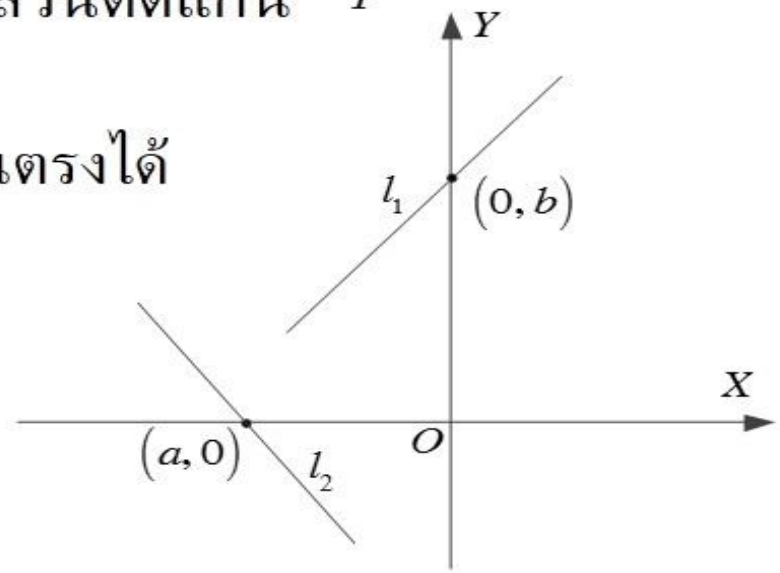
แทนจุด (x_1,y_1) ใด ๆ ด้วยจุดตัดแกน $(0,b)$ เป็น

จะได้

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-b=m(x-0)$$

$$y=mx+b$$



ภาพที่ 1.13 เส้นตรงเมื่อกำหนดความชันและจุดตัดแกน

เช่นเดียวดันดังภาพที่ 1.13 ในกรณีที่กำหนดความชัน m และส่วนตัดแกน X ให้จุดตัดแกน X เป็น $(a,0)$ ซึ่งสามารถแทนจุด (x_1,y_1) เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนเส้นตรงได้ ดังนั้นสามารถหาสมการเส้นตรงได้

จากสมการ $y-y_1=m(x-x_1)$

แทนจุด (x_1,y_1) ใด ๆ ด้วยจุดตัดแกน X เป็น $(a,0)$

จะได้

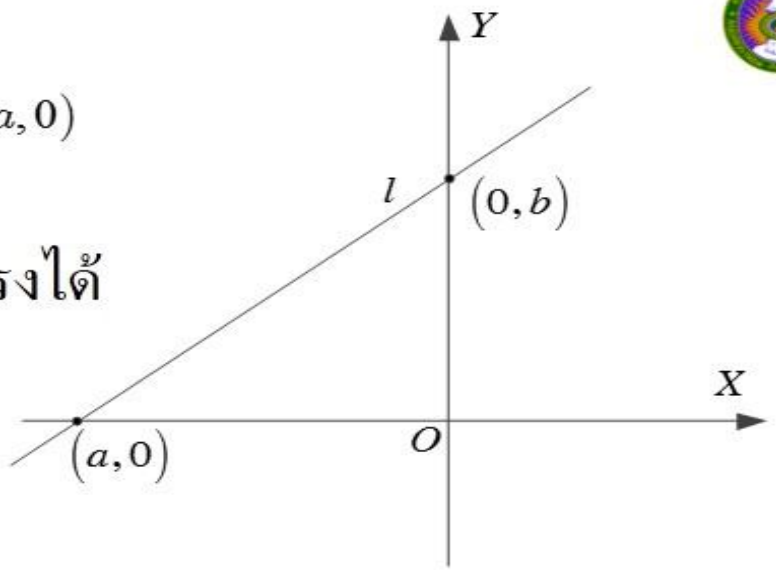
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=m(x-a)$$

$$y=mx+a$$

4. เมื่อกำหนดส่วนตัดแกน X และแกน Y

กำหนดให้เส้นตรง l มีส่วนตัดแกน X ที่จุด $(a,0)$ และส่วนตัดแกน Y ที่จุด $(0,b)$ ดังแสดงในภาพที่ 1.14 สามารถหาสมการเส้นตรงได้



ภาพที่ 1.14 เส้นตรงเมื่อกำหนดจุดตัดแกน X และแกน Y

จากสมการ $y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$

แทนจุด (x_1,y_1) ด้วยจุด $(a,0)$

และแทนจุด (x_1,y_1) ด้วยจุด $(0,b)$

จะได้

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 0 = \left(\frac{b - 0}{0 - a}\right)(x - a)$$

$$y = \left(\frac{b}{-a}\right)(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

สมการเส้นตรงทั้ง 4 รูปแบบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax + By + C = 0$$

A, B, และ C คือค่าคงที่ ถ้า $A=0$ แล้ว $B \neq 0$

และถ้า $B=0$ แล้ว $A \neq 0$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $(a,0)$ มีสมการ ดังนี้

$$x = a$$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด $(0,b)$ มีสมการ ดังนี้

$$y = b$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-7)$ และ $(-2,5)$

Solution

ให้ $(x_1, y_1) = (3,-7)$

$(x_1, y_1) = (-2,5)$

จาก $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$

แทนค่าจุด $(3,-7)$ และจุด $(-2,5)$ จะได้

$$y-(-7)=\left(\frac{5-(-7)}{(-2)-3}\right)(x-(-2))$$

$$y+7=\left(\frac{5+7}{-5}\right)(x+2)$$

$$y+7=-\frac{12}{5}(x+2)$$

$$5y+35=-12x-24$$

$$12x+5y+59=0$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-7)$ และมีความชันเท่ากับ -1

Solution

ให้ $(x_1, y_1) = (3,-7)$ และมีความชัน $m=-1$ สามารถหาสมการเส้นตรง ดังนี้

จาก $y-y_1 = m(x-x_1)$

แทนค่า $(x_1, y_1) = (3,-7)$ และมีความชัน $m=-1$ จะได้

$$y-(-7)=(-1)(x-3)$$

$$y+7=-x+3$$

$$x+y+4=0$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 3 และมีความชันเท่ากับ -3

Solution

$$3x + y - 3 = 0$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน X เท่ากับ 3 และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ -4

Solution

$$4x - 3y - 12 = 0$$

Example จงหาความชันและส่วนตัดแกน Y ของสมการเส้นตรงต่อไปนี้

1. $2x-6y-8=0$

2. $10x-5y+12=0$

Solution

1. จากสมการ $2x-6y-8=0$

$$-6y=-2x+8$$

$$y=\frac{-2x}{-6}+\frac{8}{-6}$$

$$y=\frac{x}{3}-\frac{4}{3}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y=mx+b$ จะได้

ความชันของเส้นตรงคือ $m=\frac{1}{3}$

และส่วนตัดแกน Y คือ $b=-\frac{4}{3}$

2. จากสมการ $10x-5y+12=0$

$$-5y=-10x-12$$

$$y=\frac{-10x}{-5}-\frac{12}{-5}$$

$$y=2x+\frac{12}{5}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y=mx+b$ จะได้

ความชันของเส้นตรงคือ $m=2$

และส่วนตัดแกน Y คือ $b=\frac{12}{5}$

Example จงหาส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y ของสมกาเส้นตรงต่อไปนี้

1. $12x-4y+1=0$
2. $4x+y-2=0$

Solution

1. จากสมการ $12x-4y+1=0$

$$12x-4y=-1$$

$$-12x+4y=1$$

$$\frac{x}{\left(\frac{1}{-12}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{1}{4}\right)}=1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ จะได้

ส่วนตัดแกน X คือ $a=-\frac{1}{12}$

ส่วนตัดแกน Y คือ $b=\frac{1}{4}$

2. จากสมการ $4x+y-2=0$

$$4x+y=2$$

$$\frac{4x}{2}+\frac{y}{2}=1$$

$$\frac{x}{(1/2)}+\frac{y}{2}=1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ จะได้

ส่วนตัดแกน X คือ $a=\frac{1}{2}$

ส่วนตัดแกน Y คือ $b=2$

Example จงหาความชันของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2kx-4y+1=0$ และเส้นตรงนี้มีผลรวมของส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 6

Solution

จากสมการ $2kx-4y+1=0$

$$2kx-4y=-1$$

$$-2kx+4y=1$$

$$\frac{x}{\left(-1/2k\right)}+\frac{y}{1/4}=1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ จะได้

ส่วนตัดแกน X คือ $a=\frac{-1}{2k}$

ส่วนตัดแกน Y คือ $b=\frac{1}{4}$

โดยมีผลรวมของส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 6 คือ $a+b=6$ จะได้

$$\frac{-1}{2k}+\frac{1}{4}=6$$

$$\frac{-4+2k}{8k}=6$$

$$-4=48k-2k$$

$$-4=46k$$

$$k=\frac{-2}{23}$$

แทนค่า $k=\frac{-2}{23}$ ลงในสมการ $2kx-4y+1=0$ จะได้

$$2\left(\frac{-2}{23}\right)x-4y+1=0$$

$$\frac{-4}{23}x-4y+1=0$$

$$-4y=\frac{4}{23}x-1$$

$$y=\frac{4}{(-4)23}x-\frac{1}{(-4)}$$

$$y=\frac{-1}{23}x+\frac{1}{4}$$

เปรียบเทียบกับสมการ $y=mx+b$ จะได้

ความชันของเส้นตรงคือ $m=\frac{-1}{23}$

Example จงหาส่วนตัดแกน X และส่วนตัดแกน Y ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,5)$ และ $(-1,-3)$

Solution

กำหนดให้จุด $(1,5)$ เป็นจุด (x_1,y_1) และจุด $(-1,-3)$ เป็นจุด (x_2,y_2) สามารถหาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

จาก $$y-y_1=\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1)$$

แทนค่าจุด $(1,5)$ และจุด $(-1,-3)$ จะได้

$$y-5=\left(\frac{-3-5}{-1-1}\right)(x-1)$$

$$y-5=\left(\frac{-8}{-2}\right)(x-1)$$

$$y-5=4(x-1)$$

$$y-5=4x-4$$

$$-4x+y-1=0$$

จะได้ $$-4x+y=1$$

$$\frac{x}{\left(-1/4\right)}+\frac{y}{1}=1$$

$$y-5=\left(\frac{-3-5}{-1-1}\right)(x-1)$$

$$y-5=\left(\frac{-8}{-2}\right)(x-1)$$

$$y-5=4(x-1)$$

$$y-5=4x-4$$

$$-4x+y-1=0$$

จะได้

$$-4x+y=1$$

$$\frac{x}{\left(-1/4\right)}+\frac{y}{1}=1$$

เปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ จะได้

ส่วนตัดแกน X คือ $a=\frac{-1}{4}$

ส่วนตัดแกน Y คือ $b=1$

เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

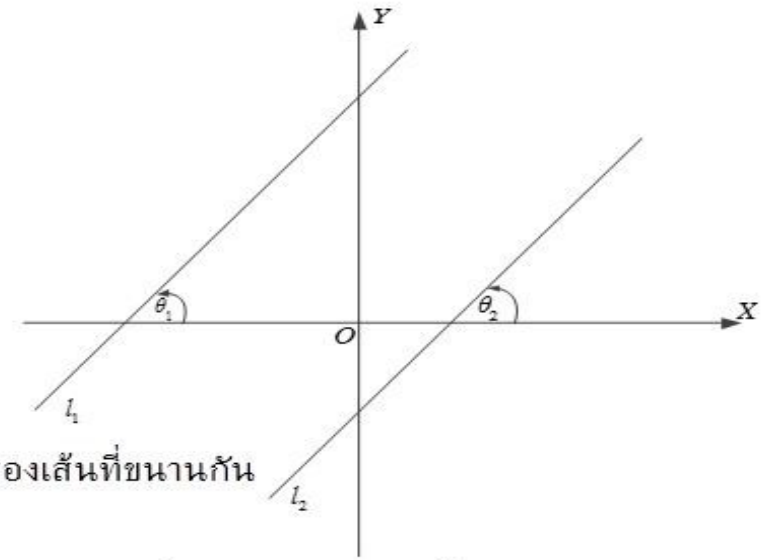
❑ เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

จากภาพที่ 1.15 กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 ถ้าเส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2 จะได้ว่า

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\tan(\theta_1) = \tan(\theta_2)$$

$$m_1 = m_2$$



ภาพที่ 1.15 เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

ซึ่ง $m = \tan(\theta)$ สรุปได้ว่า เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน

❑ เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน

จากภาพที่ 1.16 กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 $(m_1 \neq 0)$ เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 $(m_2 \neq 0)$ ถ้าเส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง l_2 จะได้ว่า

$$\theta_1 = 90^\circ + \theta_2$$

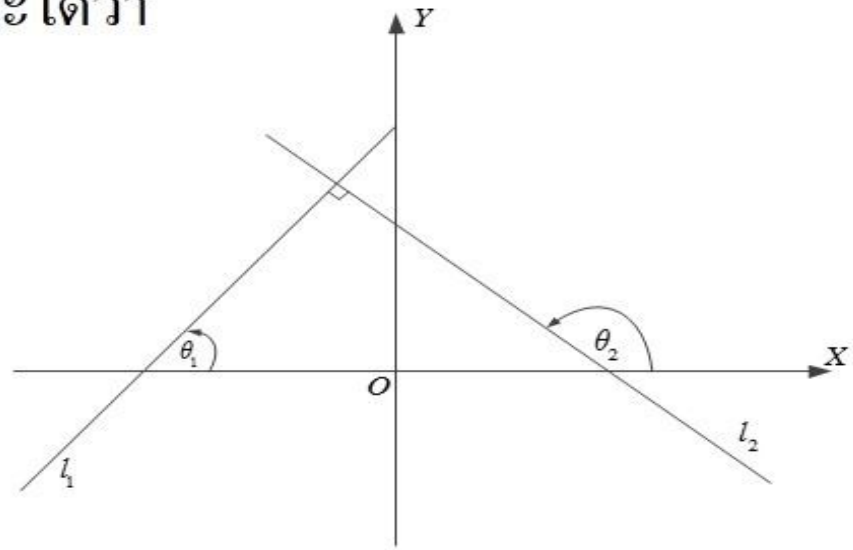
$$\tan(\theta_1) = \tan(90^\circ + \theta_2)$$

$$\tan(\theta_1) = -\cot(\theta_2)$$

$$\tan(\theta_1) = \frac{-1}{\tan(\theta_2)}$$

$$\tan(\theta_1).\tan(\theta_2) = -1$$

$$m_1.m_2 = -1$$



สรุป ได้ว่า เส้นตรงสองเส้นที่ตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับ -1

$$(m_1.m_2 = -1, m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,-3)$ และขนานกับเส้นตรง $2x+4y=-3$

Solution

จากสมการเส้นตรง $2x+4y=-3$

$$4y=-2x-3$$

$$y=\frac{-2x}{4}-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{-x}{2}-\frac{3}{4}$$ เทียบกับ $y=mx+b$ จะได้

เส้นตรงมีความชัน $m=\frac{-1}{2}$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,-3)$ และขนานกับเส้นตรง $2x+4y=-3$ จะมีค่าความชันเท่ากัน คือ $m=\frac{-1}{2}$ จะได้

$$(y-y_1)=m(x-x_1)$$

แทนค่าจะได้ $$(y-(-3))=\frac{-1}{2}(x-2)$$

$$y+3=\frac{-x}{2}+1$$

$$\frac{x}{2}+y+2=0$$

Example จงหาสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x-8y=3$

Solution

จากสมการเส้นตรง $4x-8y=3$ จะได้

$$-8y=-4x+3$$

$$y=\frac{-4x}{-8}+\frac{3}{-8}$$

$y=\frac{x}{2}-\frac{3}{8}$ เทียบกับ $y=mx+b$ จะได้

เส้นตรงมีความชัน $m=\frac{1}{2}$

สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x-8y=3$ จะมีค่าความชันคูณเท่ากัน -1 ดังนั้น

จาก $m_1=\frac{1}{2}$ สามารถหา m_2 โดย $m_1m_2=-1$ จะได้

$$\frac{1}{2}m_2=-1$$

$$m_2=-2$$

สมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x-8y=3$ จะมีค่าความชันคูณเท่ากัน -1 ดังนั้น

จาก $m_1=\frac{1}{2}$ สามารถหา m_2 โดย $m_1m_2=-1$ จะได้

$$\frac{1}{2}m_2=-1$$

$$m_2=-2$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่มีส่วนตัดแกน Y เท่ากับ 2 หรือตัดแกน Y ที่จุด $(0,2)=(x_1,y_1)$ มีความชันเท่ากับ $m_2=-2$ หาสมการเส้นตรงได้ดังนี้

จาก $(y-y_1)=m(x-x_1)$

$$(y-2)=(-2)(x-0)$$

$$y-2=-2x$$

$$2x+y-2=0$$

มุมระหว่างเส้นตรง

- กำหนดให้เส้นตรง l_1 มีความเอียงเป็นมุม θ_1 และมีความชันเท่ากับ m_1 เส้นตรง l_2 มีความเอียงเป็นมุม θ_2 และมีความชันเท่ากับ m_2 แสดงดังภาพที่ 1.17 ถ้าขนาดของ α คือมุมที่วัดจากเส้นตรง l_2 ไปยัง l_1 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และขนาดของ β คือมุมที่วัดจากเส้นตรง l_1 ไปยัง l_2 ในทิศทวนเข็มนาฬิกา แสดงความสัมพันธ์ของมุมต่าง ๆ ดังนี้

$$\theta_1 = \alpha + \theta_2$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2$$

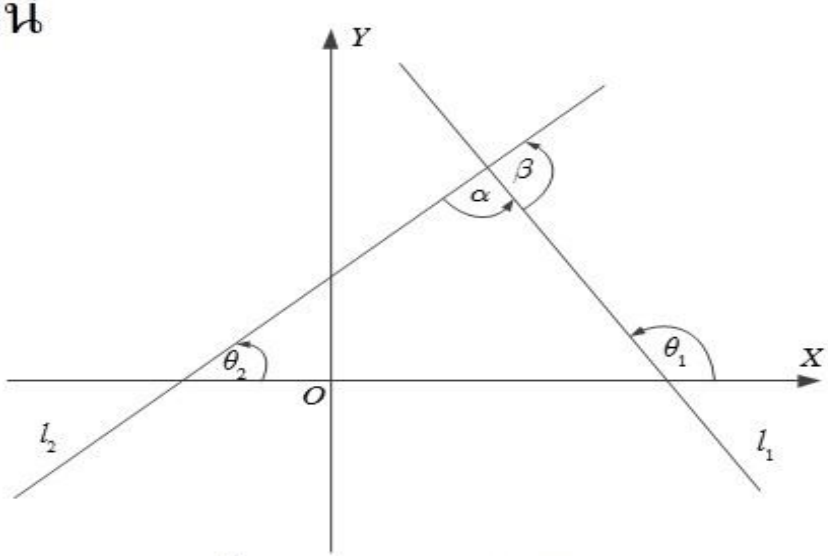
$$\tan(\alpha) = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$



ภาพที่ 1.17 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น

Example กำหนดให้เส้นตรง 2 เส้น = และ = จงหาขนาดมุมที่วัดจากเส้นตรง ไปยังเส้นตรง

Solution

จาก $l_1 = 2x-4y+6=0$

$$y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$$ เทียบกับสมการ $y=mx+b$

l_1 มีความชัน $m_1=\frac{1}{2}$

จาก $l_2 = 4x-2y+4=0$

$$y=2x+2$$ เทียบกับสมการ $y=mx+b$

l_2 มีความชัน $m_2=2$

มุมที่วัดจากเส้นตรง l_2 ไปยังเส้นตรง l_1 คือมุม $\tan(\alpha)=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ จะได้

จะได้

$$\tan(\alpha) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - (2)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(2)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\left(\frac{-3}{2}\right)}{1+1} = \frac{\frac{-3}{2}}{2} = \frac{-3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = -36.86^\circ$$

โจทย์ต้องการหามุมจากเส้นตรง l_1 ไปยังเส้นตรง l_2 คือมุม $\beta = 180^\circ - \alpha$ จะได้

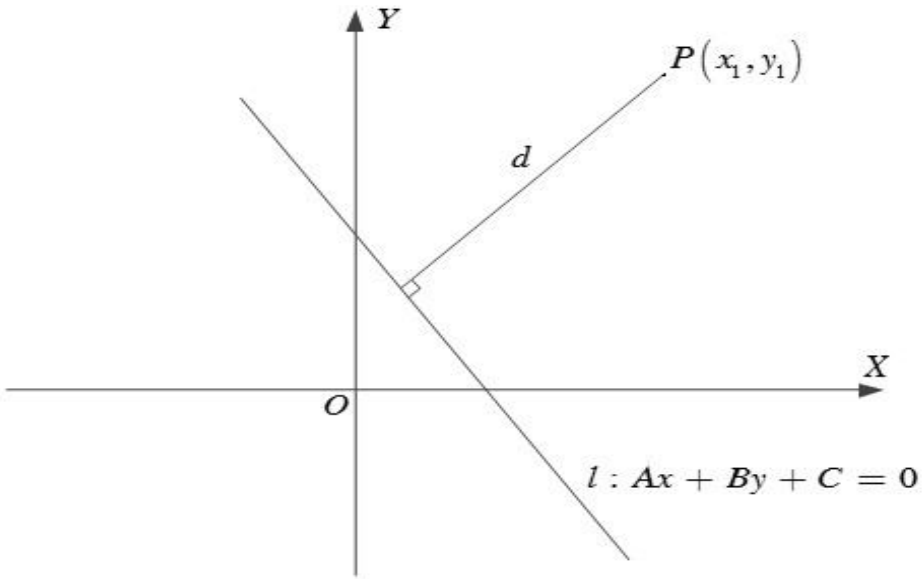
$$\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \left(-36.86^\circ\right)$$

$$\beta = 216.86^\circ$$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

- จากภาพที่ 1.18 กำหนดให้จุด $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่นอกเส้นตรง $l: Ax+By+C=0$ ให้ d เป็นระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1)$ และเส้นตรง l ซึ่งสามารถหาระยะทาง d ได้จากสูตร

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ภาพที่ 1.18 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

Example จงหาระยะทางระหว่างจุด $(1,3)$ กับเส้นตรง $4x-2y+3=0$

Solution

กำหนดให้จุด $P(x_1, y_1)$ เท่ากับ $(1,3)$

สมการเส้นตรง $4x-2y+3=0$ เทียบกับ $Ax+By+C=0$ ซึ่ง $A=4, B=-2,$ และ $C=3$

แทนค่าลงในสมการ $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ จะได้

$$d=\frac{|4(1)+(-2)3+3|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{|4-6+3|}{\sqrt{16+4}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{1}{2\sqrt{5}} \text{ หน่วย}$$

ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน

- จากภาพที่ 1.19 กำหนดให้ เส้นตรง $l_1 : Ax+By+C=0$ และเส้นตรง $l_2 : Ax+By+D=0$ ให้จุด $P(s,t)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง l_1 แทนค่าจะได้

$$l_1 : Ax+By+C=0$$

$$As+Bt+C=0$$

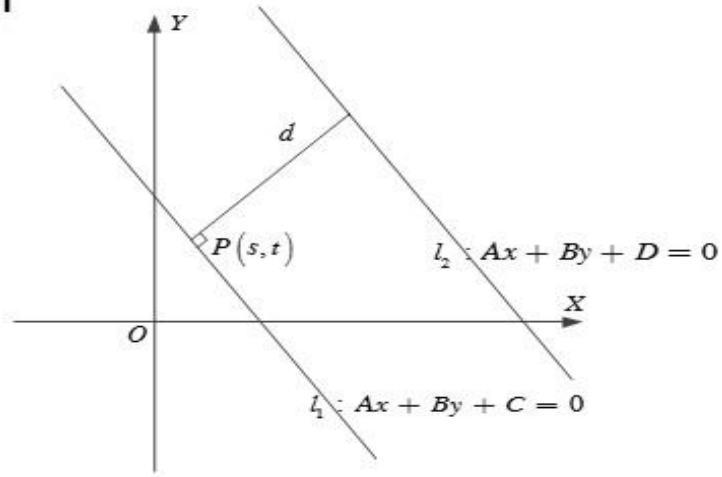
$$As+Bt=-C$$ แทนจุดที่อยู่บนเส้นตรง l_1

ระยะทางระหว่างจุด $P(s,t)$ กับเส้นตรง l_1 คือ

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d=\frac{|As+Bt+D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ แทนค่า $As+Bt=-C$ จะได้

$$d=\frac{|-C+D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ หรือ $$d=\frac{|C-D|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



ภาพที่ 1.19 ระยะทางระหว่างเส้นขนาน

Example รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีจุดยอดที่ $A(-1,-2)$, $B(4,-4)$, $C(3,2)$ และ $D(-2,4)$ จงแสดงว่าสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาระยะห่างระหว่างด้าน AD และ BC

Solution

จากสูตร หาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ จะได้ว่า

หาความชันของด้าน AD จะได้ $m_1 = \frac{4-(-2)}{-2-(-1)} = \frac{6}{-1} = -6$

หาความชันของด้าน BC จะได้ $m_2 = \frac{2-(-4)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$

หาความชันของด้าน AB จะได้ $m_3 = \frac{-4-(-2)}{4-(-1)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

หาความชันของด้าน DC จะได้ $m_4 = \frac{2-4}{3-(-2)} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$

$\therefore$ จะได้ ด้าน AD ขนานกับด้าน BC และด้าน AB ขนานกับด้าน DC

ดังนั้น $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะมีด้านตรงข้ามกันขนานกันเป็นคู่ ๆ

$\therefore$ จะได้ ด้าน AD ขนานกับด้าน BC และด้าน AB ขนานกับด้าน DC

ดังนั้น $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพราะมีด้านตรงข้ามกันขนานกันเป็นคู่ ๆ

หาระยะห่างระหว่างด้าน AD และ BC

สมการเส้นตรงของด้าน AD มีความชัน $m_1 = -6$ ผ่านจุด $(-2,4)$ มีสมการคือ

$$(y - y_1) = m_1(x - x_1)$$

$$(y-4) = (-6)(x-(-2))$$

$$(y-4) = (-6)(x+2)$$

$$y-4 = -6x-12$$

$$6x+y+8=0$$

สมการเส้นตรงของด้าน BC มีความชัน $m_2 = -6$ ผ่านจุด $(3,2)$ มีสมการคือ

$$(y - y_1) = m_1(x - x_1)$$

$$(y - 2) = (-6)(x - 3)$$

$$y - 2 = -6x + 18$$

$$6x + y - 20 = 0$$

จากสมการเส้นตรง $6x + y + 8 = 0$ และ $6x + y - 20 = 0$

เทียบกับ $Ax + By + C = 0$ $Ax + By + D = 0$

จะได้ $A = 6, B = 1, C = 8, D = -20$

ดังนั้นระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานนี้คือ

$$d = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 - (-20)|}{\sqrt{6^2 + 1^2}} = \frac{28}{\sqrt{37}} \text{ หน่วย}$$

การหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม

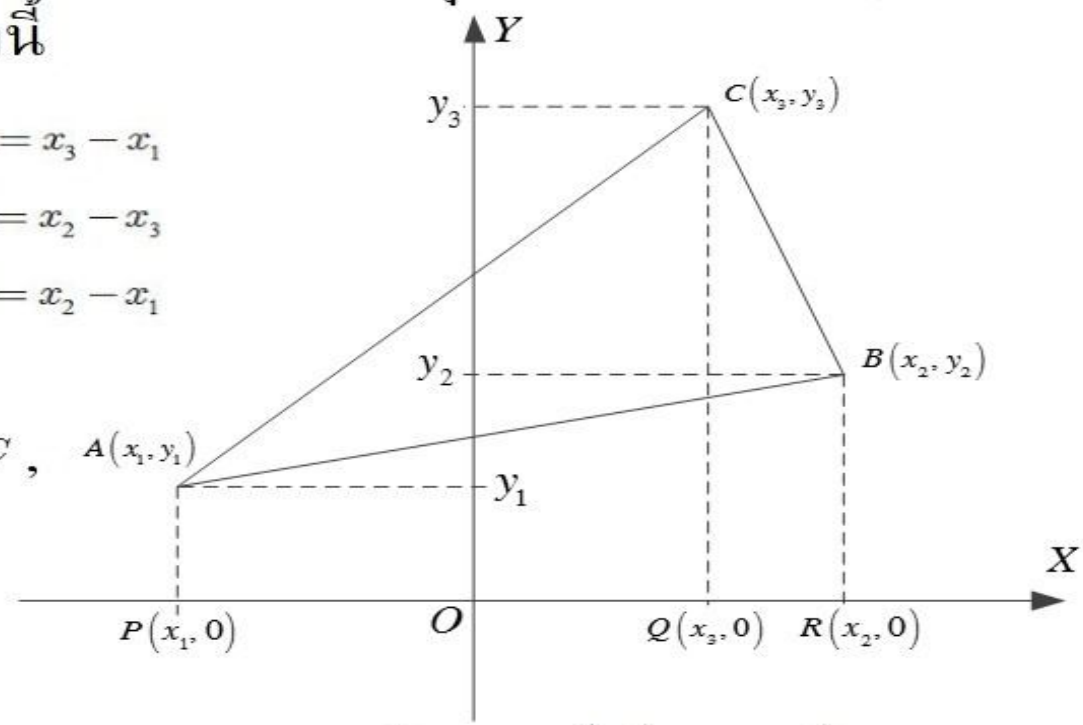
- จากภาพที่ 1.20 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ และ $C(x_3, y_3)$ มีระยะห่างระหว่างจุดดังนี้

$AP = y_1$ $\qquad$ $PQ = x_3 - x_1$

$CQ = y_3$ $\qquad$ $QR = x_2 - x_3$

$BR = y_2$ $\qquad$ $PR = x_2 - x_1$

จากภาพที่ 1.20 สามารถแบ่งรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูได้ดังนี้ $APRB$, $APQC$, และ $CQRB$ ใช้สูตรการหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูคือ



ภาพที่ 1.20 หาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

หาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2}$ (ผลบวกของด้านคู่ขนาน) $\times$ สูง

จะได้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูทั้ง 3 ดังนี้

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $APRB$

$$= \frac{1}{2}(AP + BR) \times PR$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \times (x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2)$$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $APQC$

$$= \frac{1}{2}(AP + CQ) \times PQ$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \times (x_3 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_1 + x_3 y_3 - x_1 y_3)$$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมู $CQRB = \frac{1}{2}(CQ+BR)\times QR$

$$= \frac{1}{2}(y_3+y_2)\times(x_2-x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_3 + x_2y_2 - x_3y_2)$$

ดังนั้นพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC หาได้จาก

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC

$$= \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_3 + x_2y_2 - x_3y_2) - (x_2y_1 - x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_3y_1 - \cancel{x_1y_1} + \cancel{x_3y_3} - x_1y_3 + x_2y_3 - \cancel{x_3y_3} + \cancel{x_2y_2} - x_3y_2 - x_2y_1 + \cancel{x_1y_1} - \cancel{x_2y_2} + x_1y_2\right)$$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 + x_1y_2)$

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$

สรุป การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มีจุดยอด $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ และ $C(x_3,y_3)$ สามารถคำนวณได้จาก

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ได้ด้วย สมมติให้จุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ดังนี้ มีจุดยอด $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ และ $D(x_4,y_4)$ หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ จะได้

$$\text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม } ABCD = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

Example จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม KFC ที่มีจุดยอด $K(-2,-4)$, $F(3,-1)$ และ $C(3,5)$

Solution

กำหนดให้จุด $K(-2,-4)=(x_1,y_1)$ จุด $F(3,-1)=(x_2,y_2)$ และจุด $C(3,5)=(x_3,y_3)$

จากสูตร พื้นที่รูปสามเหลี่ยมใด ๆ $=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$

แทนค่าตามสูตร จะได้

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม KFC $=\frac{1}{2}[(-2)(-1)+3(5)+3(-4)-3(-4)-3(-1)-(-2)5]$

$=\frac{1}{2}[2+15-12+12+3+10]$

$=\frac{30}{2}=15$ ตารางหน่วย

Example จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $WXYZ$ ที่มีจุดยอดเป็น $W(1,-5)$, $X(6,-3)$, $Y(6,4)$ และ $Z(2,5)$

Solution

กำหนดให้จุด $W(1,-5)=(x_1,y_1)$, $X(6,-3)=(x_2,y_2)$, $Y(6,4)=(x_3,y_3)$ และ $Z(2,5)=(x_4,y_4)$

จากสูตร พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ $=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_4y_3-x_1y_4)$

แทนค่าตามสูตร จะได้

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $WXYZ$ $=\frac{1}{2}[1(-3)+6(4)+6(5)+2(-5)-6(-5)-6(-3)-2(4)-1(5)]$

$$=\frac{1}{2}[-3+24+30-10+30+18-8-5]$$

$$=\frac{1}{2}[102-26]=\frac{76}{2}=38 \text{ ตารางหน่วย}$$